ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մառլեն Արթուրի Յոլչյան

Ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվներ

Ա.01.06 – "Հանրահաշիվ և թվերի տեսություն"
մասնագիտությամբ ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2020

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Marlen Yolchyan

Idempotent and hyperassociative algebras

SYNOPSIS

of the thesis for the degree of candidate of
physical and mathematical sciences in the specialty
A.01.06 – "Algebra and number theory"

Yerevan 2020

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի Պետական Համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու. Մ. Մովսիսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Պ. Ս. Գևորգյան ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Հ. Տ. Ասլանյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Երևանի Պետական Մանկավարժական Համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2020թ. օգոստոսի 27-ին, ժ. 15^{00}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 050 "Մաթեմատիկա" մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2020թ հուլիսի 13-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար՝ Տ. Ն. Հարությունյան

The topic of the thesis was approved in Yerevan State University

Scientific advisor	doctor of phys.-math. sciences Yu. M. Movsisyan
Official opponents	doctor of phys.-math. sciences P. S. Gevorgyan associate professor H. T. Aslanyan
Leading organization	Yerevan State Petagogical University

The defense will be held on August 27, 2020 at 15 : 00 at a meeting of the specialized council of mathematics 050, operating at the Yerevan State University (0025, 1 Alek Manukyan St, Yerevan).
The thesis can be found at the YSU library.
The synopsis was sent on July 13, 2020.

Scientific secretary
of specialized council T. N. Harutyunyan

Ապրենախոսության ընդհանուր բնութագիրը

Թեմայի արդիականությունը: Երկրորդ կարգի բանաձևերի (լեզուների) հետազոտությունների արդիականության համար տես՝ [5, 14, 15]: Գերնույնությունը [17, 18, 19, 20, 21, 36] (կամ $\forall(\forall)$-նույնությունը) հետևյալ տեսքի երկրորդ կարգի բանաձև է՝

$$\forall X_1, \dots, X_m \forall x_1, \dots, x_n (\omega_1 = \omega_2),$$

որտեղ ω_1, ω_2-ը բառեր են $X_1, \dots, X_m$ ֆունկցիոնալ փոփոխականների և $x_1, \dots, x_n$ առարկայական փոփոխականների այբուբենում: Գերնույնությունները սովորաբար ներկայացվում են առանց ունիվերսալ քվանտորների, այսինքն՝ $\omega_1 = \omega_2$: Կասենք, որ $\omega_1 = \omega_2$ գերնույնությունը տեղի ունի (բավարարվում է) $(Q; \Sigma)$ հանրահաշվում, եթե այդ հավասարությունը տեղի ունի ցանկացած x_j առարկայական փոփոխականի՝ Q բազմության ցանկացած տարրով փոխարինման և ցանկացած X_i ֆունկցիոնալ փոփոխականի՝ Σ բազմության համապատասխան տեղայնությամբ կամայական գործողությամբ փոխարինման դեպքում: Այդպիսի փոխարինման հնարավորությունը ենթադրվում է, այսինքն՝

$$\{|X_1|, \dots, |X_m|\} \subseteq \{|A| \mid A \in \Sigma\} = T_{(Q;\Sigma)} = T_{(\Sigma)},$$

որտեղ $|S|$-ը S-ի տեղայնությունն է, և $T_{(Q;\Sigma)}$-ն կոչվում է $(Q; \Sigma)$ հանրահաշվի թվաբանական տիպ: $T \subseteq N$ թվաբանական տիպով հանրահաշիվը կոչվում է T-հանրահաշիվ: Հանրահաշիվների դասը կոչվում է T-հանրահաշիվների դաս, եթե նրա ցանկացած հանրահաշիվ T-հանրահաշիվ է: Այս գաղափարը ներմուծվել է [2]-ում բինար քվազիխմբային գործողություններով հանրահաշիվների համար: Տես նաև՝ [6, 9]:

Կոնույնությունը [17, 18, 19, 20, 21, 36] (կամ $(\exists)\forall$-նույնությունը) հետևյալ տեսքի երկրորդ կարգի բանաձև է՝

$$\exists x_1, \dots, x_n \forall X_1, \dots, X_m (w_1 = w_2) :$$

Կոնույնությունը նույնպես, սովորաբար ներկայացվում է առանց ունիվերսալ քվանտորների՝ $\omega_1 = \omega_2$: Կասենք, որ $\omega_1 = \omega_2$ կոնույնությունը տեղի ունի (բավարարվում է) $(Q;\ \Sigma)$ հանրահաշվում, եթե Q բազմության մեջ գոյություն ունեն տարրեր որպես $x_1, \dots, x_n$ առարկայական փոփոխականների արժեքներ, այնպիսիք, որ $\omega_1 = \omega_2$ հավասարությունը տեղի ունի նրա՝ առարկայական փոփոխականների վերոնշյալ գոյություն ունեցող արժեքներով փոխարինման և ցանկացած ֆունկցիոնալ փոփոխականի՝ Σ բազմության համապատասխան տեղայնության ցանկացած գործողությամբ փոխարինման դեպքում (այդպիսի փոխարինման հնարավորությունը ենթադրվում է): Այս գաղափարը ներմուծվել է [17]-ում:

Օրինակ 1: Ցանկացած մուլտիօպերատոր Ω-խմբում հետևյալ կոնույնությունը ճըշմարիտ է՝

$$X(\underbrace{0,\ \ldots,0}_{n}) = 0,$$

ցանկացած $n \in T_{(\Omega)}$, որտեղ բոլոր առարկայական փոփոխականները փոխարինված են Ω-խմբի զրոյական տարրով [8, 10, 11, 28]:

Օրինակ 2: $(J.\ von\ Neumann)$ Դիցուք $L(+,\ \cdot)$-ը մոդուլյար կավար է և $a,\ b,\ c \in L$: L-ի $a,\ b,\ c$ տարրերով ծնված ենթակավարը կլինի բաշխական, եթե ձախ բաշխականության հետևյալ կոնույնությունը՝

$$X\left(a,\ Y(b,\ c)\right) = Y\left(X(a,\ b),\ X(a,\ c)\right)$$

տեղի ունի L-ում:

Կասենք, որ գերնույնությունը ոչ տրիվյալ է, եթե $m > 1$: $m = 1$ դեպքում այն կոչվում է տրիվյալ: m թիվը կոչվում է գերնույնության ֆունկցիոնալ ռանգ:

Բինար գործողություններով հանրահաշիվը կոչվում է բինար հանրահաշիվ [4]: $(Q;\Sigma)$ բինար հանրահաշիվը կոչվում է q-հանրահաշիվ (e-հանրահաշիվ), եթե գոյություն ունի $A \in \Sigma$, այնպիսին, որ $Q(A)$-ը քվազիխումբ է (միավորով խմբոիդ): $(Q;\Sigma)$ բինար հանրահաշիվը կոչվում է ֆունկցիոնալ ոչ տրիվյալ, եթե $|\Sigma| > 1$, հակառակ դեպքում՝ ֆունկցիոնալ տրիվյալ: Հայտնի է [17, 18] (տես նաև [19, 23]), որ եթե ֆունկցիոնալ ոչ տրիվյալ q-հանրահաշվում (e-հանրահաշվում) տեղի ունի ոչ տրիվյալ զուգորդականության գերնույնություն, ապա նրա ֆունկցիոնալ ռանգը 2 է և այն ունի հետևյալ տեսքերից որևէ մեկը՝

$$X(x, Y(y,z)) = Y(X(x,y),z), \qquad (ass)_1$$

$$X(x, Y(y,z)) = X(Y(x,y),z), \qquad (ass)_2$$

$$Y(x, Y(y,z)) = X(X(x,y),z)\ : \qquad (ass)_3$$

Ավելին, q-հանրահաշիվների (e-հանրահաշիվների) դասում $(ass)_3$-ից բխում է $(ass)_2$-ը, $(ass)_2$-ից՝ $(ass)_1$-ը:

$(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է ինքնահամընկնող, եթե այն բավարարում է հետևյալ ինքնահամընկնման գերնույնությանը՝

$$X(\underbrace{x,\ldots,x}_{n}) = x, \tag{id}$$

ցանկացած $n \in T_{(Q;\Sigma)}$-ի համար: $(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է գերզուգորդական, եթե այն բավարարում է $(ass)_1$ զուգորդականության գերնույնությանը:

Օրինակ 3: Դիցուք A, B-ն ոչ դատարկ բազմություններ են, Σ-ն B-ից A բոլոր արտապատկերումների բազմությունն է, իսկ Q-ն՝ A-ից B: Ամեն մի $\alpha \in \Sigma$ տարրի համար Q բազմության վրա սահմանենք բինար գործողություն հետևյալ կերպ՝

$$\alpha(a,b) = a \cdot \alpha \cdot b,$$

որտեղ $a, b \in Q$ և $(\cdot)$-ը արտապատկերումների սովորական համադրույթն է: Ավելին, եթե $A = B$, մենք ստանում ենք $(Q;\Sigma;\cdot)$ երկրորդ կարգի հանրահաշիվ [24]-ի իմաստով:

Գերզուգորդական հանրահաշիվները կիսախմբային գործողություններով հանրահաշիվներ են: Գերզուգորդական հանրահաշիվները Γ-կիսախմբեր և դոպպելկիսախմբեր անվանումների ներքո դիտարկվում են նաև տարբեր հեղինակների կողմից [1, 25, 13, 26, 31, 32, 33, 35, 34, 38, 39]:

Այս ատենախոսությունը նվիրված է հանրահաշիվների տարբեր դասերի կառուցվածքային խնդիրներին, կապված գերնույնությունների և կոնույնությունների հետ: Հետազոտվում են ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվների կառուցվածքային խնդիրները, որոնք մասնավորապես հանդիսանում են կիսախմբային գործողություններով հանրահաշիվներ: Ելնելով ըստ զրոյի զուգորդական գծային հանրահաշվի գաղափարից, ներմուծվում է 4-զուգորդության գաղափարը, որը հանդիսանում է խմբային գործողություններով գերզուգորդական հանրահաշվի գաղափարի բնական ընդհանրացումը:

Ատենախոսության մեջ ներմուծված հիմնական գաղափարներից է g-հանրահաշվի գաղափարը, որպես գծային հանրահաշվի և ունիվերսալ հանրահաշվի գաղափարների միավորում:

Աշխատանքի հիմնական նպատակը և դիտարկված խնդիրները: Նկարագրել ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվների կառուցվածքը:

Գտնել ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշվի՝ տեղափոխականության փոխանցականության հատկությամբ օժտված լինելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

Ապացուցել Քելլիի փիպի թեորեմներ g-դիմոնոիդների համար:

Հետազոտել 4-զուգորդությունների և խմբային գործողություններով գերզուգորդական հանրահաշիվների միջև կապը:

Ապացուցել Արթինի փիպի թեորեմ g-հանրահաշիվների համար:

Հետազոտության մեթոդները: Այս ատենախոսության մեջ օգտագործվում են ունիվերսալ հանրահաշիվների և կիսախմբերի տեսության հետազոտական մեթոդներ:

Գիտական նորույթը: Բոլոր հիմնական արդյունքները նոր են: Դրանք են՝

1. Ապացուցվել է, որ յուրաքանչյուր ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվ հանդիսանում է ուղղանկյուն կիսախմբերի կիսակավարային կառուցվածք:

2. Ապացուցվել է, որ տեղափոխականության փոխանցականությամբ օժտված ցանկացած ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվ, որը բավարարում է մեդիալության հետևյալ գերնույնությանը՝

$$Y(X(x,y),Y(z,x)) = Y(X(x,z),Y(y,x)),$$

   հանդիսանում է կիսակավարների ուղղանկյուն կառուցվածք:

3. Ապացուցվել է, որ ցանկացած ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվ, որը հանդիսանում է կիսակավարների ուղղանկյուն կառուցվածք, օժտված է տեղափոխականության փոխանցականությամբ:

4. Դիցուք S-ը կիսախումբ է, $X \neq \emptyset$-ը բազմություն է, $(\cdot)$-ը ձախ S-ազդեցություն է, $(\circ)$-ը աջ S-ազդեցություն է, $\varphi : X \to S$ արտապատկերումը S կիսախմբի (l,r)-մորֆիզմ է: Սահմանենք հետևյալ բինար գործողությունները՝

$$\succ : X \times X \to X, \quad x \succ y := \varphi(x) \cdot y, \;\; \forall x, y \in X,$$

$$\prec : X \times X \to X, \quad x \prec y := x \circ \varphi(y), \;\; \forall x, y \in X :$$

   Այդ դեպքում $(X; \prec, \succ)$ հանրահաշիվը կլինի g-դիմոնոիդ: Ավելին՝ ցանկացած g-դիմոնոիդ իզոմորֆորեն ներդրվում է մի այդպիսի g-դիմոնոիդի մեջ:

5. Դիցուք S կիսախումբը բավարարում է հետևյալ նույնությանը՝

$$xyz = tlp :$$

Սահմանենք հետևյալ բինար գործողությունները՝

$$(g,h) \prec (k,l) = (gh, hk),$$

$$(g,h) \succ (k,l) = (gk, gl) :$$

Այդ դեպքում $(S \times S; \prec, \succ)$ հանրահաշիվը g-դիմոնոիդ է, որը բավարարում է հետևյալ գերնույնությանը՝

$$X(x, Y(y,z)) = Z(T(t,l), p) :$$

Հակառակը՝ ցանկացած g-դիմոնոիդ, որը բավարարում է վերոնշյալ գերնույնությանը, իզոմորֆորեն ներդրվում է մի այդպիսի g-դիմոնոիդի մեջ:

6. Ցույց է տրվում 4-զուգորդությունների և խմբային գործողություններով գերզուգորդական հանրահաշիվների միջև կապը Մալցևյան արտադրյալի միջոցով:

7. Ապացուցվում է, որ խմբային գործողություններով գերզուգորդական հանրահաշվի քվազիբուլյան ասպիճանը 4-զուգորդություն է:

8. Դիցուք $R(+, \Sigma, \Phi)$-ն գերալտերնատիվ g-հանրահաշիվ է, որը բավարարում է հետևյալ կոնույնությանը՝

$$X(a, Y(b,c)) = Y(X(a,b), c) :$$

Այդ դեպքում $R(+, \Sigma, \Phi)$-ի՝ $a, b, c \in R$ տարրերով ծնված ենթահանրահաշիվը գերզուգորդական է:

Տեսական և գործնական արժեքը: Բոլոր հիմնական արդյունքները և մշակված հիմնական մեթոդները ունեն տեսական հետաքրքրություն երկրորդ կարգի բանաձևերի հետագա հետազոտության համար:

Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փորձարկումը: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները ներկայացվել են հետևյալ միջազգային գիտական կոնֆերանսներում և գիտական սեմինարներում՝

"On idempotent and hyperassociative algebras", Yerevan State University, Conference Dedicated to the Memory of Academician Mkhitar Djrbashyan, October 22–24, 2018, Yerevan, Armenia. "On hyperassociative algebras", Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, International Conference Mal'tsev Meeting 2018, p. 219, November 19–22, 2018, Novosibirsk, Russia. "On idempotent and hyperassociative algebras", AAA97, 97th Workshop on General Algebra,

p. 41, March 1–3, 2019, Vienna, Austria. ”Cayley-type theorem for g- dimonoids”, Auburn University, Spring Southeastern Sectional Meeting, March 15–17, 2019, Auburn, AL, USA. ”Cayley-type theorem for g- dimonoids”, University of Hawaii at Manoa, Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, March 22–24, 2019, Honolulu, HI, USA.

Հրապարակումները: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները հրապարակվել են թվով 8 աշխատանքներում (3 հոդված և 5 կոնֆերանսների թեզիս), որոնք բերված են հղումներից հետո:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը: Ատենախոսությունը կազմված է ներածությունից, հինգ գլխից, ամփոփումից և հղումների ցուցակից: Հղումների քանակը 46 է, ատենախոսության էջերի քանակը 85 է:

Աշխատանքի բովանդակությունը

Առաջին գլուխը նվիրված է ինքնահամընկող և գերզուգորդական հանրահաշիվների կառուցվածքային հետազոտությանը: Ստացված արդյունքները, մասնավորապես, հանդիսանում են նաև կիսախմբերի տեսության համապատասխան արդյունքների ընդհանրացումներ [29, 30]:

$Q(\cdot)$ խմբոիդը կոչվում է ինքնահամընկնող խմբոիդ, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը`

$$x \cdot x = x, \forall x \in Q :$$

Դիցուք $Q(\cdot)$-ը ինքնահամընկնող խմբոիդ է: Այդ դեպքում $(\cdot)$-ը նույնպես կոչվում է ինքնահամընկնող: Կիսախումբը կոչվում է կիսակավար, եթե այն ինքնահամընկնող է և տեղափոխական: Եթե $Q(\cdot)$-ը կիսակավար է, ապա $(\cdot)$-ը կոչվում է կիսակավարային գործողություն: Խմբոիդը կոչվում է ուղղանկյուն խմբոիդ, եթե այն բավարարում է $x(yx) = x$ նույնությանը: Եթե $Q(\cdot)$-ը ուղղանկյուն խմբոիդ է, ապա $(\cdot)$-ը նույնպես կոչվում է ուղղանկյուն:

$(Q;\Sigma)$ բինար հանրահաշիվը կոչվում է հակատեղափոխական, եթե հետևյալ պայմանը տեղի ունի`

$$X(x, y) = X(y, x) \Rightarrow x = y,$$

որտեղ $X \in \Sigma$ և $x, y \in Q$: $(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է տեղափոխականության փոխանցականությամբ օժտված, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմանին`

$$X(x, y) = X(y, x) \;\&\; X(y, z) = X(z, y) \Rightarrow X(x, z) = X(z, x),$$

որտեղ $X \in \Sigma$ և $x, y, z \in Q$:

$(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է ուղղանկյուն հանրահաշիվ, եթե այն բավարարում է հետևյալ (ուղղանկյունության) գերնույնությանը`

$$X(x, X(y, x)) = x : \tag{rect}$$

$(Q;\Sigma)$ բինար հանրահաշիվը կոչվում է կիսակավարների ուղղանկյուն կառուցվածք, եթե գոյություն ունի $(Q;\Sigma)$-ի կոնգրուենցիա այնպիսին, որ համապատասխան ֆակտոր հանրահաշիվը ուղղանկյուն հանրահաշիվ է, իսկ Σ-ի յուրաքանչյուր գործողություն կիսակավարային է ամեն մի համարժեքության դասում: $(Q;\Sigma)$ բինար հանրահաշիվը կոչվում է ուղղանկյուն կիսախմբերի կիսակավարային կառուցվածք, եթե գոյություն ունի $(Q;\Sigma)$-ի կոնգրուենցիա այնպիսին, որ համապատասխան ֆակտոր հանրահաշվում ցանկացած գործողություն կիսակավարային է, իսկ Σ-ի յուրաքանչյուր գործողություն ուղղանկյուն է ամեն մի համարժեքության դասում [36, 29]:

Եթե $(Q;\Sigma)$-ն ֆունկցիոնալ ոչ տրիվյալ, ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվ է, ապա $|Q| \geq 4$: Ստորև բերենք ֆունկցիոնալ ոչ տրիվյալ, ինքնահամընկնող և գերզուգորդական $Q(+,\cdot)$ հանրահաշվի օրինակ [20] իր գործողությունների Քեյլիի աղյուսակներով՝

$+$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	1	1
2	1	2	1	4
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

$\cdot$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	1	1
2	1	2	4	4
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

Ավելին, 4-տարրանի ֆունկցիոնալ ոչ տրիվյալ, ինքնահամընկնող և գերզուգորդական $Q(+,\cdot)$ հանրահաշիվների քանակը 24 է [20]: Այդ հանրահաշիվների արտադրյալները կլինեն 4 բինար գործողություններով ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվներ [21]:

Գլուխ 1-ի հիմնական արդյունքներն են.

Թեորեմ 1: Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ը ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում

$$\theta^* = \{(x,y) \in Q \times Q \mid X(x, X(y,x)) = x, X(y, X(x,y)) = y,\ \forall X \in \Sigma\}$$

հարաբերությունը $(Q;\Sigma)$-ի վրա սահմանված կոնգրուենցիա է, այնպիսին, որ համապատասխան ֆակտոր հանրահաշվի ամեն մի գործողություն կիսակավարային է, իսկ համարժեքության դասերը՝ ուղղանկյուն կիսախմբեր:

Թեորեմ 2: Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն ինքնահամընկնող և գերզուգորդական հանրահաշիվ է, որը բավարարում է մեդիալության հետևյալ գերնույնությանը՝

$$Y(X(x,y), Y(z,x)) = Y(X(x,z), Y(y,x)) :$$

Այդ դեպքում $(Q;\Sigma)$-ն օժտված է տեղափոխականության փոխանցականության հատկությամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ունի կիսակավարային ուղղանկյուն կառուցվածք:

Այժմ անցնենք երկրորդ գլխի հիմնական արդյունքների շարադրմանը:

$(X; \prec, \succ)$ երկու բինար գործողություններով հանրահաշիվը կոչվում է g-դիմոնոիդ [22], եթե այն բավարարում է հետևյալ 4 զուգորդականության նույնություններին՝

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \prec z), \tag{A_1}$$

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \succ z), \tag{A_2}$$

$$(x \prec y) \succ z = x \succ (y \succ z), \tag{A_3}$$

$$(x \succ y) \succ z = x \succ (y \succ z) : \tag{A_4}$$

$(X; \prec, \succ)$ g-դիմոնոիդը կոչվում է դիմոնոիդ [12], եթե այն բավարարում է նաև հետևյալ զուգորդականության նույնությանը՝

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z) : \tag{A_5}$$

Երկրորդ գլուխը նվիրված է g-դիմոնոիդների կառուցվածքի ուսումնասիրությանը: [40] աշխատանքում ուսումնասիրվել է դիմոնոիդների կառուցվածքը: g-դիմոնոիդի գաղափարը հանդիսանում է դիմոնոիդի գաղափարի ընդհանրացումը: Ապացուցվել են հետևյալ Քելլիի փիպի թեորեմները g-դիմոնոիդների համար.

<u>**Թեորեմ 3:**</u> Դիցուք S-ը կիսախումբ է, $X \neq \emptyset$-ը բազմություն է, $(\cdot)$-ը ձախ S-ազդեցություն է, $(\circ)$-ը աջ S-ազդեցություն է, $\varphi : X \to S$ արտապատկերումը S կիսախմբի (l, r)-մորֆիզմ է: Սահմանենք հետևյալ բինար գործողությունները՝

$$\succ : X \times X \to X, \quad x \succ y := \varphi(x) \cdot y, \ \ \forall x, y \in X,$$

$$\prec : X \times X \to X, \quad x \prec y := x \circ \varphi(y), \ \ \forall x, y \in X.$$

Այդ դեպքում $(X; \prec, \succ)$ հանրահաշիվը կլինի g-դիմոնոիդ: Եվ հակառակը՝ ցանկացած g-դիմոնոիդ իզոմորֆորեն ներդրվում է մի այդպիսի g-դիմոնոիդի մեջ:

Որպես հետևանք նախորդ թեորեմից, ստացվում է Քելլի փիպի թեորեմ դիմոնոիդների համար, որը ապացուցված է [40] աշխատանքում:

<u>**Թեորեմ 4:**</u> Դիցուք S կիսախումբը բավարարում է հետևյալ նույնությանը՝

$$xyz = tlp :$$

Սահմանենք հետևյալ բինար գործողությունները՝

$$(g, h) \prec (k, l) = (gh, hk),$$

$$(g,h) \succ (k,l) = (gk, gl) :$$

Այդ դեպքում $(S \times S; \prec, \succ)$ հանրահաշիվը g-դիմոնոիդ է, որը բավարարում է հետևյալ գերնույնությանը՝

$$X(x, Y(y,z)) = Z(T(t,l), p) :$$

Եվ հակառակը՝ ցանկացած g-դիմոնոիդ, որը բավարարում է վերոնշյալ գերնույնությանը, իզոմորֆորեն ներդրվում է մի այդպիսի g-դիմոնոիդի մեջ:

Հանրահաշվի բուլյան աստիճանի գաղափարը հայտնի է հանրահաշվական համակարգերի ընդհանուր տեսության մեջ [27]: Դրա ընդհանրացումն է հանդիսանում հանրահաշվի քվազիբուլյան աստիճանի հետևյալ գաղափարը: Դիցուք $L(+,\cdot)$-ը լրիվ կավար է, $\lambda = \{l_i \in L \mid i \in I\} \subseteq L$: Այդ դեպքում λ-ն կոչվում է օրթոգոնալ համակարգ, եթե $l_i \cdot l_j = 0$, որտեղ $i \neq j$:

Դիցուք $L(+,\cdot)$-ը լրիվ կավար է, $\lambda = \{l_i \in L \mid i \in I\} \subseteq L$ օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է անկախ, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$(\sum_{j \in J} l_j) \cdot (\sum_{k \in K} l_k) = 0,$$

որտեղ $J \cup K = I, J \cap K = \emptyset$: Լրիվ, լրացումներով կավարը կոչվում է քվազիբուլյան կավար, եթե նրա յուրաքանչյուր օրթոգոնալ համակարգ անկախ է: Ոչ բաշխական (նաև ոչ մոդուլյար) քվազիբուլյան կավարի օրինակ է N_5-ը:

Դիցուք L-ը քվազիբուլյան կավար է, $S = (Q; \Sigma)$-ն՝ հանրահաշիվ: Դիտարկենք արտապատկերումների հետևյալ բազմությունը՝

$$Q[L] = \{\nu : Q \to L \mid \nu(a) \cdot \nu(b) = 0, a \neq b, \sum_{a \in Q} \nu(a) = 1\} :$$

Ամեն մի $X \in \Sigma$ գործողության համար $Q[L]$-ի վրա սահմանենք հետևյալ բինար գործողությունը՝

$$X_L(\mu,\nu)(a) = \begin{cases} \sum_{a=X(b,c)} \mu(b) \cdot \nu(c), & \text{եթե } \exists b,c \in Q,\ \ X(b,c) = a, \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Նշանակենք $\Sigma_L = \{X_L \mid X \in \Sigma\}$: $S[L] = (Q[L]; \Sigma_L)$ հանրահաշիվը կոչվում է S-ի քվազիբուլյան աստիճան (կամ L-աստիճան): Եթե L-ը լրիվ բուլյան կավար է, ապա $S[L]$-ը կոչվում է S-ի բուլյան աստիճան:

Ատենախոսության մեջ առաջարկվում է n-զուգորդության գաղափարը: Այս գաղափարի մասնավոր դեպքը օգտագործվում է [37] գրքում: $(ab)c = 0 \Leftrightarrow a(bc) = 0$

պայմանին բավարարող գծային հանրահաշիվը կոչվում է զուգորդական ըստ զրոյի: Հեշտ է տեսնել, որ եթե ըստ զրոյի զուգորդական գծային հանրահաշվում ինչ որ n հատ տարրերի արտադրյալը հավասար է զրոյի փակագծերի ինչ որ դասավորության դեպքում, ապա այն հավասար կլինի զրոյի փակագծերի ցանկացած այլ դասավորության դեպքում:

Ատենախոսության մեջ օգտագործվում է Մալցևյան արտադրյալի [16, 15] հետևյալ դասական գաղափարը. դիցուք $\mathfrak{K}$-ը հանրահաշիվների դաս է, $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{K}$: Այն $(A;\Sigma)$ $\mathfrak{K}$-հարհաշիվների դասը, որոնց համար գոյություն ունի θ կոնգրուենցիա այնպիսին, որ $(A/\theta;\Sigma) \in \mathfrak{C}$ և բոլոր ենթահանրահաշիվ հանդիսացող θ-դասերը $\mathfrak{B}$-ից են, կոչվում է $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ենթադասերի Մալցևյան արտադրյալ և նշանակվում է՝ $\mathfrak{B} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{C}$:

Դիցուք $(A;\Sigma)$ և $(B;\Theta)$ հանրահաշիվներ են, $\varphi : A \to B$ և $\widetilde{\psi}$: $\Sigma \to \Theta$ արտապատկերումներ են այնպես, որ X-ը և $\widetilde{\psi}\ (X)$-ը ունեն նույն տեղայնությունը: $(\varphi, \widetilde{\psi})$ զույգը կոչվում է բիհոմոմորֆիզմ $(A;\Sigma)$ հանրահաշվից $(B;\Theta)$ հանրահաշվի մեջ, եթե՝

$$\varphi(X(a_1, ..., a_n)) = \widetilde{\psi}\ (X)(\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n)),$$

ցանկացած $X \in \Sigma$ գործողության համար և ցանկացած $a_1, ..., a_n \in A$ տարրերի համար [17]:

$(A;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է միավորներով, եթե ամեն մի $X \in \Sigma$ գործողություն ունի միավոր, որը կնշանակենք e_X-ով և տեղի ունի հետևյալ լրացուցիչ պայմանը՝

$$X(x, e_Y) = X(e_Y, x),$$

ցանկացած $X, Y \in \Sigma$ գործողությունների և ցանկացած $x \in A$ տարրի համար:

Օրինակ 4: Բերենք միավորներով $Q(+,\cdot)$ հանրահաշվի օրինակ, որտեղ $Q = \{a, b, c\}$ և $e_+ = c, e_\cdot = b$՝

$+$	**a**	**b**	**c**
a	a	a	a
b	a	a	b
c	a	b	c

$\cdot$	**a**	**b**	**c**
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	a

$(A;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է ֆիքսված միավորով եթե այն միավորներով է և $e_X = e_Y$ ցանկացած $X, Y \in \Sigma$ գործողությունների համար: Այդ դեպքում կնշանակենք՝ $e_\Sigma = e_X$:

Դիցուք $(A;\Sigma)$-ն հանրահաշիվ է, $a_1, ..., a_n \in A$ և $X_1, ..., X_{n-1} \in \Sigma$: $a_1a_2...a_n$ բառը (թերմը), որտեղ փակագծերը և $X_1, ..., X_{n-1}$ ֆունկցիոնալ փոփոխականները դասավորված են ինչ որ կերպ, կոչվում է արտադրյալ կամ $a_1, ..., a_n$ տարրերի n-արտադրյալ $X_1, ..., X_{n-1}$ գործողությունների նկատմամբ (կամ ուղղակի n-արտադրյալ):

Դիցուք $(A;\Sigma)$-ն հանրահաշիվ է, $n \geq 3$, $a_1, ..., a_n \in A$ և $X_1, ..., X_{n-1} \in \Sigma$: Այդ դեպքում $X_1(a_1, X_2(a_2, ..., X_{n-1}(a_{n-1}, a_n)...))$ արտադրյալը կոչվում է $a_1, ..., a_n$ տարրերի կանոնական n-արտադ- րյալ $X_1, ..., X_{n-1}$ գործողությունների նկատմամբ (կամ ուղղակի կանոնական n-արտադրյալ):

Ինդուկցիայով հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ գերզուգորդական հանրահաշվում ցանկացած արտադրյալ բերվում է կանոնական արտադրյալի (տեսքի):

$(A;\Sigma)$ միավորներով հանրահաշիվը կոչվում է n-զուգորդական ($n \geq 3$) ըստ միավորների, եթե ցանկացած $k \in \{3, 4, ..., n\}$-ի համար տեղի ունի հետևյալ պնդումը. այն փաստից, որ ինչ որ $a_1, ..., a_k$ տարրերի k-արտադրյալը ինչ որ $X_1, ..., X_{k-1} \in \Sigma$ գործողությունների նկատմամբ հավասար է ինչ որ միավորի, ապա $a_1, ..., a_k$ տարրերի բոլոր k-արտադրյալները $X_1, ..., X_{k-1} \in \Sigma$ գործողությունների նկատմամբ նույնպես հավասար են այդ նույն միավորին:

Դիցուք $(A;\Sigma)$-ն միավորներով հանրահաշիվ է: $a \in A$ տարրը կոչվում է հակադարձելի Σ-ի նկատմամբ, եթե գոյություն ունի $a' \in A$ այնպիսին, որ $X(a, a') = X(a', a) = e_X$ ցանկացած $X \in \Sigma$ գործողության համար: Այդ դեպքում a'-ը կոչվում է a-ի ֆիքսված հակադարձ: Ընդհանուր դեպքում ֆիքսված հակադարձը միակը չէ: a տարրի ֆիքսված հակադարձների բազմությունը կնշանակենք FI_a-ով: $(A;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է պսևդոխմբային գործողություններով հանրահաշիվ, եթե այն միավորներով է, և նրա յուրաքանչյուր տարր հակադարձելի է Σ-ի նկատմամբ: Ուստի պսևդոխմբային գործողություններով գերզուգորդական հանրահաշիվները խմբային գործողություններով հանրահաշիվներ են:

$(A;\Sigma)$ հանրահաշիվը կանվանենք n-զուգորդություն, եթե այն պսևդոխմբային գործողություններով է և n-զուգորդական է ըստ միավորների:

Այսուհետ ապենախոսությունում խոսք կգնա միայն 4-զուգորդությունների մասին:

Օրինակ 5: Բերենք $Q(+,\cdot)$ խմբային գործողություններով գերզուգորդական հանրահաշվի օրինակ, որտեղ $Q = \{a, b\}$՝

+	**a**	**b**
a	a	b
b	b	a

·	**a**	**b**
a	b	a
b	a	b

Օրինակ 6: Բերենք ֆիքսված միավորով հանրահաշվի օրինակ, որտեղ ամեն մի տարր ունի ֆիքսված հակադարձ՝

+	**a**	**b**	**c**
a	a	a	b
b	a	b	c
c	b	c	b

·	**a**	**b**	**c**
a	b	a	b
b	a	b	c
c	b	c	b

Այստեղ $FI_c = \{a, c\}$:

Երրորդ և չորրորդ գլուխները նվիրված են 4-զուգորդությունների և խմբային գործողություններով գերզուգորդական հանրահաշիվների կապի ուսումնասիրությանը: Ցույց է տրվում 4-զուգորդությունների և խմբային գործողություններով գերզուգորդական հանրահաշիվների միջև կապը Մալցևյան արտադրյալի միջոցով: Ապացուցվում է, որ խմբային գործողություններով գերզուգորդական հանրահաշվի քվազիբուլյան ապիճանը 4-զուգորդություն է:

Հինգերորդ գլխում ներմուծվում է g-հանրահաշվի գաղափարը, որոնք կազմում են հատուկ տիպի Ω-խմբերի [8, 10, 11, 28] բազմաձևություն:

Հայտնի է Արթինի հետևյալ թեորեմը տեղափոխական, զուգորդական և միավորով օղակի վրա սահմանված գծային հանրահաշվի համար. ալտերնատիվ գծային հանրահաշվում երկու տարրով ծնված ենթահանրահաշիվը զուգորդական է [37]: Հինգերորդ գլխում առաջարկվում է այս դասական արդյունքի մի լայն ընդհանրացում, օգտագործելով գերնույնության և կոնույնության գաղափարները:

Դիցուք Φ-ն տեղափոխական, զուգորդական և միավորով օղակ է: A բազմությունը կանվանենք g-հանրահաշիվ Φ օղակի նկատմամբ, եթե A-ի վրա սահմանված է Φ-մոդուլի կառուցվածք, և գոյություն ունի A-ի վրա սահմանված բինար գործողությունների Σ բազմություն, որը մոդուլային գործողությունների հետ կապված է հետևյալ հավասարություններով՝

$$X(a + b, c) = X(a, c) + X(b, c), \tag{1}$$

$$X(a, b + c) = X(a, b) + X(a, c), \tag{2}$$

$$\alpha(X(a, b)) = X(\alpha a, b) = X(a, \alpha b), \tag{3}$$

ցանկացած $a, b, c \in A$, $\alpha \in \Phi$, $X \in \Sigma$ տարրերի համար: Φ օղակի նկատմամբ որոշված A g-հանրահաշիվը կնշանակենք $A(+, \Sigma, \Phi)$-ով կամ ուղղակի A-ով:

Բերենք g-հանրահաշիվների մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 7: Դիցուք Z-ը ամբողջ թվերի օղակն է, X, Y-ը աբելյան խմբեր են, $M = Hom(X, Y)$, $\Sigma = Home(Y, X)$: Ամեն $\gamma \in \Sigma$ տարրի համար M-ի վրա սահմանենք հետևյալ բինար գործողությունը՝

$$\overline{\gamma}(a,b) \stackrel{def}{=} a\circ\gamma\circ b - b\circ\gamma\circ a,$$

որտեղ $(\circ)$-ը արտապատկերումների սովորական համադրույթն է: Հեշտ է ստուգել որ g-հանրահաշվի աքսիոմները տեղի ունեն, ուստի $M(+,\overline{\Sigma},Z)$-ը g-հանրահաշիվ է, որտեղ $\overline{\Sigma}=\{\overline{\gamma}|\gamma\in\Sigma\}$:

Օրինակ 8: Դիցուք P-ը դաշտ է, n-ը բնական թիվ է, $P^{n\times n}$-ը P-ի տարրերից կազմված n-րդ կարգի քառակուսային մատրիցների բազմությունն է, $+$-ը մատրիցների սովորական գումարումն է, $(\cdot)$-ը՝ մատրիցների սովորական բազմապատկումը: Սահմանենք մեկ այլ բինար գործողություն $P^{n\times n}$-ի վրա՝

$$A\circ B \stackrel{def}{=} A^T\cdot B :$$

Այդ դեպքում $P^{n\times n}(+,\{\cdot,\circ\},P)$-ը կլինի g-հանրահաշիվ: Նման ձևով $\circ$ գործողությունը կարող ենք սահմանել նաև հետևյալ կերպ՝

$$A\circ B \stackrel{def}{=} B^T\cdot A :$$

Դիցուք $A(+,\Sigma,\Phi)$-ը g-հանրահաշիվ է, $B\subseteq A$: B-ը կոչվում է $A(+,\Sigma,\Phi)$-ի ենթահանրահաշիվ, եթե այն փակ է մոդուլային գործողությունների և Σ-ի բոլոր գործողությունների նկատմամբ:

$(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է ձախ գերալտերնատիվ, եթե այն բավարարում է հետևյալ գերնույնությանը՝

$$X(x,Y(x,y)) = Y(X(x,x),y) : \tag{4}$$

$(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է աջ գերալտերնատիվ, եթե այն բավարարում է հետևյալ գերնույնությանը՝

$$X(x,Y(y,y)) = Y(X(x,y),y) : \tag{5}$$

$(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է գերալտերնատիվ, եթե այն ձախ և աջ գերալտերնատիվ է:

$A(+,\Sigma,\Phi)$ g-հանրահաշիվը կոչվում է գերալտերնատիվ, եթե $(A;\Sigma)$ հանրահաշիվը գերալտերնատիվ է:

Բերենք գերալտերնատիվ g-հանրահաշվի օրինակ՝

Օրինակ 9: Դիցուք $A(+,\cdot,P)$-ը ալտերնատիվ հանրահաշիվ է, իսկ c-ն նրա միջուկին ([3, 7, 37]) պատկանող տարր է, այսինքն՝

$$(x\cdot c)\cdot y = x\cdot(c\cdot y),$$

ցանկացած $x, y \in A$ փարրերի համար: A-ի վրա սահմանենք մեկ այլ բինար գործողություն հետևյալ կերպ՝

$$x \circ y \stackrel{def}{=} x \cdot c \cdot y :$$

Այդ դեպքում $A(+, \{\cdot, \circ\}, P)$-ը կլինի գերալփերնափիվ g-հանրահաշիվ:

$A(+, \Sigma, \Phi)$ g-հանրահաշիվը կոչվում է գերզուգորդական , եթե $(A; \Sigma)$ հանրահաշիվը գերզուգորդական է:

Դիցուք $A(+, \Sigma, \Phi)$-ն g-հանրահաշիվ է: Կափարենք հետևյալ նշանակումը՝

$$(x, y, z)_{X,Y} := X(x, Y(y, z)) - Y(X(x, y), z),$$

որտեղ $x, y, z \in A$, և $X, Y \in \Sigma$: Հետևաբար $(4), (5)$ պայմանները կարող ենք գրել հետևյալ կերպ՝

$$(x, x, y)_{X,Y} = 0, \forall x, y \in A, \forall X, Y \in \Sigma, \tag{6}$$

$$(x, y, y)_{X,Y} = 0; \forall x, y \in A, \forall X, Y \in \Sigma : \tag{7}$$

Դիցուք $A(+, \Sigma, \Phi)$-ն g-հանրահաշիվ է: Նշենք, որ $A(+, \Sigma, \Phi)$-ն գերզուգորդական է այն և միայն այն դեպքում, եթե փեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$(x, y, z)_{X,Y} = 0,$$

ցակացած $x, y, z \in A$, և $X, Y \in \Sigma$ փարրերի համար: Դիցուք $R(+, \Sigma, \Phi)$-ը g-հանրահաշիվ է, $A \subseteq R$: Կասենք A-ն $*$-ենթաբազմություն է, եթե փեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$(A, A, R)_{X,Y} = 0, \forall X, Y \in \Sigma,$$

այսինքն, փեղի ունի հետևյալ կոնույնությունը՝

$$X(a_1, Y(a_2, r)) = Y(X(a_1, a_2), r),$$

$\forall a_1, a_2 \in A, \forall r \in R$ փարրերի համար:

Տեղի ունի հետևյալ ընդհանուր թեորեմը՝

Թեորեմ 4: Դիցուք $R(+, \Sigma, \Phi)$-ը գերալփերնափիվ g-հանրահաշիվ է, $A, B, C \subseteq R$ ենթաբազմությունները ենթահանրահաշիվներ և $*$-ենթաբազմություններ են, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$(A, B, C)_{X,Y} = 0,$$

ցանկացած $X, Y \in \Sigma$ գործողությունների համար: Այդ դեպքում R-ի՝ A, B և C ենթահանրահաշիվներով ծնված ենթահանրահաշիվը գերզուգորդական է:

Գրականություն

[1] Barnes W. E., *On Γ-rings of Nobusawa*, Pacific J. Math. **3**(1966), pp. 411–422.

[2] Belousov V. D., *Systems of quasigroups with generalized identities*, Russian Math. Surveys, 20 (1965), pp. 73–143.

[3] Bruck R. H. and Kleinfeld E., The structure of alternative division rings, *Proceedings of the American Mathematical Society* (2) (1951) 878-890.

[4] Burris S., Sanakappanavar H. P., *A Course in Universal algebra*, Springer-Verlag, (1981).

[5] Church A., *Introduction to Mathematical Logic Vol.1*, Princeton University Press, Princeton, (1956).

[6] Denecke K. and Wismath Sh. L., *Hyperidentities and Clones*, Gordon and Breach Science, Publishers, (2000).

[7] Hentzel I. R. and Peresi L. A., The Nucleus of the Free Alternative Algebra, *Experimental Mathematics* **15**(4) (2006) 445-470.

[8] Higgins P.J., "Groups with multiple operators"Proc. London Math. Soc. , 6 (1956) pp. 366–416.

[9] Koppitz J. and Denecke K., *M-Solid Varieties of Algebras*, Springer, 2006.

[10] Kurosh A. G., *Lectures on General Algebra*, Chelsea, New York, (1963).

[11] Kurosh A. G., Multioperator rings and algebras, Uspekhi Mat. Nauk, **24**:1(145) (1969), 3–15; Russian Math. Surveys, **24**:1 (1969), 1-13.

[12] Loday J. L., *Dialgebras. Dialgebras and Related Operads.* Lect. Notes Math., Springer, Berlin (2001), pp. 7–66.

[13] Luh J., *On the theory of simple Γ-rings*, Michigan Math. J. **16**(1969), pp. 65–75.

[14] Mal'tsev A. I., *Some questions of the theory of classes of models*, Proceedings of the IVth All-Union Mathematical Congress, **1**, pp. 169–198 (1963), [in Russian].

[15] Mal'tsev A. I., *Algebraic systems*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New

York, (1973).

[16] Mal'tsev A. I., *On multiplication of classes of algebraic systems*, Sibirskij matematiceskij zurnal (8.2)(1967), pp. 346–365.

[17] Movsisyan Yu. M., *Introduction to the theory of algebras with hyperidentities*, Yerevan State University Press, (1986), [in Russian].

[18] Movsisyan Yu. M., *Hyperidentities and hypervarieties in algebras*, Yerevan State University Press, (1990), [in Russian].

[19] Movsisyan Yu. M., *Hyperidentities in algebras and varieties*, Uspekhi Mat. Nauk **53** (1), pp. 61–114 (1998), Russian Math. Surveys, **53** (1), pp. 57–108 (1998).

[20] Movsisyan Yu. M., *Hyperidentities and Related Concepts I*, Armen. J. Math. **2**, pp. 146–222 (2017).

[21] Movsisyan Yu. M., *Hyperidentities and Related Concepts. II*, Armen. J. Math. **4**, pp. 1–85, (2018).

[22] Movsisyan Yu. M., S. Davidov, Safaryan M., *Construction of free g-dimonoids*, Algebra Discrete Math., 18:1 (2014), pp. 138–148.

[23] Movsisyan Yu. M., *Hyperidentities and hypervarieties*, Scientiae Mathematicae Japonicae, 54, 3(2001), pp. 595–640.

[24] Movsisyan Yu. M., Biprimitive classes of algebras of second degree. Matematicheskie Issledovaniya **9**(1974), pp. 70–84, [in Russian].

[25] Movsisyan Yu. M., Yolchyan M. A., *On Idempotent and Hyperassociative Structures*, Lobachevskii J Math(2019), Volume 40, Issue 8, pp. 1113–1121.

[26] Nobusawa N., *On a generalization of the ring theory*, Osaka J. Math. **1**(1964), pp. 81–89.

[27] Pinus A. G., *Boolean constructions in universal algebra*, Uspekhi Mat. Nauk, 47(4),1992, pp. 145–180, Russian Math. Surveys, 47(4), (1992), pp. 157–198.

[28] Plotkin B. I., *Automorphisms groups of algebraic systems*, Nauka, M., (1966),

[in Russian].

[29] Saliy V. N., *Idempotent semigroups with the transitive commutativity property*, Russian Math. (Iz. VUZ) **46** (1), pp. 62–67, (2002).

[30] Sapir M., *Combinatorial algebra: Syntax and Semantix*, Springer, 2014.

[31] Sardar S. K., Gupta S., Shum K. P., Γ-*semigroups with unities and Morita equivalence for monoids*, European Journal of Pure and Applied Mathematics, 6(1) (2013), pp. 1–10.

[32] Sen M. K., *On* Γ-*semigroup*, In: Algebra and Its Applications (New Delhi, 1981). Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **91**(1984), pp. 301–308. Dekker, New York.

[33] Sen M. K., Saha N. K., *On* Γ-*semigroup-I*, Bull. Calcutta Math. Soc. **78**(1986), pp. 180–186.

[34] Sen M. K., Chattopadhyay S., Γ-*Semigroups*, A Survey, In Book: Algebra and Its Applications, (2016).

[35] Seth A., Γ-*group congruences on regular* Γ-*semigroups*, Int. J. Math. Math. Sci. **15(1)**(1992), pp. 103–106.

[36] Skornyakov L. A.(ed.), *General Algebra 2*, Nauka, M., (1991), [in Russian].

[37] Zhevlakov K. A., Slin'ko A. M., Shestakov I. P., Shirshov A. I., *Rings that are nearly associative*, Pure and Applied Mathematics, 104, Academic Press, Inc., New York-London, (1982).

[38] Zuchok A. V., *Relatively free doppelsemigroups*, Potsdam University Press, (2018).

[39] Zuchok A. V., Zhuchok Y. V., Koppitz J., *Free rectangular doppelsemigroups*, J. Algebra Appl. September (2019), DOI: 10.1142/SO219498820502059.

[40] Zhuchok A. V., Gorbatkov A. B., *On the structure of dimonoids*, Semigroup Forum, (2016), pp. 194–203.

Հեղինակի ատենախոսության թեմայի վերաբերյալ հրապարակումները

Հոդվածներ

1. Movsisyan Yu. M., Yolchyan M. A., On Idempotent and Hyperassociative Structures, Lobachevskii J Math 40(8), (2019), pp. 1113–1121.

2. Yolchyan M. A., Quasi-boolean power of algebras and idempotent algebras, Proceedings of the Yerevan State University, 53(3), (2019), pp. 170–176.

3. Yolchyan M., Movsisyan Y., Cayley-type theorems for g-dimonoids. Armenian Journal of Mathematics, 12(3), (2020), pp. 1-14.

Կոնֆերանսների թեզիսներ

4. "On idempotent and hyperassociative algebras", Yerevan State University, Conference Dedicated to the Memory of Academician Mkhitar Djrbashyan, October 22–24, 2018, Yerevan, Armenia.

5. "On hyperassociative algebras", Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, International Conference Mal'tsev Meeting 2018, p. 219, November 19–22, 2018, Novosibirsk, Russia.

6. "On idempotent and hyperassociative algebras", AAA97, 97th Workshop on General Algebra, p. 41, March 1–3, 2019, Vienna, Austria.

7. "Cayley-type theorem for g- dimonoids", Auburn University, Spring Southeastern Sectional Meeting, March 15–17, 2019, Auburn, AL, USA.

8. "Cayley-type theorem for g- dimonoids", University of Hawaii at Manoa, Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, March 22–24, 2019, Honolulu, HI, USA.

Abstract

The thesis is devoted to the study of structural problems of various classes of algebras using the concepts of hyperidentitiy and coidentity.

In the Chapter 1 we consider the problem of description of the structure of idempotent and hyperassociative algebras. The results we have are:

1. It was proved, that every idempotent and hyperassociative algebra is a semilattice structure of rectangular semigroups.

2. It was proved, that every idempotent and hyperassociative algebra with the transitive commutativity property satisfying the following hyperidentity of mediality:
$$Y(X(x,y),Y(z,x)) = Y(X(x,z),Y(y,x))$$
is a rectangular structure of semilattices.

3. It was proved that every idempotent and hyperassociative algebra, which is a rectangular structure of semilattices, satisfies the transitive commutativity property.

In the Chapter 2 we proved Cayley-type theorems for g-dimonoids, using the concepts of semigroup, act of semigroup and (l,r)-morphism of semigroup.

In the Chapter 3 we proved the following assertions using the concept of boolean and quasi-boolean power of algebra:

1. We proved that boolean power of rectangular algebra is rectangular.

2. We proved that boolean power of hyperassociative algebra is hyperassociative.

3. We proved that quasi-boolean power of idempotent algebra is idempotent.

In the Chapter 4 we intorduced the concept of 4-association using the concept of associative modulo zero linear algebra. We describe the class of 4-associations via Mal'tcev product. It is proved, that quasi-boolean power of hyperassociative algebra with group operations is a 4-association.

In the Chapter 5 we introduced the concept of g-algebra combining the concepts linear algebra and universal algebra. We proved the following Artin-type theorem for g-algebras: if g-algebra $R(+,\Sigma,\Phi)$ is hyperalternative, which satisfies the

following coidentity:

$$X(a, Y(b, c)) = Y(X(a, b), c),$$

then the subalgebra of $R(+, \Sigma, \Phi)$ generated by elements $a, b, c \in R$ will be hyperassociative.

Резюме

Диссертация посвящена структурным проблемам алгебр разных классов, связанных со сверхтождествами и котождествами.

В первой главе рассматривется проблема описания структуры идемпотентных и сверхассоциативных алгебр. Были получены следующие результаты:

- Доказывается, что каждая идемпотентная и сверхассоциативная алгебра является полурешеточной связкой прямоугольных полугрупп.

- Доказывается, что идемпотентная и сверхассоциативная алгебра удовлетворяющяя второму сверхтождеству медиальности обладает условием транзитивной коммутативности тогда и только тогда, когда является прямоугольной связкой алгебр с полурешеточными операциями.

Во второй главе доказываются теоремы типа Келли для g-димоноидов.

В третьей главе, используя понятия булевой и квазибулевой степени алгебры, доказываются следующие утверждения:

- Булева степень сверхассоциативной алгебры есть сверхассоциативная алгебра.

- Булева степень прямоугольной алгебры есть прямоугольная алгебра.

- Квазибулева степень идемпотентной алгебры есть идемпотентная алгебра.

В четвертой главе, исходя из понятия линейной алгебры ассоциативной по нулю, вводится понятия 4-ассоциации. Описывается класс 4-ассоциаций через произведение Мальцева. Доказывается, что квазибулева степень сверхассоциативной алгебры с групповыми операциями есть 4-ассоциация.

В пятой главе, объеденяя понятия линейной алгебры и универсальной алгебры, вводится понятие g-алгебры, для которого доказывается общяя теорема типа Артина.