ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԲԱԼԱՍԱՆՅԱՆ ԵՎԳԵՆԻՅԱ ՍԱՄՎԵԼԻ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԵՐԿՇԵՐՏԵՐԻ ԵՎ ԵՐԿՇԵՐՏ ՍԱԼԵՐԻ ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԼՐԻՎ ԵՎ ՈՉ ԼՐԻՎ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա.02.04 «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2020

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

БАЛАСАНЯН ЕВГЕНИЯ САМВЕЛОВНА

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ПОЛОС И ПЛАСТИН ПРИ ПОЛНОМ И НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

ЕРЕВАН – 2020

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ա.Մ. Խաչատրյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝
ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ս.Հ. Սարգսյան
ֆ.մ.գ.թ., պրոֆ. Մ.Վ. Բելուբեկյան
Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է *2020թ. նոյեմբերի 27-ին*, ժամը 14.00-ին նիստում
(հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2, alexkhach49@yandex.am):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ *2020թ. հոկտեմբերի 16-ին*

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ., Ա.Մ.Խաչատրյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА.

Научный руководитель: д.ф.м.н., проф. А.М.Хачатрян

Официальные оппоненты: член кор. НАН РА, д.ф.м.н., проф. С.О.Саркисян
к.ф.м.н., проф. М.В.Белубекян

Ведущая организация: Ереванский государственный университет

Защита диссертации состоится *27-ого ноября 2020г. в 14^{00} часов*
на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, alexkhach49@yandex.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан *16-ого октября 2020г.*

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физико-математических наук *А.М.Хачатрян*

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современной технике составными элементами большинства конструкций являются однослойные и многослойные стержни, пластины и оболочки. Они обычно состоят из анизотропных материалов, иногда с существенно различными физико-механическими свойствами. Контакт между контактирующими слоями, в зависимости от условий работы, может быть как полным, так и неполным. В связи с этим разработка эффективных методов расчета элементов таких конструкций является актуальной. При исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) балок, пластин и оболочек применяются различные методы. Одним из самых распространенных методов расчета тонкостенных конструкций является метод гипотез. Важный пример теории, построенной методом гипотез, представляет собой классическая теория, базирующаяся на предположениях типа гипотез Бернулли-Кирхгофа-Лява. Основные уравнения анизотропной упругой слоистой пластинки на основе гипотезы Кирхгофа-Лява для всего пакета в целом получены С.Г.Лехницким. Теория анизотропных слоистых оболочек на основе той же гипотезы для всего пакета в целом построена С.А. Амбарцумяном. В дальнейшем были предложены различные уточненные теории. Большинство научных работ по этой проблеме посвящено разработке методов расчета изотропных и ортотропных однослойных и многослойных балок, пластин и оболочек. Отметим также, что во всех этих теориях был рассмотрен лишь один класс задач - на лицевых поверхностях тонкого тела заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, т.е. условия первой краевой задачи теории упругости. Видимо потому, что эти гипотезы не применимы для решения задач, когда на лицевых поверхностях тонкого тела заданы условия второй или смешанных задач теории упругости.

Другой важный метод изучения напряженно-деформированных состояний балок, пластин и оболочек – метод разложения по параметру толщины. Этим методом все искомые величины представляются в виде произведения двух функций, первая из которых есть функция от поперечной координаты, вторая–от координат срединной поверхности. В итоге получаются краевые задачи общего вида и все группы неизвестных приходится определять одновременно.

Краевые задачи при асимптотическом методе имеют итерационный характер. Процесс их решения заключается в решении краевых задач, различающихся между собой только смыслом известных функций, входящих в правые части уравнений и в граничные условия. Сущность асимптотического метода заключается в представлении искомых величин в виде асимптотического ряда по степеням некоторого безразмерного физического или геометрического малого (или большого) параметра и получением рекуррентных формул для вычисления неизвестных.

Асимптотический метод определения НДС произвольных изотропных пластин и оболочек разработан А.Л.Гольденвейзером, его учениками П.Е.Товстиком, Ю.Д.Каплуновым, Х,Х.Рогачёвой, а также К.О. Фридрихсом, А.Е.Грином. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена Л.А.Агаловяном, которым, в частности показан эффективность асимптотического метода и для решения второй и смешанных краевых задач.

В теории анизотропных пластин и оболочек асимптотический метод получил развитие в работах Л.А. Агаловяна и его учеников Р.С. Геворкяна, А.М.Хачатряна, М.Л. Агаловяна, Л.Г. Гулгазарян, Л.С. Саркисян и др.

Изучению взаимодействия пластин и оболочек с различными физическими полями с использованием асимптотического метода посвящены работы С.А.Амбарцумяна, Г.Е.Багдасаряна, М.В.Белубекяна, С.О.Саркисяна,

Создание новых, прикладных методов расчета слоистых балок, пластин и оболочек представляет большой теоретический и практический интерес.

Диссертационная работа посвящена проблеме нахождения и изучения напряженно-деформированных состояний анизотропных слоистых полос и пластин при полном и неполном контактах между слоями. Материалы слоев обладают анизотропией самого общего вида. Асимптотическим методом построены решения внутренней задачи и типа пограничного слоя. Показана эффективность выбранного метода для расчета таких элементов конструкций.

Цель работы заключается в исследовании следующих вопросов:

- нахождение асимптотики решения и определения самого решения для краевых задач двухслойных анизотропных полос при полном и неполном контактах между слоями, на продольных сторонах которой заданы смешанные краевые условия теории упругости.
- нахождение асимптотики решения и определения самого решения для краевых задач двухслойных анизотропных пластин при полном и неполном контактах между слоями, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости.
- построении решений типа пограничного слоя и вывода трансцендентных уравнений для определения значений характерного параметра, обусловливающая скорость затухания этих решений для анизотропных слоистых полос и пластин.
- вывод для расчетных прикладных приложений рекуррентных формул для вычисления НДС анизотропных двухслойных полос и пластин при полном и неполном контактах между слоями, когда анизотропия общая.

Научная новизна. В работе рассмотрен новый класс задач для анизотропных двухслойных полос и пластин, когда анизотропия общая.

Найдены асимптотики и построены решения краевых задач анизотропных двухслойных полос и пластин, когда на продольных сторонах полосы и лицевых плоскостях пластины заданы смешанные условия теории упругости, а между слоями – условия полного или неполного контакта.

Асимптотическим методом выведены системы разрешающих уравнений и расчетные формулы для определения всех компонентов тензора напряжений и вектора перемещения анизотропных двухслойных полос и пластин.

Практическая значимость. Результаты исследований, приведенных в работе, расширяют область применимости асимптотического метода, позволяют решить новый класс задач для слоистых анизотропных тел. Результаты могут быть использованы в строительстве, в приборостроении, в конструкторских бюро по новой технике, в сейсмологии и других областях.

Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечены применением известных постановок задач, строгих математических методов, а также совпадением некоторых результатов вытекающих, как частные случаи из полученных автором, с ранее известными.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

- на Международной школе–конференции молодых ученых, посв. 70–летию НАН Армении, Цахкадзор, 1–4 октября, 2013г.
- на VIII Международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис – Степанакерт (22–26 сентября, 2014г.).
- на Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Армения, Цахкадзор, 02-07 октября, 2017г.
- на семинаре «Методы расчета тонкостенных систем» Института механики НАН Армении (2020г.);
- на общем семинаре Института механики НАН Армении (2020г.).
- на семинарах кафедры математики Арцахского государственного университета (2012–2020гг.).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 8 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 111 страницах, включая введение, три главы, заключение, библиографический список, содержащий 155 наименований цитируемой литературы и 2 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дается краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами, а также краткое содержание работы. В обзоре наиболее полно отражены исследования, в которых используются асимптотический или близкие к нему методы.

В первой главе асимптотическим методом интегрирования двухмерных уравнений теории упругости получены разрешающие уравнения и соотношения для определения и анализа напряженно-деформированных состояний двух-слойных анизотропных полос при полном и неполном контакте между слоями. Слои полос обладают анизотропией общего вида. Построены решения внутренней задачи и типа пограничного слоя. Выведено трансцендентное уравнение для определения значений характерного параметра, обусловливающая скорость затухания решений типа пограничного слоя. Рассмотрены численные примеры [1,3,8].

В первом параграфе главы сформированы краевые задачи для двухслойных анизотропных полос длиной l и шириной $2h$ при полном и неполном контакте между слоями. Считается, что слои имеют различные толщины h_k, постоянные упругости $a_{ij}^{(k)}$, k — номер слоя $\left(k=1,2\right)$.

Условия на продольных кромках задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}=\varepsilon^{-1}\sigma_y^{+}\left(x\right),\ u^{(1)}=\varepsilon^{-1}u^{+}\left(x\right),\ \text{при } y=h_1\\
&\sigma_{xy}^{(2)}=\sigma_{xy}^{-}\left(x\right),\quad v^{(2)}=\varepsilon^{-1}v^{-}\left(x\right),\ \text{при } y=-h_2
\end{aligned}\tag{1}$$

где $\varepsilon = h/l$ геометрический малый параметр.

На полосу действуют объемные силы с компонентами $F_x^{(k)}(x,y)$ и $F_y^{(k)}(x,y)$.

На линии $y=0$ раздела слоев задано одно из следующих условий контакта:

Задача 1. При $y=0$ заданы *условия полного контакта*:

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)},\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)},\ v^{(1)} = v^{(2)},\ \ u^{(1)} = u^{(2)} \tag{2}$$

Задача 2. При $y=0$ заданы следующие условия неполного контакта (*скользящий контакт*):

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, v^{(1)} = v^{(2)},\ \ u^{(2)} - u^{(1)} = f(x) \tag{3}$$

Задача 3. При $y=0$ заданы следующие условия неполного контакта (*закон распределения тангенциальных напряжений*):

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = f(x), v^{(1)} = v^{(2)} \tag{4}$$

Функция $f(x)$ в (3) и в (4) считается заданным и, в зависимости от выбранной модели контакта, может иметь различный вид.

Требуется найти решение уравнений теории упругости для анизотропной двухслойной полосы, когда на нижней и верхней сторонах полосы заданы условия (1), а на линии раздела слоев – условия полного или неполного контакта (2) – (4).

Во втором параграфе для решения сформулированных краевых задач преобразуются уравнения теории упругости анизотропного тела, вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/l,\quad \zeta = y/h$, а также безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l,\ V^{(k)} = v^{(k)}/l$. В результате получается содержащая малый параметр ε сингулярно возмущенная система, решение которой складывается из двух типов решений – внутреннего и типа пограничного слоя.

Решение внутренней задачи ищется в виде суммы

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)} \tag{5}$$

где $Q^{(k)}(\xi,\zeta)$ любое из напряжений или безразмерных перемещений, S – число приближений. Целые числа q_k подбираются так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}(\xi,\zeta)$:

$$q_k = 1 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)},\ q_k = 0 \text{ для } \sigma_{xy}^{(k)} \tag{6}$$

Вклад объемных сил в общее напряженное состояние будет соизмеримым со вкладом поверхностных сил, т.е. соответствующие слагаемые будут входить в уравнения исходного приближения, если

$$F_x^{(k)} = \varepsilon^{-1} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s F_x^{(k,s)}(x,y),\ \ F_y^{(k)} = \varepsilon^{-2} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s F_y^{(k,s)}(x,y) \tag{7}$$

Подставив (5) и (7) с учетом (6) , в преобразованную систему уравнений и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим новую систему, интегрируя которую относительно ζ , получим

$$V^{(k,s)} = v_0^{(k,s)} + v^{*(k,s)}(\xi,\zeta), U^{(k,s)} = u_0^{(k,s)} + u^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_x^{(k,s)}=\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{du_0^{(k,s)}}{d\xi}-\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\sigma_{y0}^{(k,s)}+\sigma_x^{*(k,s)},\sigma_y^{(k,s)}=\sigma_{y0}^{(k,s)}+\sigma_y^{*(k,s)}(\xi,\zeta), \tag{8}$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)}=\sigma_{xy0}^{(k,s)}-\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{d^2u_0^{(k,s)}}{d\xi^2}\zeta+\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\frac{d\sigma_{y0}^{(k,s)}}{d\xi}\zeta+\sigma_{xy}^{*(k,s)}$$

где величины со звездочками известны для каждого приближения s и определяются через данные предыдущих приближений.

Решение (8) содержит неизвестные функции $\sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi),\sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi),u_0^{(k,s)}(\xi),v_0^{(k,s)}(\xi)$ которые определяются в ходе удовлетворения граничных условий (1) и условий контакта (2) – (4).

В третьем параграфе рассмотрена плоская краевая задача для анизотропной двухслойной полосы при условиях (1) на продольных кромках и условиях полного контакта (2) между слоями (задача 1).

Удовлетворив условиям полного контакта (2), и граничным условиям (1), получим

$$\sigma_{xy0}^{(1,s)}=\sigma_{xy0}^{(2,s)},\ \sigma_{y0}^{(1,s)}=\sigma_{y0}^{(2,s)},\ v_0^{(1,s)}=v_0^{(2,s)},\ u_0^{(1,s)}=u_0^{(2,s)} \tag{9}$$

$$\sigma_{y0}^{(1,s)}=\sigma_y^{+(s)}-\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1),u_0^{(1,s)}(\xi)=u^{+(s)}-u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1),v_0^{(1,s)}=v^{-(s)}-v^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2)$$

$$\sigma_{xy0}^{(1,s)}=\sigma_{xy}^{-(s)}-\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\zeta_2\frac{d\sigma_{y0}^{(1,s)}}{d\xi}+\frac{1}{a_{11}^{(2)}}\zeta_2\frac{d^2u_0^{(1,s)}}{d\xi^2}-\sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2) \tag{10}$$

Окончательное решение внутренней задачи имеет вид:

$$\sigma_y^{(k,s)}=\sigma_y^{+(s)}-\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)+\sigma_y^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$U^{(k,s)}=u^{+(s)}+u^{*(k,s)}(\xi,\zeta)-u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1),\ V^{(k,s)}=v^{-(s)}+v^{*(k,s)}(\xi,\zeta)-v^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2)$$

$$\sigma_x^{(k,s)}=\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{du^{+(s)}}{d\xi}\zeta_2-\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\sigma_y^{+(s)}-\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{du^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}+\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)+\sigma_x^{*(1,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)}=\sigma_{xy}^{-(s)}-\left[\left(\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{d^2u^{+(s)}}{d\xi^2}+\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{d^2u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi^2}\right)+\left(\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi}-\right.\right. \tag{11}$$

$$\left.\left.-\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}\right)\right](\zeta-\zeta_2)-\left(\sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2)-\sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi,\zeta)\right)$$

Решение (11) внутренней задачи не содержит произвольных постоянных для удовлетворения торцевым условиям при $x=0,l$. Для удовлетворения этим условиям необходимо построить также решение типа пограничного слоя и представить общий интеграл задачи в виде суммы решений внутренней задачи и пограничных слоев, соответствующие краям $x=0,l$.

В четвёртом параграфе рассмотрена плоская краевая задача для анизотропной двухслойной полосы при условиях (1) на продольных кромках и при неполном контакте (3) (задача 2) .

Пользуясь общим решением и удовлетворив условиям (3), получим

$$\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)},\ \sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)},\ v^{(1,s)} = v^{(2,s)},\ u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + f^{(s)}(\xi),$$
$$f^{(0)}(\xi) = f(x/l),\ f^{(s)}(\xi) = 0, s > 0 \tag{12}$$

Удовлетворив также условиям (1) для неизвестных функций получим:

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1), u_0^{(1,s)} = u^{+(s)} - u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1),$$
$$u_0^{(2,s)} = u^{+(s)} - u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) + f^{(s)}(\xi), v_0^{(1,s)} = v_0^{(2,s)} = v^{-(s)}(\xi,\zeta) - v^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2)$$
$$\sigma_{xy0}^{(2,s)} = \sigma_{xy}^{-(s)} - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2) - \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\left(\frac{d\sigma_y^+}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}\right)\zeta_2 +$$
$$+\frac{1}{a_{11}^{(2)}}\left(\frac{d^2u_y^{+(s)}}{d\xi^2} - \frac{d^2u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi^2}\right)\zeta_2 + \frac{1}{a_{11}^{(2)}}\cdot\frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2}\zeta_2 \tag{13}$$

Более подробно рассмотрена модель нежесткого контакта. Принимается

$$u^{(2)} - u^{(1)} = \chi l h^{-1}\sigma_{xy}^{(1)}(x,0) \Rightarrow u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + \chi l h^{-1}\sigma_{xy0}^{(1,s)},\ (\chi = const) \tag{14}$$

Предельному случаю $\chi \to 0$ соответствует полный контакт, другому предельному случаю $\chi \to \infty$ – скользящий контакт ($\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0$).

Принимая условие (14), тем самым, мы задаем функцию $f(x) = \chi l h^{-1}\sigma_{xy}^{(1)}(x,0)$, что в свою очередь, последнее условие (12) превращает в условие

$$u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + \chi\sigma_{xy0}^{(1,s)} \tag{15}$$

Подставив (15) в (13) для определения $\sigma_{xy0}^{(2,s)}$ получим дифференциальное уравнение

$$\chi C_2\frac{d^2\sigma_{xy0}^{(2,s)}}{d\xi^2} + \sigma_{xy0}^{(2,s)} = p^{(s)}, \tag{16}$$

где $C_2 = -\zeta_2 / a_{11}^{(2)}$,

$$p^{(s)} = \sigma_{xy}^{-(s)} - \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\cdot\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} + \frac{1}{a_{11}^{(2)}}\cdot\frac{d^2u^{+(s)}}{d\xi^2}\zeta_2 - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2) +$$
$$+\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\cdot\frac{d^2\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi^2}\zeta_2 - \frac{1}{a_{11}^{(2)}}\cdot\frac{d^2u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi^2}\zeta_2 \tag{17}$$

Окончательное решение внутренней *задачи 2* получим после интегрирования дифференциального уравнения (16) с помощью формул (11) и (13).

В пятом параграфе рассмотрена задача для анизотропной двухслойной полосы при граничных условиях (1) и при неполном контакте между слоями (4).

Пользуясь общим решением (8) и удовлетворив условиям (4), получим

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)},\ v^{(1,s)} = v^{(2,s)},\ \sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)} = f^{(s)}(\xi) \tag{18}$$

$f^{(0)}(\xi) = f(x/l),\ f^{(s)}(\xi) = 0,$ при $s > 0$.

Удовлетворив граничным условиям (1), получим формулы

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}\left(\xi,\zeta_1\right), \quad \sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)} = f^{(s)}(\xi)$$
$$u_0^{(1,s)}\left(\xi\right) = u^{+(s)} - u^{*(1,s)}\left(\xi,\zeta_1\right), \quad v_0^{(2,s)} = v^{-(s)} - v^{*(2,s)}\left(\xi,\zeta_2\right) \tag{19}$$

где

$\sigma_{xy}^{-(0)} = \sigma_{xy}^{-}, \sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^{+}, u^{+(0)} = u^{+}, v^{-(0)} = v^{-}$, $\sigma_{xy}^{-(s)} = \sigma_y^{+(s)} = 0, u^{+(s)} = v^{-(s)} = 0$, при $s > 0$.

Для вычисления перемещения $u_0^{(2,s)}\left(\xi\right)$, получим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$C_2 \frac{d^2 u_0^{(2,s)}}{d\xi^2} = f^{(s)}(\xi) + p_2^{(s)} , \tag{20}$$

$$p_2^{(s)} = -\sigma_{xy}^{-(s)} + \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\zeta_2\left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}\left(\xi,\zeta_1\right)}{d\xi}\right) + \sigma_{xy}^{*(2,s)}\left(\xi,\zeta_2\right), \; C_2 = -\frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}$$

Если слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона, то

$$\sigma_{xy0}^{(1)} = \sigma_{xy0}^{(2)} = \chi\sigma_{y0}^{(1)}, \; f^{(s)}(\xi) = \chi\sigma_{y0}^{(1,s)} = \chi\left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}\left(\xi,\zeta_1\right)\right) \tag{21}$$

и, как следствие, из (19), с учетом (21), получим

$$C_2 \frac{d^2 u_0^{(2,s)}}{d\xi^2} = \overline{p}_2^{(s)} \tag{22}$$

$\overline{p}_k^{(s)} = \chi\left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}\left(\xi,\zeta_1\right)\right) + p_k^{(s)}, \chi = const$ – коэффициент трения.

В шестом параграфе рассмотрен вопрос определения напряженно-деформированного состояния типа пограничного слоя в плоской задаче для анизотропной двухслойной полосы, при полном контакте слоев [3]. На продольных сторонах полосы заданы однородные смешанные условия теории упругости:

$$\sigma_{yp}^{(1)} = 0, \; u_p^{(1)} = 0, \quad y = h_1, \quad \sigma_{xyp}^{(2)} = 0, \; v_p^{(2)} = 0, \quad y = -h_2 \tag{23}$$

Между слоями выполняется полный контакт, то есть:

$$u_p^{(1)} = u_p^{(2)}, \; v_p^{(1)} = v_p^{(2)}, \; \sigma_{xyp}^{(1)} = \sigma_{xyp}^{(2)}, \; \sigma_{yp}^{(1)} = \sigma_{yp}^{(2)}, \text{ при } y = 0 \tag{24}$$

Получены формулы для определения всех напряжений и перемещений. Выведено трансцендентное уравнение для определения значений, характерного параметра, обусловливающая скорость затухания решений типа пограничного слоя.

В седьмом параграфе рассмотрены иллюстрирующие примеры.

Во второй главе рассмотрен вопрос определения напряженно-деформированного состояния двухслойной анизотропной пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида. Предполагается, что на лицевых плоскостях пластины заданы смешанные краевые условия теории упругости, а на плоскости контакта слоёв – условия полного контакта. Общее решение задачи снова состоит из решения внутренней задачи и решения типа пограничного слоя. С применением асимптотического метода построены решения внутренней задачи. Выведены формулы для определения всех напряжений и перемещений. Построены решения типа пограничного слоя, выведено трансцендентное уравнение для определения значений, характерного параметра, обусловливающая скорость затухания решений типа пограничного слоя [4,7].

В первом параграфе главы сформирована краевая задача для двухслойной [4] анизотропной пластинки длиной a, шириной b и толщиной $2h$ при полном контакте между слоями. Считается, что слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, при этом, $2h = h_1 + h_2$.

Задача решается при следующих условиях на лицевых плоскостях пластинки

$$
\begin{aligned}
&u^{(1)} = \varepsilon^{-1} u^{+}(x,y), \quad v^{(1)} = \varepsilon^{-1} v^{+}(x,y), \quad \sigma_z^{(1)} = \varepsilon^{-1} \sigma_Z^{+}(x,y) \quad \text{при } z = h_1 \\
&\sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{xz}^{-}(x,y), \quad \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{-}(x,y), \quad w^{(2)} = \varepsilon^{-1} w^{-}(x,y) \quad \text{при } z = -h_2
\end{aligned}
\tag{25}
$$

и условиях полного контакта между слоями. Плоскость отсчета Oxy совпадает с плоскостью раздела слоев, параллельна лицевым плоскостям пластинки.

Условия полного контакта имеют вид

$$
\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)},\ \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)},\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)},\ u^{(1)} = u^{(2)},\ v^{(1)} = v^{(2)},\ w^{(1)} = w^{(2)} \ \text{при } z = 0 \tag{26}
$$

Краевые условия на торцах $x = 0, a$ и $y = 0, b$ не конкретизируются, ими обусловлен пограничный слой.

Требуется найти решение уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при условиях (25) на лицевых плоскостях пластинки и условиях полного контакта (26).

Во втором параграфе для решения поставленной краевой задачи в уравнениях теории упругости вводятся безразмерные переменные $\xi = x/l,\ \eta = y/l,\ \zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l, V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный размер пластинки $\left(l = \min(a,b)\right)$. В результате получим систему, содержащую малый параметр $\varepsilon = h/l\ (h << l)$ при производных, решение которой складывается из двух типов решений – внутреннего и типа пограничного слоя. Решение внутренней задачи ищется в виде суммы (5), где $Q^{(k)}(\xi,\eta,\zeta)$ любое из напряжений или безразмерных перемещений, k –номер слоя, S – число приближений. Целые числа q_k подбираются так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)$. Они установлены следующим образом

$$
q_k = 3 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)},\ q_k = 3 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \tag{27}
$$

Подставив (5) в преобразованные, введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости анизотропного тела, с учетом (27), получим новую систему для определения $Q^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)$, решив которую, получим

$$
\sigma_z^{(k,s)} = \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)},\ U^{(k,s)} = u^{(k,s)} + u^{*(k,s)},\ (u,v,w)
$$

$$
\sigma_x^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)},
$$

$$
\sigma_{xy}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \tag{28}
$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)} = -\left[L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)} + L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)} \right]\zeta - \left(a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right)\zeta +$$

$$+ \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)}, \qquad \left(1, x, \xi, u, a_3^{(k)}; 2, y, \eta, v, b_3^{(k)}\right)$$

где $L_{ij}\left(B_{ij}^{(k)}\right)$ известные дифференциальные операторы.

Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u_0^{(k,s)}, v_0^{(k,s)}, w_0^{(k,s)}$, зависящие от ξ, η определяются с помощью условий (25) и (26). Величины со звездочками, входящие в формулы (28), как обычно, известны для каждого приближения.

В третьем параграфе используя решение (28), удовлетворив условиям полного контакта (26), получим

$$\sigma_{z0}^{(s,1)} = \sigma_{z0}^{(s,2)},\ \sigma_{xz0}^{(s,1)} = \sigma_{xz0}^{(s,2)},\ \sigma_{yz0}^{(s,1)} = \sigma_{yz0}^{(s,2)},\ u_0^{(s,1)} = u_0^{(s,2)},\ v_0^{(s,1)} = v_0^{(s,2)},\ w_0^{(s,1)} = w_0^{(s,2)} \tag{29}$$

Удовлетворив поверхностным условиям (25) определяем неизвестные функции интегрирования:

$$u_0^{(1,s)} = u^{+(1,s)} - u^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right),\ v_0^{(1,s)} = v^{+(1,s)} - v^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right),$$

$$w_0^{(1,s)} = w^{-(2,s)} - w^{*(2,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_2\right),\ \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_z^{+(1,s)} - \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right),$$

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz}^{-(2,s)} + \left(L_{11}\left(B_{ij}^{(2)}\right)u^{+} + L_{12}\left(B_{ij}^{(2)}\right)v^{+} + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+}}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+}}{\partial \eta} \right)\zeta_2 - \tag{30}$$

$$-\left(L_{11}\left(B_{ij}^{(2)}\right)u^{*(1,s)}\left(\xi.\eta, \zeta_1\right) + L_{12}\left(B_{ij}^{(2)}\right)v^{*(1,s)}\left(\xi.\eta, \zeta_1\right) + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi.\eta, \zeta_1\right)}{\partial \xi} + \right.$$

$$\left. + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi.\eta, \zeta_1\right)}{\partial \eta} \right)\zeta_2 - \sigma_{xz}^{*(2,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_2\right),\ \left(x, \xi, u, a_3^{(k)}, 1; y, \eta, v, b_3^{(k)}, 2\right)$$

Окончательное решение внутренней задачи представится в виде:

$$U^{(k,s)} = u^{+(1,s)} + u^{*(k,s)} - u^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right), (u, v),\ W^{(k,s)} = w^{-(2,s)} + w^{*(k,s)} - w^{*(2,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_2\right)$$

$$\sigma_z^{(k,s)} = \sigma_z^{+(1,s)} + \sigma_z^{*(k,s)} - \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right),$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{+(1,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{+(1,s)}}{\partial \eta} + B_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{+(1,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(1,s)}}{\partial \xi} \right) + a_3^{(k)} \sigma_z^{+(1,s)} -$$

$$-B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right)}{\partial \xi} - B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right)}{\partial \eta} - B_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right)}{\partial \xi} \right) +$$

$$+\sigma_x^{*(k,s)}\left(\xi, \eta, \zeta\right) - a_3^{(k)} \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \zeta_1\right),$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{+(1,s)}}{\partial \xi} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{+(1,s)}}{\partial \eta} + B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{+(1,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(1,s)}}{\partial \xi} \right) + c_3^{(k)} \sigma_z^{+(1,s)} -$$
$$- B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial \xi} - B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial \eta} - \tag{31}$$
$$-B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial \xi} \right) + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi,\eta,\zeta) - c_3^{(k)} \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)} = \sigma_{xz}^{-(2,s)} - \left(L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right) u^{+(1,s)} + L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right) v^{+(1,s)} + a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta +$$
$$+ \left(L_{11}\left(B_{ij}^{(2)}\right) u^{+(1,s)} + L_{12}\left(B_{ij}^{(2)}\right) v^{+(1,s)} + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta_2 +$$
$$+ \left(L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right) u^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1) + L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right) v^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1) + a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial \xi} + \right.$$
$$\left. + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial \eta} \right) \zeta - \left(L_{11}\left(B_{ij}^{(2)}\right) u^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1) + L_{12}\left(B_{ij}^{(2)}\right) v^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1) + \right.$$
$$\left. + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial \eta} \right) \zeta_2 + \sigma_{xz}^{*(k,s)}(\xi,\eta,\zeta) - \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi,\eta,\zeta_2)$$
$$\left(x,\xi,u,a_3^{(k)},1; y,\eta,v,b_3^{(k)},2 \right)$$

Решение внутренней задачи (31) не содержит произвольных функций для удовлетворения условиям при торцах $x=0,a$ и $y=0,b$. Для удовлетворения этих условий необходимо построить также решение типа пограничного слоя и сопрягать уже известное решение внутренней задачи с решением для пограничных слоев.

В четвёртом параграфе приведено решение типа пограничного слоя для анизотропной прямоугольной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы следующие однородные условия [7]

$$u^{(1)}=0,\ v^{(1)}=0,\ \sigma_z^{(1)}=0 \ \text{ при } \ z=h_1,\ \sigma_{xz}^{(2)}=0,\ \sigma_{yz}^{(2)}=0,\ w^{(2)}=0 \ \text{ при } \ z=-h_2 \tag{32}$$

а между слоями выполняются условия полного контакта.

Для построения решения типа пограничного слоя вблизи края $x=0$ вводятся безразмерные координаты $t=x/h,\ \eta=y/l,\ \zeta=z/h$ и безразмерные перемещения. Решение полученных уравнений отыскивается в виде функций типа пограничного слоя

$$R_p^{(k)} = \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{\chi_p+s} R_p^{(k,s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda t)\,, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0 \tag{33}$$

где $R_p^{(k)}$ любая из компонент напряжений и перемещений k – ого слоя.

Установлены непротиворечивые значения для χ_p :

$$\chi_{\sigma_i} = \chi,\ \chi_{u_i} = \chi + 1\,, \tag{34}$$

где χ произвольное число, значение которой определится из условия сопряжения решения пограничного слоя с решением внутренней задачи. λ характеризует изменяемость напряжений и перемещений пограничного слоя.

Подставляя (33) с учетом (34), в преобразованные уравнения теории упругости и выразив все неизвестные величины пограничного слоя через напряжения $\sigma_{yzp}^{(k,s)}$ и $\sigma_{zp}^{(k,s)}$, получим для них формулы

$$\sigma_{xp}^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} + R_x^{(k,s-1)},\ \sigma_{xyp}^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} + R_{xy}^{(k,s-1)},\ \sigma_{xzp}^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} + R_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{yp}^{(k,s)} = -\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(\frac{a_{12}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{a_{25}^{(k)}}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} + \frac{a_{26}^{(k)}}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} + a_{23}^{(k)}\sigma_{zp}^{(k,s)} + a_{24}^{(k)}\sigma_{yzp}^{(k,s)}\right) + R_y^{(k,s-1)},$$

$$u_p^{(k,s)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} - \frac{A_{15}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} - \frac{A_{16}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} - \frac{A_{13}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(k,s)} - \frac{A_{14}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(k,s)} + R_u^{(k,s-1)}, \tag{35}$$

$$v_p^{(k,s)} = -\frac{A_{16}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} - \frac{A_{56}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} - \frac{A_{66}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} - \frac{A_{36}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(k,s)} - \frac{A_{46}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(k,s)} + R_v^{(k,s-1)},$$

$$w_p^{(k,s)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^4}\frac{\partial^3\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta^3} - \frac{A_{16}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} - \frac{1}{\lambda^2}\left(A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}\right)\frac{\partial\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} - \frac{2A_{15}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} -$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}\left(A_{14}^{(k)} + A_{56}^{(k)}\right)\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial\zeta} - \frac{A_{35}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(k,s)} - \frac{A_{45}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(k,s)} + R_w^{(k,s-1)},$$

где использованы следующие обозначения [3,5]

$$A_{ij}^{(k)} = \left(a_{22}^{(k)}a_{ij}^{(k)} - a_{2i}^{(k)}a_{2j}^{(k)}\right)\left(a_{22}^{(k)}\right)^{-1},\ \left(i, j = 1,3,4,5,6\right) \tag{36}$$

Величины $R_x^{(k,s)}, R_{xy}^{(k,s)}, ..., R_w^{(k,s)}$ известны и определяются по рекуррентным формулам.

Для определения же неизвестных функций $\sigma_{yzp}^{(k,s)}$ и $\sigma_{zp}^{(k,s)}$ получена система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_{11p}^{(k)}\sigma_{zp}^{(k,s)} + L_{12p}^{(k)}\sigma_{yzp}^{(k,s)} = R_1^{(k,s-1)}, \\ L_{12p}^{(k)}\sigma_{zp}^{(k,s)} + L_{22p}^{(k)}\sigma_{yzp}^{(k,s)} = R_2^{(k,s-1)}. \end{aligned} \tag{37}$$

Выражения дифференциальных операторов $L_{ijp}^{(k)}$ и обобщенных нагрузок $R_1^{(k,s-1)}, R_2^{(k,s-1)}$ приведены в диссертационной работе.

В пятом параграфе подробно рассмотрена задача для пластин из ортотропных материалов. Формулы для напряжений и перемещений (35) упрощаются и разделяются на две группы

$$\sigma_{xp}^{(k,0)} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^2},\ \sigma_{xzp}^{(k,0)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta},\ \sigma_{yp}^{(k,0)} = -\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(\frac{a_{12}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^2} + a_{23}^{(k)}\sigma_{zp}^{(k,0)}\right), \tag{38}$$

$$w_p^{(k,0)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^4}\frac{\partial^3\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^3} - \frac{1}{\lambda^2}\left(A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}\right)\frac{\partial\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta},\ u_p^{(k,s)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} - \frac{A_{13}^{(k)}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(k,s)}$$

и

$$\sigma_{xyp}^{(k,0)}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,0)}}{\partial\zeta}\ ,\ v_p^{(k,0)}=-\frac{a_{66}^{(k)}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(k,0)}}{\partial\zeta} \tag{39}$$

Оператор $L_{12p}^{(k)}$ тождественно превращается в нуль, а система уравнений (37) распадается на два уравнения, которым соответствуют решения типа *плоского* и *антиплоского погранслоев*. При этом, поверхностные условия и условия контакта также распадаются на две группы. При $s=0$ будем иметь:

а) *плоский пограничный слой*

$$A_{11}^{(k)}\frac{\partial^4\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^4}+\left(2A_{13}^{(k)}+A_{55}^{(k)}\right)\lambda^2\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^2}+A_{33}^{(k)}\lambda^4\sigma_{zp}^{(k,0)}=0 \tag{40}$$

$$\sigma_{zp}^{(1,0)}\Big|_{\zeta=\zeta_1}=0,\ \left.\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(1,0)}}{\partial\zeta^2}\right|_{\zeta=\zeta_1}=0,\ \left.\frac{\partial\sigma_{zp}^{(2,0)}}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_2}=0,\ \left.\frac{\partial^3\sigma_{zp}^{(2,0)}}{\partial\zeta^3}\right|_{\zeta=\zeta_2}=0, \tag{41}$$

б) *антиплоский пограничный слой*

$$A_{66}^{(k)}\lambda^2\frac{\partial^2\sigma_{yzp}^{(k,0)}}{\partial\zeta^2}+A_{44}^{(k)}\lambda^4\sigma_{yzp}^{(k,0)}=0 \tag{42}$$

$$\sigma_{yzp}^{(2,0)}\Big|_{\zeta=\zeta_2}=0,\ \left.\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(1,0)}}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_1}=0. \tag{43}$$

Краевые задачи (40)–(41) и (42)–(43) являются задачами на собственные значения и собственные функции. После того, как будут найдены собственные значения λ_n, соответствующие собственные функции можно будет определить с помощью формул (38) или (39).

В шестом параграфе приведено решение плоского пограничного слоя двухслойной ортотропной пластинки. Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (40)

$$A_{11}^{(k)}r^4+\left(2A_{13}^{(k)}+A_{55}^{(k)}\right)\lambda^2r^2+A_{33}^{(k)}\lambda^4=0 \tag{44}$$

может иметь корни трех типов в зависимости от значения $D^{(k)}=\left(2A_{13}^{(k)}+A_{55}^{(k)}\right)^2-4A_{11}^{(k)}A_{33}^{(k)}$.

Для реальных ортотропных материалов $D^{(k)}>0$ и уравнение (44) имеет, мнимые и отличны друг от друга корни

$$r_{1,2}^{(k)}=\pm iq_1^{(k)}\lambda,\quad r_{3,4}^{(k)}=\pm iq_2^{(k)}\lambda,\ \left(q_{1,2}^{(k)}\right)^2=\frac{\left(2A_{13}^{(k)}+A_{55}^{(k)}\right)\mp\sqrt{D^{(k)}}}{2A_{11}^{(k)}}<0, \tag{45}$$

Корням (45) соответствует следующее решение уравнения (40)

$$\sigma_{zp}^{(k,0)}=C_1^{(k,0)}\cos q_1^{(k)}\lambda\zeta+C_2^{(k,0)}\sin q_1^{(k)}\lambda\zeta+C_3^{(k,0)}\cos q_2^{(k)}\lambda\zeta+C_4^{(k,0)}\sin q_2^{(k)}\lambda\zeta\ , \tag{46}$$

где $C_i^{(k,0)}\ (i=1,2,3,4)$ неизвестные функции интегрирования.

Остальные величины плоского пограничного слоя по формулам (38) выражаются через $\sigma_{zp}^{(k,0)}$. Удовлетворение условиям полного контакта и однородным условиям (32) получена система однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $C_1^{(1,0)}, C_2^{(1,0)}, C_3^{(1,0)}, C_4^{(1,0)}$. Приравнивая определитель системы к нулю получим трансцендентное уравнение для определения λ.

$$\begin{aligned}
&a_1 \cos q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \cos q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_2 \sin q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \sin q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_3 \sin q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \cos q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_4 \sin q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_5 \sin q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \sin q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_6 \cos q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \cos q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \sin q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 + \\
&+a_7 \cos q_1^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_2^{(1)}\lambda\zeta_1 \sin q_1^{(2)}\lambda\zeta_2 \cos q_2^{(2)}\lambda\zeta_2 = 0
\end{aligned} \tag{47}$$

где коэффициенты a_i выражаются через коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$.

Трансцендентное уравнение (47) имеет бесконечное множество корней. Из комплексных корней нас интересуют корни с $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

В седьмом параграфе приведено решение антиплоского пограничного слоя. Для задачи однородного антиплоского пограничного слоя (42) – (43) корни характеристического уравнения

$$A_{66}^{(k)}\lambda^2 r^2 + A_{44}^{(k)}\lambda^4 = 0 \tag{48}$$

мнимые и им соответствует решение (им припишем дополнительный нижний индекс « a »):

$$\begin{aligned}
&\sigma_{yzpa}^{(k,0)} = C_1^{(k,0)} \cos\mu^{(k)}\lambda\zeta + C_2^{(k,0)} \sin\mu^{(k)}\lambda\zeta \ , \ \mu^{(k)} = \sqrt{\frac{A_{44}^{(k)}}{A_{66}^{(k)}}} = \sqrt{\frac{a_{44}^{(k)}}{a_{66}^{(k)}}} \\
&\sigma_{xypa}^{(k,0)} = -C_1^{(k,0)}\mu^{(k)} \sin\mu^{(k)}\lambda\zeta + C_2^{(k,0)}\mu^{(k)} \cos\mu^{(k)}\lambda\zeta \\
&v_{pa}^{(k,0)} = C_1^{(k,0)} \frac{a_{66}^{(k)}\mu^{(k)}}{\lambda} \sin\mu^{(k)}\lambda\zeta - C_2^{(k,0)} \frac{a_{66}^{(k)}\mu^{(k)}}{\lambda} \cos\mu^{(k)}\lambda\zeta
\end{aligned} \tag{49}$$

Удовлетворив условиям контакта и условиям (32) получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций. Приравнивая определитель системы к нулю получено трансцендентное уравнение для определения λ.

$$\mu tg\mu^{(1)}\lambda\zeta_1 tg\mu^{(2)}\lambda\zeta_2 + 1 = 0 \tag{50}$$

Решение пространственной краевой задачи есть сумма внутренней задачи и пограничных слоев

$$J = Q_{вн} + Q_p + Q_a \ , \tag{51}$$

где $Q_{вн}, Q_p, Q_a$ соответственно решение внутренней задачи, интегралы плоского и антиплоского пограничных слоев.

Представление (51) содержит достаточное количество неизвестных, позволяющие удовлетворить торцевым условиям.

В восьмом параграфе в качестве иллюстрации, рассмотрены частные примеры.

В третьей главе найдена асимптотика и из уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двухмерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения нормального напряжения и тангенциальных перемещений, на нижней – значения нормального перемещения и тангенциальных напряжений. На плоскости раздела слоев задан закон распределения разности тангенциальных перемещений или закон распределения тангенциальных напряжений [2,5,6].

В первом параграфе ставятся краевые задачи для двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы условия (25), а на плоскости раздела слоёв – условия неполного контакта.

Задача 1. На плоскости раздела слоев $z=0$ задан закон распределения разности тангенциальных напряжений

$$\sigma_z^{(1)}=\sigma_z^{(2)}, w^{(1)}=w^{(2)}, \sigma_{xz}^{(1)}=\sigma_{xz}^{(2)}=f_1(x,y), \sigma_{yz}^{(1)}=\sigma_{yz}^{(2)}=f_2(x,y) \qquad (52)$$

Задача 2. На плоскости раздела слоев $z=0$ задан закон распределения тангенциальных перемещений

$$\begin{gathered}\sigma_{xz}^{(1)}=\sigma_{xz}^{(2)},\ \sigma_z^{(1)}=\sigma_z^{(2)},\ \sigma_{yz}^{(1)}=\sigma_{yz}^{(2)},\ w^{(1)}=w^{(2)}\\ u^{(2)}=u^{(1)}+f_1(x,y),\ v^{(2)}=v^{(1)}+f_2(x,y)\end{gathered} \qquad (53)$$

Требуется найти решение внутренней задачи анизотропной двухслойной пластинки при условиях на лицевых плоскостях (25) и условиях неполного контакта слоев (52) или (53).

Во втором параграфе показано, что найденное общее решение уравнений пространственной задачи теории упругости (28) можно использовать для решения краевых задач (25), (52) и (25), (53).

В третьем параграфе найдено решение внутренней задачи анизотропной двухслойной пластинки. когда на плоскости раздела слоев задан закон распределения тангенциальных напряжений (52).

Используя общее решение (28), удовлетворив условиям контакта (52) и поверхностным условиям (25), определены перемещения $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$, неизвестные функции $\sigma_{z0}^{(k,s)}$, $w_0^{(k,s)}$, а также получена система дифференциальных уравнений с частными производными для определения $u^{(2,s)}$ и $v^{(2,s)}$

$$\begin{gathered}L_{11}(C_{ij}^{(2)})u^{(2,s)}+L_{12}(C_{ij}^{(2)})v^{(2,s)}+f_1^{(s)}=p_1^{(s)}\\ L_{12}(C_{ij}^{(2)})u^{(2,s)}+L_{22}(C_{ij}^{(2)})v^{(2,s)}+f_2^{(s)}=p_2^{(s)}\end{gathered} \qquad (54)$$

Здесь $p_1^{(k,s)}$ и $p_2^{(k,s)}$ обобщенные нагрузки.

В четвертом параграфе подробно рассмотрен случай взаимодействия слоев по закону сухого трения Кулона. Тогда

$$\sigma_{xz}^{(1)}=\sigma_{xz}^{(2)}=\chi_1\frac{l}{h}\sigma_z(x,y,0), \sigma_{yz}^{(1)}=\sigma_{yz}^{(2)}=\chi_2\frac{l}{h}\sigma_z(x,y,0) \qquad (55)$$

и, как следствие, получим

$$f_i^{(s)}(\xi,\eta)=\chi_i\left(\sigma_z^{+(s)}-\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)\right),\ i=1,2; \qquad (56)$$

Система уравнений (56) преобразуется к системе

$$L_{11}(C_{ij}^{(2)})u^{(2,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(2)})v^{(2,s)} = \bar{p}_1^{(s)}$$
$$L_{12}(C_{ij}^{(2)})u^{(2,s)} + L_{22}(C_{ij}^{(2)})v^{(2,s)} = \bar{p}_2^{(s)} \quad (57)$$

Обобщенные нагрузки определяются по формулам

$$\bar{p}_1^{(s)} = p_1^{(s)} - \chi_1\left(\sigma_z^{+(1,s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right) - \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right)\right)\ (1,2) \quad (58)$$

В пятом параграфе найден общий интеграл краевой задачи (25), (53). получены формулы для определения неизвестных функций интегрирования и окончательное решение внутренней задачи. Отметим, что найденные значения второго слоя содержат функции $f_i^{(s)}\left(\xi,\eta\right)$.

В шестом параграфе подробно рассмотрена модель нежесткого контакта:

$$u^{(2)} - u^{(1)} = \chi_1 \frac{l}{h}\sigma_{xz}\left(z=0\right),\ v^{(2)} - v^{(1)} = \chi_2 \frac{l}{h}\sigma_{yz}\left(z=0\right) \quad (59)$$

Из (59) следует

$$f_1^{(s)}\left(\xi,\eta\right) = \chi_1\sigma_{xz0}^{(k,s)},\quad f_2^{(s)}\left(\xi,\eta\right) = \chi_2\sigma_{yz0}^{(k,s)} \quad (60)$$

Получена система уравнений для определения $\sigma_{xz0}^{(2,s)}$ и $\sigma_{yz0}^{(2,s)}$..

$$\chi_1 L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\sigma_{xz0}^{(2,s)} + \chi_2 L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{xz0}^{(2,s)} = p_1^{(s)}$$
$$\chi_1 L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\sigma_{xz0}^{(2,s)} + \chi_2 L_{22}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{yz0}^{(2,s)} = p_2^{(s)}, \quad (61)$$

где $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ обобщенные нагрузки.

В седьмом параграфе рассмотрены частные решения задач для ортотропных пластин.

В заключении представлены основные результаты, полученные в диссертационной работе. Асимптотический метод интегрирования распространен для расчета одного класса смешанных задач для анизотропных двухслойных полос и пластин при полном и неполном контактах между слоями. Методом асимптотического интегрирования двухмерных и трёхмерных уравнений теории упругости получены одномерные и двухмерные уравнения, рекуррентные формулы и соотношения для определения и анализа напряженно-деформированных состояний двухслойных анизотропных полос и пластин, слои которых обладают анизотропией общего вида.

Считается, что на верхней линии полосы заданы нормальное напряжение и продольное перемещение, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение, а на верхней лицевой плоскости пластин заданы значения нормального напряжения и тангенциальных перемещений, на нижней – значения нормального перемещения и тангенциальных напряжений.

Построены решения как внутренней задачи, так и пограничного слоя. Рассмотрены конкретные примеры.

В диссертационной работе, в частности, получены следующие новые результаты.

1. Асимптотическим методом построено решение внутренней задачи двухслойных анизотропных полос, когда на одной из продольных кромок полосы заданы нормальное напряжение и тангенциальное перемещение а на другой –

нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение, между слоями имеется полный контакт.

2. Построено решение типа пограничного слоя для двухслойной анизотропной полосы при полном контакте слоев, когда на её продольных сторонах заданы однородные смешанные условия теории упругости. Выведено трансцендентное уравнение для определения значений характерного параметра, ахрактеризующая скорость затухания величины типа пограничного слоя.

3. Решена плоская краевая задача для анизотропной двухслойной полосы, когда на одной из продольных кромок полосы заданы нормальное напряжение и тангенциальное перемещение, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение. На линии контакта задан закон распределения разности тангенциального перемещения, в частности – модель нежесткого контакта.

4. Получено асимптотическое решение краевой задачи для анизотропной двухслойной полосы когда на одной из её продольных кромок заданы нормальное напряжение и тангенциальное перемещение, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение. На линии контакта задан закон распределения касательного напряжения, в частности – закон сухого трения Кулона.

5. Асимптотическим методом на основе уравнений пространственной задачи теории упругости построено решение внутренней задачи двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, а на плоскости контакта слоёв – условия полного контакта. Выведены формулы для определения всех компонент напряжений и перемещений.

6. Построено решение типа пограничного слоя для двухслойной анизотропной пластинки, когда на её лицевых плоскостях заданы однородные смешанные условия теории упругости, а на плоскости контакта слоёв – условия полного контакта. Выведено трансцендентное уравнение для определения значений параметра, характеризующая скорость затухания найденного решения. Показано, что для ортотропных материалов решение типа пограничного слоя распадется на плоский и антиплоский пограничные слои.

7. Асимптотическим методом из трёхмерных уравнений теории упругости выведены линейные двухмерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения нормального напряжения и тангенциальных перемещений, на нижней – значения нормального перемещения и тангенциальных напряжений. На плоскости раздела слоев задан закон распределения разности (скачка) тангенциальных перемещений.

8. Решена краевая задача для анизотропной двухслойной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения нормального напряжения и тангенциальных перемещений, на нижней – значения нормального перемещения и тангенциальных напряжений, а на плоскости раздела слоев– законы распределения тангенциальных напряжений, в частности, закон сухого трения Кулона.

9. Показана эффективность асимптотического метода при расчете анизотропных двухслойных полос и пластин, когда на продольных кромках полосы и на лицевых плоскостях пластины заданы смешанные условия теории упругости, а на линии (плоскости) раздела слоев – условия полного или неполного контакта.

ПУБЛИКАЦИИ

Основные результаты диссертационной работы изложены в следующих работах:

1. Баласанян Е.С. Асимптотическое решение двух смешанных краевых задач анизотропной двухслойной полосы Уч. записки АрГУ, 1/2015, С. 50-55.
2. Баласанян Е.С. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки при неполном контакте между слоями. Изв. НАН РА, Механика. 2018.Т.71. №1. С.47-60.
3. Баласанян Е.С. О пограничном слое двухслойной полосы. Уч. записки АрГУ, 1/2016, С. 37-42.
4. Баласанян Е.С., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки. –Труды межд. школы-конф. молодых ученых «Механика-2013», посвященной 70-летию НАН РА. Ереван, 2013. С. 88-92.
5. Баласанян Е.С., Петросян Г.А. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной пластинки при неполном контакте между слоями – Тр. VIII межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван-2014. С. 78-82.
6. Баласанян Е.С., Хачатрян А.М. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной пластинки при неполном контакте между слоями. Труды Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 02-07 октября, 2017. Цахкадзор, Армения. С.135-136.
7. Баласанян Е.С., Хачатрян А.М., Гулгазарян Л.Г. О решениях типа пограничного слоя в одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной пластинки. Изв. НАН РА. Механика. 2019. Т.72. №3. С.47-60.
8. Баласанян Е.С., Саркисян Н.С. Асимптотическое решение смешанной задачи для двухслойной полосы (слои взаимодействуют по закону сухого трения). Уч. записки АрГУ, 1/2020, С.51-58.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսությունում ասիմպտոտիկ մեթոդը օգտագործված է ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված երկշերտ հեծանների ու սալերի որոշ դասի խառը եզրային խնդիրների լուծման համար, շերտերի միջև կոնտակտի լրիվ և ոչ լրիվ պայմանների դեպքում: Առաձգականության տեսության հավասարումներից դուրս են բերված երկշերտ հեծանների ու սալերի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակները նկարագրող միաչափ և երկչափ հավասարումներ, ինչպես նաև ռեկուրենտ բանաձևեր բոլոր լարումների և տեղափոխությունների հաշվման համար: Ենթադրվում է, որ երկշերտերի երկայնական կողմերից և սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են նորմալ լարման և տանգենցիալ տեղափոխության (տեղափոխությունների), իսկ մյուս կողմի (մակերևույթի) վրա՝ նորմալ տեղափոխության և տանգենցիալ լարման (լարումների) արժեքները:

Կառուցված են ինչպես ներքին խնդրի, այնպես էլ սահմանային շերտի տիպի լուծումները:

Աշխատանքում բերված հետազոտությունների արդյունքները ընդլայնում են ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառության շրջանակները և հնարավորություն ընձեռում լուծելու խնդիրների նոր դաս բազմաշերտ բարակապատ մարմինների համար: Հետազոտության արդյունքները կարող են կիրառվել կոնստրուկտորական բյուրոներում, հիմքերի և հիմնատակերի կառուցման ժամանակ, սեյսմոլոգիայում և այլ բնագավառներում:

1. Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է անիզոտրոպ երկշերտի ներքին խնդիրը շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում, երբ երկայնական կողմերից մեկի վրա տրված են նորմալ լարման և տանգենցիալ տեղափոխության, իսկ մյուս կողմի վրա՝ նորմալ տեղափոխության և տանգենցիալ լարման արժեքները: Ստացված են բանաձևեր բոլոր լարումների և տեղափոխությունների հաշվման համար:

2. Անիզոտրոպ երկշերտի համար կառուցված է սահմանային շերտի տիպի լուծումը շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում, երբ երկայնական կողմերից վրա տրված են առաձգականության տեսության համասեռ խառը եզրային պայմաններ: Դուրս է բերված տրանսցենդենտ հավասարում սահմանային շերտի տիպի լուծման մարման արագությունը բնութագրող պարամոռերի արժեքները հաշվելու համար:

3. Գտնված է ասիմպտոտիկան և լուծված է առաձգականության տեսության խառը եզրային խնդիր անիզոտրոպ երկշերտի համար, երբ շերտերի հպման գծի վրա տրված է տանգենցիալ տեղափոխությունների տարբերության բաշխման օրենքը, մասնավորապես՝ ոչ կոշտ կոնտակտի մոդելը, իսկ երկշերտի երկայնական կողմերի վրա՝ առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ:

4. Լուծված է առաձգականության տեսության խառը եզրային խնդիր ան իզոտրոպ երկշերտի համար, երբ նրա երկայնական կողմերի վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերի հպման գծի վրա՝ շոշափող լարումների բաշխման օրենքը, մասնավորապես՝ կուլոնյան շփման օրենքը: Ստացված են բանաձևեր լարումների և տեղափոխությունների վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար:

5. Լուծված է ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված երկշերտ սալի համար խառը եզրային խնդիր, երբ սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են նորմալ լարման և տանգենցիալ տեղափոխությունների, իսկ մյուս մակերևույթի վրա՝ նորմալ տեղափոխության և տանգենցիալ լարումների արժեքները շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում: Ստացված են ռեկուրենտ բանաձևեր երկշերտ սալերի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակները որոշելու համար:

6. Կառուցված են անիզոտրոպ երկշերտ սալի սահմանային շերտի տիպի լուծումները, երբ սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված են համասեռ խառը եզրային պայմաններ՝ շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում: Դուրս են բերված տրանսցենդենտ հավասարումներ սահմանային շերտի լուծման մարման արագությունը բնութագրող պարամետրի արժեքների որոշման համար:

7. Առաձգականության տեսության եռաչափ հավասարումներից անիզոտրոպ երկշերտ սալի համար արտածված են մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ, երբ սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերի միջև՝ տանգենցիալ տեղափոխությունների տարբերությունների բաշխման օրենքները: Ստացված են բանաձևեր լարումների թենզորի և տեղափոխությունների վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար:

8. Ասիմպտոտիկ մեթոդով անիզոտրոպ երկշերտ սալի համար արտածված են գծային երկչափ մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներ, երբ սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ սալի շերտերի հպման հարթության վրա՝ շոշափող լարումների բաշխման օրենքը, մասնավորապես՝ կուլոնյան շփման օրենքը:

9. Ցույց է տրված ասիմպտոտիկ մեթոդի էֆեկտիվությունը ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված երկշերտի և երկշերտ սալի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը ուսումնասիրելիս, երբ երկշերտի երկայնական կողմերի և սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերի միջև՝ լրիվ կամ ոչ լրիվ կոնտակտի պայմաններ:

ABSTRACT

of the dissertation «Mixed boundary value problems for anisotropic two-layered stripes and plates with full and incomplete contact between the layers» E.S.Balasanyan.

The asymptotic integration method is widespread for calculating one class of mixed problems for anisotropic two-layer strips and plates with full and incomplete contacts between the layers. By the method of asymptotic integration of two-dimensional and three-dimensional equations of elasticity theory, one-dimensional and two-dimensional equations, recurrence formulas and relations for determining and analyzing the stress-stran state of two-layer anisotropic bands and plates, the layers of which have anisotropy of a general form, are obtained.

It is believed that the normal stress and longitudinal displacement are specified on the upper line of the strip, and the normal component of the displacement vector and tangential stress on the other, and the normal stress and tangential displacements are set on the upper face plane of the plates, and the normal displacement and tangential stresses are set.

On the line (plane) of the layer separation the conditions of full or incomplete contact are specified. Solutions of both the internal problem and solutions of the type of boundary layer are constructed. Concrete examples are considered.

In the dissertation, in particular, the following new results were obtained.

1. An asymptotic method is used to construct a solution to the internal problem of two-layer anisotropic strips, when the normal stress and tangential displacement are set on one of the longitudinal edges of the strip, and the normal component of the displacement vector and tangential stress on the other, there is full contact between the layers.

2. A solution is constructed of the type of boundary layer for a two-layer anisotropic strip with full contact of the layers, when uniform mixed conditions of elasticity theory are specified on its longitudinal sides. A transcendental equation is derived for determining the eigenvalues characterizing the decay rate of a boundary-layer type solution.

3. A plane boundary value problem for an anisotropic two-layer strip is solved, when the normal stress and tangential displacement are set on one of the longitudinal edges of the strip, and the normal component of the displacement vector and tangential stress on the other. On the line of contact, the law of distribution of the difference in tangential displacement is set, in particular, the model of non-rigid contact.

4. An asymptotic solution of the boundary value problem is obtained for an anisotropic two-layer strip when normal stress and displacement in the longitudinal direction are specified on one of its longitudinal edges, and the normal component of the displacement vector and the tangential stress on the other. On the contact line, the shear stress distribution law is specified, in particular, the Coulomb dry friction law.

5. Using the asymptotic method, from the equations of the spatial problem of the theory of elasticity, we construct a solution to the internal problem of a two-layer anisotropic plate, on the front planes of which mixed boundary conditions of the theory of elasticity are set, and on the plane of contact of the layers, conditions of complete contact. Formulas for determining all stresses and displacements are derived.

6. A solution is constructed of the type of boundary layer for a two-layer anisotropic plate, when uniform mixed conditions of elasticity theory are specified on its face planes, and conditions of full contact are set on the plane of contact of the layers. A transcendental equation for determining the eigenvalues characterizing the attenuation rate of the found solution is derived. It is shown that for orthotropic materials, a solution of the type of boundary layer will decompose into flat and antiplane boundary layers.

7. Asymptotic method, linear two-dimensional partial differential equations are derived from the three-dimensional equations of the theory of elasticity for calculating a two-layer anisotropic plate with normal stress and tangential displacements on the upper face plane and normal displacement and tangential stresses on the bottom. The distribution law of the difference of tangential displacements is specified on the plane of the layer separation.

8. The boundary-value problem is solved for an anisotropic two-layer plate, on the upper face plane of which the values of normal stress and tangential displacements are set, on the lower face - the values of normal displacement and tangential stresses, and on the plane of the layer separation - the laws of distribution of tangential stresses, in particular, the law dry friction pendant.

9. The efficiency of the asymptotic method is shown in the calculation of anisotropic bilayer strips and plates, when mixed conditions of elasticity theory are specified on the longitudinal edges of the strip and on the face planes of the plate, and conditions of full or incomplete contact are set on the line (plane) of the layer separation.