ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ ՄԵՏԱՔՍՅԱ ՀՈՎՆԱՆԻ

P-ԱԴԻԿ ԼԱՐԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ա.01.02 - «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, Մաթեմատիկական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

ԵՐԵՎԱՆ 2020

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АВЕТИСЯН МЕТАКСЬЯ ОВНАНОВНА

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ $p-$АДИЧЕСКИХ СТРУН

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения и Математическая физика"

Ереван 2020

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Ե Պ Հ մաթեմատիկայի մեխանիկայի ֆակուլտետի գիտական խորհրդի հ. 34 նիստում (29.10.2019թ):

Գիտական ղեկավար՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Խ. Ա. Խաչատրյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Վ. Ն. Մարգարյան

- գիտության դոկտոր (PhD)
Ա. Ժ. Նարիմանյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ - Խ. Աբովյանի անվան Հայկական Պետական Մանկավարժական Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2020թ. դեկտեմբերի 15-ին ժամը 15:00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե՝ ք.Երևան, 3750025, փ. Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Ե Պ Հ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2020թ. նոյեմբերի 4-ին:

050 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր՝ Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета факультета математики и механики ЕрГУ (№ 34, 29.10.2019г).

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук, профессор
Х.А. Хачатрян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук, профессор
В.Н. Маргарян

- доктор наук (PhD)
А.Ж. Нариманян

Ведущая организация –Армянский Государственный Педагогический Университет имени Х. Абовяна

Защита диссертации состоится 15-го декабря 2020г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском государственном университете.

Адрес: г. Ереван, 3750025, ул. Алек Манкуяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрГУ.

Автореферат разослан 4 -го ноября 2020г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Как известно, одним из современных и бурно развивающихся направлений математической физики является струнная теория. В основе создания теории единого поля лежит динамическая теория p-адических открытых и открыто-замкнутых струн (с длинной 10^{-33} см). Физические задачи, описывающие динамику p-адических открыто-замкнутых струн, сводятся к исследованию некоторых классов нелинейных псевдодифференциальных уравнений. Для конкретных модельных задач этой теории возникает необходимость изучения специальных классов граничных задач для интегральных уравнений типа свертки на всей прямой (или в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$) со степенной нелинейностью и с ядром, имеющим гауссовское распределение. Соответствующие граничные условия для указанных выше уравнений, как правило, задаются на $\pm\infty$. Эти предельные значения (на $\pm\infty$) являются частными решениями указанных нелинейных уравнений. В литературе такие (частные) решения принято называть вакуумами (см. [2], [4], [7]). Одной из главных задач в этом направлении является построение нетривиальных монотонных и ограниченных решений между вакуумами (между тривиальными решениями). Применение известных классических принципов о неподвижных точках к рассматриваемым уравнениям не дает желаемых результатов из-за сложной структуры исследуемых нелинейных операторов. Поэтому для каждого конкретного класса исследуемых граничных задач возникает необходимость в разработке новых подходов построения нетривиальных физических решений. Немаловажными являются также изучение интегральной асимптотики построенных решений и вопрос единственности в том или ином подклассе ограниченных и монотонных функций.

Впервые в 1997 году Л.Г. Арабаджяном исследовано интегральное уравнение типа Гаммерштейна с разностными четными ядрами на полуоси (см. [1]).

Далее Н.Б. Енгибаряном получен общий принцип неподвижной точки для некомпактных нелинейных операторов (см. [6]). Данный результат был применен для одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона.

В работах В.С. Владимирова, Я.И. Арефьевой, И.В. Воловича, Я.И. Воловича, Б. Драговича и Л.В. Жуковской были изучены вопросы существования непрерывных знакопеременных и ограниченных решений конкретных частных классов однородных нелинейных интегральных уравнений со степенной нелинейностью. В частности, в работе [2] предложен специальный итерационный процесс для построения численного решения. Однако вопрос единственности таких решений, а также вопрос исследования соответствующих уравнений с общими ядрами и общей (выпуклой или вогнутой) монотонной нелинейностью долгое время оставались открытыми. Следует отметить, что соответствующие линейные интегральные уравнения (и соответствующие системы таких уравнений) достаточно подробно были изучены научной школой Н.Б. Енгибаряна.

В 2018 г. в работе Х.А. Хачатряна (см. [13]) была рассмотрена вышеуказанная граничная задача со степенной нелинейностью и с общим суммируемым на $\mathbb{R}$ ядром, обладающим свойством четности и монотонности на полуоси. В данной работе доказаны теоремы существования и единственности знакопеременного монотонного непрерывного и ограниченного решения. Из этих результатов, как частный случай, следует теорема В.С. Владимирова и Я.И. Воловича о существовании роллинговых решений (см. [2]). Более того, в данной работе решена открытая проблема единственности таких решений.

Далее Х.А. Хачатряном была рассмотрена граничная задача для одномерного интегрального уравнения типа свертки с почти кубической нелинейностью на всей прямой (см. [11]). В этой работе с помощью специальных итерационных методов и априорных оценок (для интегральных операторов с суммарно-разностными ядрами) построено однопараметрическое семейство нетривиальных знакопеременных и ограниченных решений. В работах Х.А. Хачатряна исследована также интегральная асимптотика построенных решений (см. [11]-[13]). В частности, доказано, что разности между решением и ее пределами на $\pm\infty$ являются суммируемыми функциями.

Х.А. Хачатряном и его соавторами исследованы также более общие интегральные уравнения с монотонной и выпуклой нелинейностью (см. [11]-[14], [16], [17], [18]).

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию соответствующих систем нелинейных интегральных уравнений, а также вопросу построения нетривиальных решений для многомерных интегральных уравнений с общей выпуклой нелинейностью. Такие системы более естественно описывают соответствующий физический процесс в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн. Соответствующие дискретные аналоги указанных уравнений возникают также в математической теории пространственно-временного (географического) распространения эпидемии (см. [9], [15], [19], [20], [21]).

Исходя из вышеизложенных фактов можно считать, что тематика диссертационной работы является весьма актуальной.

Цель работы. Основной целью настоящей диссертации является:

- доказательство конструктивных теорем существования для некоторых систем интегральных уравнений с кубической нелинейностью на всей прямой.
- построение $n-$параметрических семейств нетривиальных ограниченных непрерывных решений для некоторых классов нелинейных многомерных интегральных уравнений типа свертки.
- изучение асимптотических свойств полученных решений в бесконечности.
- исследования соответствующих дискретных аналогов указанных уравнений.

Методы исследования. В работе использовались методы теории интегральных уравнений типа свертки, специальные итерационные методы, методы построения инвариантных конусных отрезков для соответствующих нелинейных операторов, методы теории функции вещественной переменной, методы нелинейного анализа, методы теории примитивных матриц.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, обоснованны строгими математическими доказательствами.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический и практический интерес. Они могут быть использованы в задачах динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, в математической теории пространственно-временного (географического) распространения эпидемии.

Основные положения, выносимые на защиту. На основе проведенных исследований автором выносятся на защиту следующие положения:

- доказаны теоремы существования нетривиальных ограниченных непрерывных решений для некоторых систем нелинейных интегральных уравнений со степенной нелинейностью,
- доказана теорема единственности в определенном классе ограниченных функций,

- доказано существование $n-$параметрического семейства нетривиальных ограниченных решений для одного класса нелинейных многомерных интегральных уравнений типа свертки и исследованы их асимптотическое поведение,

- построено покомпонентно положительное решение в пространстве l_1 для некоторых нелинейных бесконечных дискретных уравнений с матрицами Теплица-Ганкеля,

- доказаны теоремы существования и единственности для одного класса бесконечных систем нелинейных уравнений в теории распространения эпидемии.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на международной конференции "VIII Российско-Армянское Совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам" (МИАН, г. Москва, 2019г.), на годичной конференции Армянского математического союза, ЕрГУ, 2017г., на семинарах отдела методов математической физики Института Математики НАН Армении, на семинаре кафедры дифференциальных уравнений Ереванского Государственного Университета, на семинарах кафедры Высшей математики и физики Армянского Национального Аграрного Университета.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 4 печатных работах в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК и в двух сборниках тезисов конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 16 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, включающего в себе 86 наименований. Общий объем диссертации составляет 92 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена исследованию одной системы нелинейных интегральных уравнений типа свертки на всей прямой с кубической нелинейностью:

$$a_i f_i^3(x) + (1 - a_i) f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x - t) f_j(t)\, dt,\ x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (1)$$

относительно искомой непрерывной и ограниченной вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$ (T — знак транспонирования) в предположении, что $a_i \in (0, 1]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — числовые параметры, а ядра $K_{ij}(x)$ — определенные на множестве $\mathbb{R}$ четные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$K_{ij}(-x) = K_{ij}(x), \quad x \geq 0, \quad K_{ij}(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

$$\begin{gathered} K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R}), \quad a_{ij} \equiv \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(t) dt, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n \times n}, \\ r(A) = 1, \quad K_{ij}(x) \ \downarrow \ \text{по} \ x \ \text{на} \ \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \qquad (3)$$

Здесь $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A, а $C_M(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}$.

Исследуемая система (1) возникает в динамической теории $p-$адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов.

Следует отметить, что в том частном случае, когда $n = 1$, а ядро из себя представляет гауссовское распределение, соответствующее (1) скалярное уравнение с граничными условиями $f(\pm\infty) = \pm 1$ было исследовано в работе [7]. В этой работе были построены нетривиальные знакопеременные и ограниченные решения отмеченной задачи.

В недавней работе Х.А. Хачатряна (см. [11]) данный результат (при $n = 1$) был обобщен на случай общих четных и консервативных ядер K.

В §1.1 введены некоторые обозначения и приведены необходимые вспомогательные факты. Согласно теореме Перрона для матрицы A существует вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)^T$ с положительными координатами: $\eta_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \eta_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Обозначим

$$\eta_i^* \equiv \frac{\eta_i}{\min\limits_{1 \leq i \leq n} \eta_i} \geq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Нижеприведенная лемма играет ключевую роль для формулировки основного результата.

Лемма 1.1. *Пусть ядра* $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ *удовлетворяют условиям* (2) *и* (3). *Тогда имеют место следующие неравенства:*

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{-\infty}^{x}K_{ij}(t)e^{p_*t}\,dt+\ e^{2\,p_*\,x}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{x}^{\infty}K_{ij}(t)e^{-p_*t}\,dt\geq\left(1-\frac{a_i}{2}\right)\eta_i^*, \qquad x\in\mathbb{R}^+,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

где

$$p_*\equiv min\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}>0, \tag{7}$$

при этом числа p_i *определяются из следующих характеристических уравнений:*

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_{0}^{\infty}K_{ij}(t)e^{-pt}dt-\frac{2-a_i}{4}\cdot\eta_i^*=0,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{8}$$

Приведенная ниже лемма позволяет свести решение системы (1) со всей оси к решению соответствующей системы интегральных уравнений на положительной полуоси с суммарно-разностными ядрами:

Лемма 1.2. *Если вектор-функция* $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))^T$, $x\in\mathbb{R}^+$ *является непрерывным и ограниченным решением следующей системы нелинейных интегральных уравнений на* $\mathbb{R}^+$:

$$a_i\varphi_i^3(x)+(1-a_i)\varphi_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{\infty}\left(K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t)\right)\varphi_j(t)\,dt, \qquad i=1,2,\ldots,n,\ x\in\mathbb{R}^+, \tag{9}$$

то нечетное продолжение этого решения на $(-\infty,0)$

$$f_i(x)\equiv\begin{cases}\varphi_i(x), & \text{если } x\geq 0,\\ -\varphi_i(-x), & \text{если } x<0\end{cases}\quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{10}$$

является непрерывным и ограниченным решением системы (1).

В §1.2 доказывается один из основных результатов настоящей главы. Имеет место следующая

Теорема 1.1. *Пусть ядра* $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ *системы* (9) *удовлетворяют условиям* (2) *и* (3). *Тогда для всех* $a_i\in(0,1]$ $(i=1,2,...,n)$ *система* (9) *имеет неотрицательное (нетривиальное) непрерывное монотонно неубывающее и ограниченное решение* $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))^T$, *причем справедливы следующие двусторонние оценки:*

$$\varepsilon\eta_i^*(1-e^{-p_*x})\leq\varphi_i(x)\leq\eta_i^*,\quad i=1,2,\ldots,n,\quad x\in\mathbb{R}^+,$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \min\left\{\frac{1}{\eta_1^*}, \frac{1}{\eta_2^*}, \ldots, \frac{1}{\eta_n^*}\right\}.$$

Из теоремы 1.1 следует, что построенное решение системы (9) имеет предел при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi_i(x) \equiv \lambda_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда с использованием известного предельного соотношения для операции свертки мы приходим к следующей нелинейной системе алгебраических уравнений:

$$a_i\lambda_i^3 + (1 - a_i)\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

В §1.3, в частности, доказывается единственность решения системы (11) (см. лемма 1.3).

Доказывается также, что если ядро $K = (K_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$, дополнительно, обладает свойством симметрии: $K_{ij}(x) = K_{ji}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$ то решение системы (9) единственно в следующем классе функций:

$$\mathfrak{M} := \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)^T : \eta_j^* \geq \varphi_j(x) \geq \varepsilon\eta_j^*(1 - e^{-p_* x}),$$

$$x \geq 0,\ \lambda_j - \varphi_j \in L_1(\mathbb{R}^+),\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

В параграфах 1.4 и 1.5 с применением методов теории функций вещественной переменной, с помощью некоторых априорных оценок доказываются следующие теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1.1. Тогда, если, дополнительно, для элементов матрицы* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ *имеет место условие:*

$$\frac{\min\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}}{\max\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}} > \frac{1}{\sqrt{3}},$$

то для всех $a_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *система* (1) *обладает однопараметрическим семейством непрерывных монотонно неубывающих и ограниченных решений* $\{f_c(x)\}_{c\in\mathbb{R}}$: $f_c(x) = (f_{c1}(x), f_{c2}(x), \ldots, f_{cn}(x))^T$, *причем*

$$\lim_{x\to+\infty} f_{ci}(x) = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где числа $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ *определяются из системы алгебраических уравнений* (11) *единственным образом.*

Теорема 1.3. *При условиях теоремы 1.2, если, дополнительно,*

$$m(K_{ij}) \equiv \int\limits_0^\infty xK_{ij}(x)dx < +\infty,\ i,j = 1,2,\ldots,n,$$

то система (1) *обладает однопараметрическим семейством непрерывных монотонно неубывающих и ограниченных решений* $\{f_c(x)\}_{c\in\mathbb{R}}$, *причем*

$$\lambda \pm f_c \in L_1^{\times n}(\mathbb{R}^{\mp}),$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T-$ *единственное решение системы* (11).

Вторая глава диссертации посвящена исследованию следующего класса многомерных нелинейных интегральных уравнений типа свертки:

$$\begin{gathered} Q(\varphi(x_1,...,x_n)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(x_1-t_1)...K_n(x_n-t_n)\varphi(t_1,...,t_n)dt_n...dt_1, \\ (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n := \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times...\times\mathbb{R} \end{gathered} \tag{12}$$

относительно искомой вещественной измеримой и ограниченной на $\mathbb{R}^n$ функции $\varphi(x_1,...,x_n)$. Здесь $Q(u)$ — нечетная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, для которой существуют числа $\eta > 0,\ \xi \in (0,\eta)$ и $\alpha \in (0,1)$ такие, что

A) $Q(u)\uparrow$ на отрезке $[0,\eta]$,

B) $0 \le Q(u) \le \alpha u$ при $u \in [0,\xi]$,

C) $Q(\eta) = \eta$, причем число η является первым положительным корнем функционального уравнения $Q(u) = u$.

Ядра $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$ определены на множестве $\mathbb{R}$ и обладают следующими свойствами:

$$K_i(x) > 0, \quad x\in\mathbb{R}, \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_i(x)dx = 1, \quad i = 1,2,...,n, \tag{13}$$

$$\begin{gathered} K_i \in L_\infty(\mathbb{R}), \quad K_i(-x) = K_i(x),\ x \ge 0, \\ K_i(x)\downarrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+ := [0,+\infty), \quad i = 1,2,...,n, \end{gathered} \tag{14}$$

$$m_i := \int\limits_0^\infty xK_i(x)dx < +\infty, \quad i = 1,2,...,n\ , \tag{15}$$

где $L_\infty(\mathbb{R})$ — пространство существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}$.

Уравнение, соответствующее системе (12) при $n = 1$, имеет непосредственное применение в p-адической теории открыто-замкнутых струн. Это уравнение исследовалось, в частности, в [2], [3] и [5]. В работе [2] рассматривался частный случай, когда

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},\ Q(u) = u^p,\ p > 2 - \text{нечетное число}.$$

Этим уравнением описывается динамика (роллинг) p-адических струн для скалярного поля тахионов. В работе [7] уравнение (12) было исследовано в том случае, когда

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{\frac{-x^2}{4a}},\ Q(u) = au^3 + (1-a)u,\ a \in (0,1].$$

В недавних работах Х.А. Хачатряна (см. [16], [17], [18]) уравнение (12) при $n = 1$ было изучено с общим ядром $K(x)$ и с общей нелинейностью $Q(u)$. Результаты этих работ обобщили соответствующие результаты работ В.С. Владимирова и Л.В. Жуковской.

В §2.1 настоящей диссертации приведены некоторые вспомогательные факты, которые играют важную роль для формулировки основного результата главы 2.

Наряду с уравнением (12) рассматривается следующее нелинейное уравнение с суммарно-разностным ядром на множестве $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times ... \times \mathbb{R}^+ :$

$$Q(f(x_1,...,x_n)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\prod_{i=1}^{n} (K_i(x_i - t_i) - K_i(x_i + t_i)) \right) f(t_1,...,t_n) dt_n ... dt_1,$$
$$(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \tag{16}$$

относительно искомой непрерывной на $\mathbb{R}^n_+$ функции $f(x_1,...,x_n)$.

С помощью следующей леммы уравнение (12) сводится к уравнению (16).

Лемма 2.1. *Пусть $f(x_1,...,x_n)$ – непрерывное на $\mathbb{R}^n_+$ решение уравнения (16) и*

1) $$f_1(x_1,...,x_n) = \begin{cases} f(x_1,...,x_n), & \text{если } (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \\ -f(-x_1,x_2,...,x_n), & \text{если } \ x_1 < 0,\ (x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+; \end{cases}$$

2) $$f_2(x_1,...,x_n) = \begin{cases} f_1(x_1,...,x_n), & \text{если } x_1 \in \mathbb{R},\ (x_2,x_3,...,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+, \\ -f_1(x_1,-x_2,...,x_n), & \text{если } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 < 0, \\ & (x_3,...,x_n) \in \mathbb{R}^{n-2}_+; \end{cases}$$

. . . .

$$\textbf{n-1)}\quad f_{n-1}(x_1,...,x_n)=\begin{cases} f_{n-2}(x_1,...,x_n), & \text{если } (x_1,...,x_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-2},\\ & \qquad x_{n-1}\in\mathbb{R}^+,\ x_n\in\mathbb{R}^+,\\ -f_{n-2}(x_1,...x_{n-2},-x_{n-1},x_n),\ \text{если} & \\ \qquad (x_1,...,x_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-2}, & x_{n-1}<0,\ x_n\in\mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Тогда, если Q — непрерывная и нечетная функция на $\mathbb{R}$, а ядра $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$ удовлетворяют условиям (13)–(15)*, то нечетное продолжение функции $f_{n-1}(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменной x_n на $(-\infty,0)$:*

$$\textbf{n)}\quad \varphi(x_1,...,x_n)=\begin{cases} f_{n-1}(x_1,...,x_n), \text{если } (x_1,...,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1},\ x_n\in\mathbb{R}^+,\\ -f_{n-1}(x_1,...,-x_n), \text{если } (x_1,...,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1},\ x_n<0, \end{cases}$$

будет непрерывным на $\mathbb{R}^n$ решением уравнения (12).

В этом параграфе рассматриваются также следующие характеристические уравнения:

$$\int\limits_0^\infty K_i(t)e^{-pt}dt=\frac{\alpha^{\frac{1}{n}}}{2},\ \ i=1,2,...,n \tag{17}$$

и доказывается

Лемма 2.2. *Пусть имеют место условия* (13)–(15)*. Тогда для каждого $i\in\{1,2,...,n\}$ характеристические уравнения* (17) *имеют единственные положительные решения: $p_i>0$.*

В §2.2 для уравнения (16) доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.1. *При условиях* (13)–(15) *и $A)-C)$ уравнение* (16) *обладает нетривиальным и ограниченным решением $f(x_1,x_2,...,x_n)$, причем*

$$\xi(1-e^{-p_1x_1})(1-e^{-p_2x_2})...(1-e^{-p_nx_n})\le f(x_1,x_2,...,x_n)\le\eta,\\ (x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}_+^n, \tag{18}$$

где числа $p_1,p_2,...,p_n$ однозначно определяются из характеристических уравнений (17)*, а числа ξ и η — из условий, налагаемых на функцию Q (см. $A)-C)$).*

Теорема 2.2. *При условиях теоремы 2.1 построенное решение уравнения* (16) *обладает свойством монотонности по каждому аргументу и является непрерывным на $\mathbb{R}_+^n$ по совокупности своих аргументов.*

В §2.3 доказывается следующий основной результат главы 2.

Теорема 2.3. *При условиях* (13)–(15) *и* $A) - C)$ *уравнение* (12) *обладает* n*-параметрическим семейством нетривиальных непрерывных ограниченных по каждому аргументу монотонных решений* $\{F_{c_1,c_2,\dots,c_n}(x_1,x_2,...,x_n)\}_{c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}}$*, причем*

$$\lim_{|x_1|\to+\infty}\lim_{|x_2|\to+\infty}\dots\lim_{|x_n|\to+\infty}F_{c_1,c_2,\dots,c_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{cases}\quad \eta, & \text{если } l>0,\\ -\quad \eta, & \text{если } l<0,\end{cases}$$

$$\forall c_1,c_2,...,c_n\in\mathbb{R},\quad \text{где}\quad l:=x_1x_2...x_n.$$

Замечание 2.3. *Прямой проверкой можно убедиться, что уравнение* (12) *наряду с решениями* $\{F_{c_1,c_2,\dots,c_n}(x_1,x_2,...,x_n)\}_{c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}}$ *обладает также решениями вида* $\Phi_{c_1,c_2,\dots,c_n}(x_1,x_2,...,x_n)=-F_{c_1,c_2,\dots,c_n}(x_1,x_2,...,x_n)$*. Этот факт сразу следует из нечетности функции* Q.

В §2.4 доказывается интегральная асимптотика для построенного решения в случае $n=2$:

Теорема 2.4. *При условиях* (13)–(15), $A), C)$ *и*

$$0\le Q(u)\le\frac{au^3}{\eta^2}+(1-a)u,\quad u\in[0,\eta]$$

решение $\varphi(x_1,x_2)$ *уравнения* (12) *при* $n=2$ *обладает следующими свойствами:*

$$\eta\pm\varphi(+\infty,x_2)\in L_1(\mathbb{R}^{\mp}),\ \eta\pm\varphi(-\infty,x_2)\in L_1(\mathbb{R}^{\pm}),$$

$$\eta\pm\varphi(x_1,+\infty)\in L_1(\mathbb{R}^{\mp}),\ \eta\pm\varphi(x_1,-\infty)\in L_1(\mathbb{R}^{\pm}).$$

В §2.5 приводятся также частные примеры уравнений (12), имеющие самостоятельный теоретический и прикладной интерес.

Третья глава диссертации состоит из двух частей.

Первая часть третьей главы посвящена изучению одного класса нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица-Ганкеля. Рассматривается бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений вида:

$$x_n=\sum_{j=0}^{\infty}a_{n-j}h_j\left(x_j\right)+\sum_{j=1}^{\infty}a_{n+j}h_j^*\left(x_j\right),\ n=0,1,2\dots \tag{19}$$

относительно искомого бесконечного вектора $\mathrm{x}=(x_0,x_1,x_2,\dots x_n,\dots)^T$ (T— знак транспонирования.)

В системе (19) $A \equiv (a_{n-j})_{n,j=0}^{\infty}$ и $B \equiv (a_{n+j})_{n,j=0}^{\infty}$ — бесконечные матрицы Теплица и Ганкеля соответственно. Элементы матриц удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{-j} = a_j\,; \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\, a_n > 0,\, \forall\, n \in \mathbb{Z}, \tag{20}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 a_j < +\infty, \tag{21}$$

$$a_{n+1} < a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{22}$$

а $h_j(u)$ и $h_j^*(u)$ — функции со следующими свойствами:
существуют числа $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ и $\eta \in (0,1)$ такие, что

i_1) при всяком фиксированном $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функции $h_j(u)$ и $h_j^*(u) \uparrow$ по u на отрезке $[P_j(\eta), 1]$, где

$$P_j(\eta) \equiv \eta \sum_{m=j+1}^{\infty} a_m, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{23}$$

i_2) $h_j, h_j^* \in C[P_j(\eta), 1], \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$

i_3) выполняются следующие неравенства:

$$0 \le h_j(u) \le 1 - (1-u)^{\alpha},\, u \in [P_j(\eta), 1], \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

$$h_j^*(P_j(\eta)) \ge \eta, \quad h_j^*(1) \le 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Указанная система уравнений возникает в динамических задач теории переноса излучения в спектральных линиях. Такие системы имеют также применения в дискретных задачах кинетической теории газов и в теории p-адических струн.

В случае, когда $\nu(A) \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} j a_j < 0$ и выполнены условия (21), (22) при различных ограничениях на $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{h_j^*(u)\}_{j=0}^{\infty}$, система (19) исследовалась в работах [8], [10], [22].

Сначала §3.1 наряду с системой (19) рассматривается следующая бесконечная система со степенной нелинейностью:

$$s_n = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{n-j} - a_{n+j}) s_j^{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{26}$$

относительно искомого бесконечного вектор $S = (s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots)^T$, где последовательность $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (20)–(22). Для системы (26), имеющей также самостоятельный интерес, доказываются следующие вспомогательные теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность* $\{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (20)–(22) *и* $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$. *Тогда система* (26) *имеет покомпонентно неотрицательное решение* $S = (s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots)^T$ *в пространстве ограниченных последовательностей. Более того, каждая координата вектора* S *удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$\left(\frac{1+a_0}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\tau_n^*}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \tau_n^*} \leq s_n \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{27}$$

$$s_n \geq \left(\frac{1+a_0}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\tau_{n_0}^*}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \tau_n^*} > 0. \tag{28}$$

Здесь $\{\tau_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ *является нетривиальным неотрицательным решением уравнения*

$$\tau_n = \frac{2}{1+a_0} \sum_{j=n}^{\infty} (a_{j-n} - a_{j+n})\tau_j, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

и $\tau_{n_0}^* > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.2. *При условиях теоремы 3.1 построенное решение* S *обладает следующим дополнительным свойством:* $\overline{\mathbf{1}} - S \in l_1$, *где* $\overline{\mathbf{1}} = (1, 1, \ldots 1, \ldots)$.

В §3.2, используя теоремы 3.1 и 3.2, доказывается один из основных результатов главы 3, а именно, справедлива следующая

Теорема 3.3. *При условиях* (20)–(22), $i_1) - i_3)$ *система* (19) *имеет покомпонентно положительное решение в пространстве* l_1, *т. е. существует вектор* $\mathrm{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)^T$, *координаты которого удовлетворяют системе* (19), *причем*

$$x_j > 0,\ \forall j \in \mathbb{N}\cup\{0\} \quad и \quad \sum_{j=0}^{\infty} x_j < +\infty.$$

В §3.3 приведены несколько примеров функций $\{h_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{h_j^*\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяющих всем условиям основной теоремы 3.3.

Во второй части главы 3 рассматривается следующая бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений:

$$y_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{n-j} g(y_j), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{30}$$

относительно искомого бесконечного вектора y $= (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)^T$, ($T$— знак транспонирования).

В системе (30) бесконечная матрица $B = (b_{n-j})_{n,j=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$b_n > 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n = 1, \tag{31}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| b_n < +\infty, \quad \nu(B) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n b_n > 0 \tag{32}$$

а для определенной на $\mathbb{R}^+$ функции g существует число $\eta > 0$ такое, что:

a) $g(u)$ монотонна и непрерывна на $[0, \eta]$

$$g \uparrow \text{ на } [0, \eta], \; g \in C[0, \eta],$$

b) $g(u)$ выпукла вверх на $[0, \eta]$ и $g(0) = 0, \; g(\eta) = \eta$,

c) существует $g^{'}(0)$, причем $1 < g^{'}(0) < +\infty$ и

$$g(u) \leq g^{'}(0)u, \quad u \in [0, \eta],$$

d) существуют $\varepsilon > 0$ и $\tilde{c} > 0$ такие, что $g(u) \geq g^{'}(0)u - \tilde{c}u^{1+\varepsilon}, \; u \in [0, \eta]$.

Указанная система возникает в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии (см. [9], [19], [20]).

В случае когда $b_{-n} = b_n$ система (и ее двумерный аналог) была достаточно подробно изучена в работе [14]. В этой работе при некоторых ограничениях на нелинейность g построено знакопеременное и ограниченное решение системы.

В §3.4 приведены некоторые вспомогательные факты.

Введем следующее обозначение: пусть $L(\lambda)$ является дискретным аналогом функции Дикмана [20]:

$$L(\lambda) := g^{'}(0) \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j q^{-\lambda j}, \quad q > 1, \; \lambda \in [0, +\infty). \tag{33}$$

В §3.5 доказана следующая теорема существования покомпонентно положительных решений:

Теорема 3.4. *При условиях* (31), (32), *a*) – *d*) *если существует* $\lambda_0 > 0$ *такое, что* $L(\lambda_0) < 1$, *то система* (30) *имеет ограниченное неотрицательное нетривиальное решение* y $= (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)^T$, *причем*

- $y_n \uparrow$ *по* $n \in \mathbb{Z}$,
- $\lim\limits_{n\to-\infty} y_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \eta,$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\eta - y_n) < +\infty.$

В §3.6 доказывается единственность решения (30) в определенном конусном отрезке, а именно, справедлива следующая

Теорема 3.5. *При условиях теоремы 3.4 система* (30) *имеет единственное решение в следующем классе бесконечных последовательностей:*

$$\mathfrak{M} = \{\mathrm{y} = (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)^T : \ \mathcal{L}_n \le y_n \le y_n^{(0)}, \ \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Здесь

$$\mathcal{L}_n := \max\{\eta q^{\sigma_0 n} - M q^{(\delta+\sigma_0)n,}, 0\}, \ n \in \mathbb{Z},$$

где

$$M > \max\left\{\eta, \frac{\tilde{c}\eta^{1+\varepsilon} L(\delta+\sigma_0)}{g'(0)(1 - L(\sigma_0+\delta))}\right\}, \delta \in (0, \min\{\lambda_0 - \sigma_0, \sigma_0\varepsilon\})$$

— *параметры, а* $\sigma_0 \in (0, \lambda_0)$ *единственным образом определяется из характеристического уравнения* $L(\lambda) = 1$.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[6].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.м. наук, профессору Х.А. Хачатряну за постановку задач и многочисленные полезные советы при выполнении работы.

Литература

[1] Л.Г. Арабаджян. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, Известия НАН Армении, Математика, 1997 г., том 32, № 1, стр. 21–28.

[2] В.С. Владимиров, Я.И. Волович. О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны, ТМФ, 2004 г., том 138, № 3, стр. 355–368.

[3] В.С. Владимиров. О нелинейном уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля, УМН, 2005 г., 60:6(366), стр. 73–88.

[4] В.С. Владимиров. Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов, Известия РАН Сер. Математическая, 2005 г., том 69, № 3, стр. 55–80.

[5] В.С. Владимиров. К вопросу об асимптотике при $|t| \to \infty$ решений краевых задач для p-адических струн, ТМФ, 2008 г., том 157, № 3, стр. 325–333.

[6] Н.Б. Енгибарян. О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае, Известия РАН Сер. Математическая, 2006 г., том 70, № 5, стр. 79–96.

[7] Л.В. Жуковская. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн, ТМФ, 2006 г., том 146, № 3, стр. 402–409.

[8] А.С. Петросян, М.Г. Костанян. О разрешимости одного класса нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица, Матем. в Высшей Школе, 2014 г., № 1, том 10, стр. 35–40.

[9] А.Г. Сергеев, Х.А. Хачатрян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии, Труды ММО, 2019 г., том 80, № 1, стр. 113-131.

[10] Х.А. Хачатрян, А.К. Кроян. О положительной разрешимости в l_1 одной бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица, Вестник РАУ, 2015 г., № 1, стр. 16–25.

[11] Х.А. Хачатрян. О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн, Тр. ММО, 2018 г., том 79, № 1, стр. 117–132.

[12] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. О разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения динамической теории струны, ТМФ, 2018 г., том 195, № 1, стр. 44–53.

[13] Х.А. Хачатрян. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны, Известия РАН Сер. Математическая, 2018 г., том 82, № 2, стр. 172–193.

[14] Х.А. Хачатрян, С.М. Андриян. О разрешимости одного класса дискретных матричных уравнений с кубической нелинейностью, Украинский Математический журнал, 2019 г., том 71, № 12, стр. 1667–1683.

[15] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. О разрешимости некоторых нелинейных интегральных уравнений в задачах распространения эпидемии, Математическая физика и приложения, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика В. С. Владимирова, Тр. МИАН, том 306, 2019 г., стр. 287–303.

[16] Х.А. Хачатрян. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой, Известия Саратовского универ. Новая серия: Серия Математика. Механика. Информатика, 2019 г., том 19, № 2, стр. 164–181.

[17] Х.А. Хачатрян. Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью, Известия РАН Сер. Математическая, 2020 г., том 84, № 4, стр. 198–207.

[18] Х.А. Хачатрян. О разрешимости нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки, Труды ММО, 2020 г., том 81, № 1, стр. 3–40.

[19] Atkinson, C., Reuter, G. E. H. Deterministic epidemic waves, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1976, 80, pp. 315–330.

[20] Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, Journal of Mathematical Biology, 1978, vol. 6, № 2, pp. 109–130.

[21] Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proc. Royal Soc., 1927, vol. 115, № 772, 1927, pp. 700–721.

[22] Kh.A. Khachatryan, M.F. Broyan. One-parameter family of positive solutions for a class of nonlinear infinite algebraic systems with Teoplitz-Hankel type Matrices. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2013 vol. 48, № 5, pp. 189–200.

Список опубликованных работ по теме диссертации

[1] Kh.A. Khachatryan, M.H. Avetisyan. On solvability of an infinite nonlinear system of algebraic equations with Teoplitz-Hankel matrices, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Science, 2017, vol. 51, № 2, pp. 158–167.

[2] Х.А. Хачатрян, М.О. Аветисян. О построении неподвижной точки в пространстве l_1 для одной бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений, Armenian Mathematical Union, Annual Session. Abstracts (Yerevan), YSU, 2017, pp. 43–44.

[3] Kh.A. Khachatryan, Ts. E. Terjyan and M.H. Avetisyan. A One-parameter Family of Bounded Solutions for a System of Nonlinear Integral Equations on the Whole Line, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, Armen. Acad. Sci., 2018, vol. 53, № 4, pp. 201–211.

[4] Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян, М.О. Аветисян. Вопросы разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки, Труды ИММ УрО РАН, 2018 г., том 24, № 3, стр. 247–262.

[5] М.О. Аветисян, Х.А. Хачатрян. О разрешимости одного класса нелинейных многомерных интегральных уравнений типа свертки, Международная конференция "VIII Российско-Армянское Совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам", Сборник тезисов, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, 2019 г., стр. 5–5.

[6] M.H. Avetisyan. On solvability of a nonlinear discrete system in the spread theory of infection, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Science, 2020, vol. 54, № 2, pp, 87–95.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Մ.Հ. Ավետիսյան

P-ԱԴԻԿ ԼԱՐԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է p-ադիկ բաց և փակ լարերի դինամիկ տեսությունում ծագող որոշ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների և դրանց դիսկրետ անալոգների (հանգույնների) ուսումնասիրությանը: Նշված խնդիրները ծագում են նաև համաճարակի տարածա-ժամանակային (աշխարհագրական) տարածման մաթեմատիկական տեսությունում: Դիտարկվող հավասարումների կարևոր առանձնահատկություններից են համապատասխան տիրույթների անսահմանափակությունը և այդ հավասարումները նկարագրող օպերատորների կրիտիկականության հատկությունները (տրիվիալ վակումային լուծումների առկայությունը): Հատուկ իտերացիոն մեթոդների միջոցով և փաթեթի տիպի ինտեգրալ հավասարումների տեսության կիրառումով ապացուցվել են վերը նշված հավասարումների համար գոյության և միակության թեորեմներ, հետազոտվել են ստացված լուծումների ասիմպտոտիկ վարքը:

Ատենախոսությունում ստացվել են և պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական արդյունքները:

- Կիսառանցքի վրա աստիճանային ոչ գծայնությամբ գումարատարբերակային կորիզով ինտեգրալ հավասարումների համակարգի համար ստացվել է ոչ տրիվիալ անընդհատ և սահմանափակ լուծում:
- Ամբողջ առանցքի վրա աստիճանային ոչ գծայնությամբ ինտեգրալ հավասարումների համակարգի համար ապացուցվել է ոչ տրիվիալ, անընդհատ, սահմանափակ լուծումների մեկ պարամետրանոց ընտանիքի գոյությունը: Նկարագրվել են կառուցված լուծումների մի շարք որակական հատկություններ, այդ թվում մոնոտոնությունը, լուծման սահմանի գոյությունը:
- Կենտ սահմանափակ և մոնոտոն ֆունկցիաների դասում ապացուցվել է նշված ոչ գծային հավասարումների համակարգի լուծման միակությունը:

- Գումարապարբերական կորիզով $\mathbb{R}_n^+$-ի վրա որոշ դասի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման համար ապացուցվել է ոչ տրիվիալ, սահմանափակ լուծման գոյությունը:

- Որոշ դասի փաթեթի տիպի ոչ գծային բազմաչափ ինտեգրալ հավասարման համար ապացուցվել է ոչ տրիվիալ, անընդհատ, սահմանափակ լուծումների n-պարամետրանոց ընտանիքի գոյությունը: Ուսումնասիրվել է կառուցված լուծումների ինտեգրալ ասիմպտոտիկան: Բերվել են նաև դիտարկված հավասարման կիրառություններում հետաքրքրություն ներկայացնող մի շարք մասնավոր օրինակներ:

- Տյոպլից-Հանկելի մատրիցներով ոչ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի համար ապացուցվել է կոմպոնենտ առ կոմպոնենտ դրական լուծման գոյությունը l_1 տարածությունում:

- Համաճարակի աշխարհագրական տարածման մաթեմատիկական տեսությունում ծագող ոչ գծային դիսկրետ համակարգի համար ապացուցվել է սահմանափակ հաջորդականությունների դասում գոյության և միակության թեորեմներ: Ուսումնասիրվել է կառուցված լուծման վարքն $\pm$ անվերջությունում:

R E S U M E

Metaksya Avetisyan

Some nonlinear integral equations in the theory of p-adic strings

The thesis work is devoted to the study of some nonlinear integral equations and their discrete analogous arising in the p-adic theory of open-closed strings. These equations also arise in the mathematical theory of geographical (spatial-temporal) spread of epidemics.

One of the important features of the equations under consideration are the unboundedness of the corresponding regions, the non-compactness and criticality of the operators describing these equations (the existence of trivial vacuum solutions).

Combination of special iteration methods with the theory of convolution type integral equations existance and uniqueness theorems are proved and the asymptotic behavior of the obtained solutions is studied.

The basic results obtained in thesis are the following:

- A nontrivial continuous bounded solution for a system of integral equations with power nonlinearity on the semi axis is constructed.
- One parametric family of nontrivial continuous bounded solutions for a system of integral equations with power nonlinearity on the whole axis is proved. A number of basic properties of the constructed solutions are described, including monotonicity and the existence of a solution at infinity.
- In the class of odd bounded monotone functions, the uniqueness of the solution of the system of nonlinear integral equations is proved.
- The existence of a nontrivial bounded solution for a nonlinear integral equation on $\mathbb{R}^n$ with a kernel dependent on the sum and difference of arguments is proved.

- For a some class of nonlinear multidimensional convolution type integral equations, the existence of an n-parametric family of nontrivial continuous and bounded solutions is proved. The integral asymptotics is studied. A list of examples of the considered equations representing applied interest are given.

- For a class of infinite nonlinear systems of algebraic equations with Toeplitz-Hankel matrices, the existence of a component by component positive solution in the space l_1 is proved.

- For a class of discrete nonlinear equations, arising in the mathematical theory of the spatial temporal spread of the epidemic, the existence and uniqueness theorems in the space of bounded sequences are proved. The asymptotic behavior of the constructed solutions at infinity is studied.