ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՏԵՓՈՅԱՆ ԼԻՊԱՐԻՏ ՊԵՏՐՈՍԻ

ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ-ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա.01.02 - «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, Մաթեմատիկական ֆիզիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

ԵՐԵՎԱՆ 2021

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕПОЯН ЛИПАРИТ ПЕТРОСОВИЧ

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности
01.01.02 - «Дифференциальные уравнения и Математическая физика»

ЕРЕВАН 2021

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի գիտական խորհրդի հ. 25 նիստում (22.11.2018 թ):

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Ն.Բ. Ենգիբարյան
- ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Գ. Ջաիանի
- ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Վ.Ն. Մարգարյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ - Ջավախիշվիլիի անվան ԹՊՀ, Ա. Ռազմաձեի անվան մաթեմատիկական ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2021 թ. հունիսի 29-ին ժամը 15:00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում: Հասցե՝ ք. Երևան, 3750025, փ. Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2021 թ. մայիսի 18-ին:

050 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր՝ Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета факультета математики и механики ЕрГУ (№ 25, 22.11.2018 г.)

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук, профессор
Н.Б. Енгибарян
доктор физ.-мат. наук, профессор
Г. Джаяни
доктор физ.-мат. наук, профессор
В.Н. Маргарян

Ведущая организация – Математический институт имени А. Размадзе ТГУ имени М. Джавахишвили

Защита состоится 29-го июня 2021 г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском государственном университете.

Адрес: г. Ереван, 3750025, ул. Алек Манкуяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрГУ.

Автореферат разослан 18-го мая 2021 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Т.Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В представленной диссертации изучаются обыкновенные дифференциальные уравнения с операторными коэффициентами, которые являются, вообще говоря, неограниченными линейными операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Такие уравнения часто называют *дифференциально-операторными уравнениями* (иногда операторно-дифференциальными уравнениями). Актуальность таких уравнений обусловлено не только тем, что эти уравнения содержат многие уравнения с частными производными, но и позволяют нам смотреть с единой точки зрения как на обыкновенные дифференциальные уравнения, так и на дифференциальные уравнения с частными производными.

Важнейшим классом дифференциально-операторных уравнений являются вырождающиеся эллиптические уравнения четвертого порядка. Вырождающиеся эллиптические уравнения встречаются при решении многих важных вопросов прикладного характера (теория малых изгибаний поверхностей вращения, изгиб пластинок переменной толщины с острым краем и т.д.). Особо важную роль играют эти уравнения в газовой динамике. Начало многочисленным исследованиям в этом направлении положила работа Ф. Трикоми [28], посвященная одному уравнению второго порядка с нехарактеристическим вырождением. Основополагающую роль в теории вырождающихся эллиптических уравнений сыграла работа М.В. Келдыша [14], в которой впервые была изучена первая краевая задача для уравнения второго порядка с характеристическим вырождением и указаны те случаи (в зависимости от показателя вырождения и младших членов), когда часть границы следует освободить от граничного условия. Отметим монографию А.В. Бицадзе [2], где впервые поставлены задачи с весами. В работе Г. Фикера [29] была создана единая теория уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой. В работах С.Г. Михлина [21], Л.Д. Кудрявцева [17, 18], П.И. Лизоркин и С.М. Никольский [19] были исследованы вырождающиеся эллиптические уравнения (как второго, так и высоких порядков) вариационными методами. Эллиптические уравнения четвертого порядка, вырождающиеся на границе области, к которым не применимы вариационные методы, впервые рассматривались В.К. Захаровым [12, 13]. Он распространил результаты М.И. Вишика [4] на уравнения четвертого порядка на плоскости при условии на коэффициент при производной третьего порядка по y (здесь линия вырождения – $y = 0$). Оказалось, что и для уравнения четвертого порядка младшие члены влияют на постановку задачи. Аналогичный факт другими методами был изучен в работе А. Нарчаева [23]. Е.В. Маховер [20] получил условия дискретности и недискретности спектра для вырождающегося эллиптического оператора четвертого порядка. Подробная библиография работ по этой тематике можно найти, например, в обзорной статье О.А. Олейника и Е.В. Радкевича [24], в книгах Р. Ойнаров, М. Отелбаев [25], М.М. Смирнова [26] и С.А. Терсенова [27].

Отметим важную статью G. Jaiani [31], где был обобщен эффект Келдыша. В статье В.В. Корниенко [15] был исследован спектр для одного вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В статье В.П. Глушко [6] было изучено вырождающееся линейное дифференциальное уравнение первого и второго порядка. В монографии С.Г. Крейна [16] были изучены линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, а в работе [7] были рассмотрены граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.

Представленная диссертационная работа является продолжением работ А.А. Дезина (см. [8, 9] и основана на существенное использование модельных операторов.

Цели работы. Основными целями настоящей диссертации являются:

- доказательство теорем о непрерывности и компактности вложений для весовых пространств Соболева как для конечного отрезка $[0, b]$, так и для бесконечного промежутка $[1, +\infty)$,

- доказательство существования и единственности обобщенного решения для одномерных вырождающихся дифференциальных уравнений (как в $[0, b]$, так и $[1, +\infty)$), а также изучение спектральных свойств соответствующих операторов,

- доказательство непрерывности и компактности обратных операторов для одномерных операторов, а также описание области определения задачи Дирихле (для конечного отрезка $[0, b]$ и бесконечного промежутка) и для одномерного уравнения Неймана в $[0, b]$,

- доказательство существования и единственности обобщенного решения для задачи Дирихле *дифференциально-операторного* уравнения высокого порядка (в $[0, b]$ и $[1, +\infty)$), для задачи Неймана и смешанной задачи (в $[0, b]$), задачи Дирихле для случая произвольного веса (в $[0, b]$), а также для граничной задачи для одного уравнения первого порядка (в $[0, b]$).

Методы исследования. В работе использовались методы теории дифференциальных уравнений (как для одного переменного, так и для многих переменных) и функционального анализа, методы теории линейных операторов (вообще говоря неограниченных) в сепарабельном гильбертовом пространстве. Стоит особо подчеркнуть роль модельных операторов, введенных А.А. Дезиным (см. [10]), при изучении операторных уравнений. Мы также использовали методы спектральной теории, вообще говоря, для неограниченных операторов (см. книги М.А. Наймарка [22] и J. Weidmann [34]).

Научная новизна. Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и обоснованы строгими математическими доказательствами.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический и практический интерес. Они могут быть использованы в задачах с вырождением как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для дифференциальных уравнений с частными производными, а также для дифференциально-операторных уравнений высокого порядка.

Основные положения, выносимые на защиту. На основе проведенных исследований автором выносятся на защиту следующие положения:

- Для весовых пространств Соболева $\dot{W}^m_\alpha(0,b)$, $W^m_\alpha(0,b)$, $\dot{W}^m_\rho(0,b)$ и $W^m_\alpha(1,+\infty)$ доказаны точные теоремы непрерывного вложения, а также изучены вопросы компактности этих вложений,

- Доказаны теоремы о существовании и единственности обобщенного решения для одномерных вырождающихся дифференциальных уравнений высокого порядка в конечном отрезке $(0,b)$ и в бесконечном промежутке $(1,+\infty)$,

- Доказаны теоремы о непрерывности и компактности для обратных операторов задачи Дирихле (в конечном и бесконечном интервале), задачи Неймана и смешанной задачи, для задачи Дирихле в случае произвольного веса, также для одного уравнения первого порядка на конечном отрезке $(0,b)$. Одновременно были изучены спектры соответствующих операторов,

- Для задачи Дирихле и Неймана в одномерном случае в конечном отрезке были даны описания областей определения соответствующих операторов,

- В конечном интервале $(0, b)$ доказано существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле, Неймана и смешанной задачи для вырождающегося дифференциально-операторного уравнения высокого порядка, для одного дифференциально-операторного уравнения в случае произвольного веса, для одного дифференциально-операторного уравнения первого порядка, а также были исследованы спектры соответствующих операторов,

- Доказано существование и единственность обобщенного решения для вырождающегося дифференциально-операторного уравнения высокого порядка в бесконечном интервале $(1, +\infty)$.

Апробация полученных результатов.
Результаты работы докладывались на перечисленных конференциях

1. Л. Тепоян, Тезисы докладов всесоюзной конференции *Дифференциальные уравнения и их приложения*, Ашхабад, 1986, стр. 147-148,

2. Л. Тепоян, Тезисы докладов всесоюзной конференции, Алма-Ата, 1991, 1 стр.,

3. Л. Тепоян, Об одном дифференциально-операторном уравнении высокого порядка, Материалы конференции, Ереван, Армения, 1993, стр. 212-217,

4. L. Tepoyan, Degenerate operator equations of higher order, Preprint/23, University of Potsdam, Germany, 13 pages, 2000, 13 pages,

5. Л. Тепоян, Обобщенная задача Неймана для вырождающегося операторного уравнения, Тезисы докладов международной конференции *Математика в Армении*, Армения, 2003,

6. L. Tepoyan, The Neumann problem for a degenerate operator equation, Preprint/13, University of Potsdam, Germany, 2004, 11 pages,

7. L. Tepoyan, The mixed problem for a degenerate operator equation. Preprint/06, University of Potsdam, Germany, 2008, 13 pages,

8. Л. Тепоян, С. Осипова, О количестве действительных корней для одного многочлена, Тезисы докладов конференции, посвященной 80-летию С. Мергеляна, Ереван, 2008, стр. 48-50,

9. L. Tepoyan, Degenerate differential equations on infinite intervals, *Third Russian-Armenian workshop on mathematical physics, complex analysis and related topics*, 4-8 October, Tsaghkadzor, Armenia, 2010, pp. 146-150,

10. L. Tepoyan, Degenerate differential equations on infinite intervals, International Conference *Modern Problems in Applied Mathematics*, 4-9 September, Tbilisi, Georgia, 2013, 1 page.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 21 статье в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК и десяти тезисах конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 16 параграфов, которые в свою очередь делятся на 16 пунктов, заключения и списка цитируемой литературы, включающего в себе 92 наименований. Общий объем диссертации составляет 131 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований и изложено краткое содержание диссертации.

Диссертационная работа состоит из *введения, трех глав, списка использованной литературы и списка публикаций автора.*

Первая глава состоит из *двух параграфов* и посвящена к изучению весовых пространств Соболева в конечном интервале $(0, b)$ и в бесконечном промежутке $(1, +\infty)$.

Первый параграф 1.1, который состоит из *трех* пунктов, посвящен к изучению весовых пространств Соболева в конечном интервале $(0, b)$.

В пункте 1.1.1 определяются весовые пространства Соболева $\dot{W}^m_\alpha(0, b)$, $W^m_\alpha(b)$, $W^m_\alpha(0)$ и $W^m_\alpha(0, b)$, как замыкания линейной многообразии функций $u \in C^m[0, b]$, для которых *соответственно* выполняются условия $u^{(k)}(0) = 0$, $u^{(k)}(b) = 0, k = 0, \cdots, m-1$ (в обоих концах), (без каких либо граничных условий), $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \cdots, m-1$ (условия только в левом конце $t = 0$) и $u^{(k)}(b) = 0, k = 0, \cdots, m-1$ (условия только в правом конце $t = b$). Для пространств $\dot{W}^m_\alpha(0, b)$ и $W^m_\alpha(b)$ в качестве нормы мы берем

$$\|u\|^2_{\dot{W}^m_\alpha(0,b)} = \|u\|^2_{W^m_\alpha(b)} = \int_0^b t^\alpha |u^{(m)}|^2 \, dt, \tag{0.1}$$

а для пространств $W_\alpha^m(0,b)$ и $W_\alpha^m(0)$- норму

$$\|u\|^2_{W_\alpha^m(0,b)} = \|u\|^2_{W_\alpha^m(0)} = \int_0^b \left(t^\alpha |u^{(m)}|^2 + t^\alpha |u(t)|^2\right) dt. \tag{0.2}$$

Доказываются некоторые оценки для функций и их производных из этих пространств, а также точные теоремы вложения, используя неравенство Харди. В частности, для пространства $\dot{W}_\alpha^m(0,b)$ имеют место следующие утверждения (см. [30], [11]).

Утверждение 1.3. *Для любой функции $u \in \dot{W}_\alpha^m(0,b)$ при $\alpha \neq 1,3,\ldots,2m-1$, $j = 0,1,\ldots,m-1$ имеет место следующее неравенство*

$$|u^{(j)}(t)|^2 \leq C_j t^{2m-2j-1-\alpha} \|u\|^2_{\dot{W}_\alpha^m(0,b)|}. \tag{0.3}$$

При $\alpha = 2n+1$, $n = 0,1,\ldots,m-1$ оценка $t^{2m-2j-1-\alpha}$ в выражении (0.3) *берем $t^{2m-2j-2n-2}|\ln t|$, $j = 0,1,\ldots,m-n-1$.*

Утверждение 1.4. *Для любого $\alpha \geq 0$ и $\alpha \neq 1,3,\ldots,2m-1$ имеет место непрерывное вложение*

$$\dot{W}_\alpha^m(0,b) \hookrightarrow L_{2,\alpha-2m}(0,b),$$

которое не является компактным. Более того, для любого $\beta > \alpha - 2m$ вложение

$$\dot{W}_\alpha^m(0,b) \subset L_{2,\beta}(0,b)$$

является компактным оператором.

Для функций из пространства $W_\alpha^m(0,b)$ справедлива

Теорема 1.6. *Для любой функции $u \in W_\alpha^m(0,b)$ имеют место следующие неравенства*

$$|u^{(j)}(t)|^2 \leq (B_j + C_j t^{2m-2j-1-\alpha}) \|u\|^2_{W_\alpha^m(0,b)|}, \tag{0.4}$$

где $\alpha \neq 1,3,\ldots,2m-1, j = 0,1,\ldots,m-1$. При $\alpha = 2n+1, n = 0,1,\ldots,m-1$ вместо $t^{2m-2j-1-\alpha}$ в выражении (0.4) *берем $t^{2m-2j-2n-2}|\ln t|$,
$j = 0,1,\ldots,m-n-1$.*

В пункте 1.1.2 вводятся весовые пространства функций $\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(0,b)$, $1 < p < +\infty$, вырождающихся *в обоих концах* отрезка $[0,b]$, как замыкание $\dot{C}^m[0,b]$ по норме

$$\|u\|^p_{\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(0,b)} = \int_0^b \Big(\sum_{k=0}^m t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}|u^{(k)}(t)|^p\Big)dt, \tag{0.5}$$

где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha \neq p-1, 2p-1, \ldots, mp-1$, $\beta \neq p-1, 2p-1, \ldots, mp-1$.

Доказывается, что для $u \in \dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(0,b)$ справедливы неравенства

$$|u^{(m-k)}(t)|^p \le c_k t^{kp-1-\alpha}(b-t)^{kp-1-\beta}\|u\|^p_{\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(0,b)}, \quad k=1,2,\ldots,m,$$

а также имеет место следующее

Утверждение 1.8. *Для любого* $\alpha_1 > \alpha - mp$ *и* $\beta_1 > \beta - mp$ *имеет место компактное вложение*

$$\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(0,b) \subset L_{p,\alpha_1,\beta_1}(0,b).$$

Заметим также, что имеет место непрерывное вложение

$$\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(0,b) \hookrightarrow L_{p,\alpha-mp,\beta-mp}(0,b),$$

которое не является компактным.

В пункте 1.1.3 определяются весовые пространства $\dot{W}^m_\rho(0,b)$ для произвольного веса $\rho(t)$, где $\rho(t)$ является положительной функцией на $(0,b]$ и для любого $0<\varepsilon<b$ функции $\rho, \rho^{-1} \in L_1(\varepsilon,b)$.

Обозначим через $\dot{W}^m_\rho(0,b)$ пополнение $\dot{C}^m[0,b]$ по норме (см. статью E. Poulsen, [32])

$$\|u\|^2_{\dot{W}^m_\rho(0,b)} = \int_0^b \rho(t)|u^{(m)}(t)|^2\,dt. \tag{0.5}$$

Доказывается следующее

Утверждение 1.12. *При выполнении условия*

$$\int_0^b \frac{\tau^{2m-1}}{\rho(\tau)}\,d\tau < \infty$$

имеет место непрерывное вложение

$$\dot{W}^m_\rho(0,b) \hookrightarrow L_2(0,b).$$

Более того, это вложение компактно.

Второй параграф 1.2 посвящен к изучению пространств Соболева $\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$ в $(1,+\infty)$. Обозначим через $\dot{C}^m[1,+\infty)$ линейное многообразие

$$\dot{C}^m[1,+\infty) := \{u \in C^m[1,+\infty), u^{(k)}(1) = u^{(k)}(+\infty) = 0, k=0,1,\ldots,m-1\}.$$

Обозначим через $\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$ пополнение $\dot{C}^m[1,+\infty)$ по норме

$$\|u\|^2_{\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)} := \int_1^{+\infty} t^\alpha |u^{(m)}(t)|^2\,dt.$$

Определим весовое пространство

$$L_{2,\beta}(1,+\infty) := \{u, \|u\|^2_{L_{2,\beta}(1,+\infty)} = \int_1^{+\infty} t^\beta |u(t)|^2\,dt < \infty\}.$$

Доказываются следующие утверждения.

Утверждение 1.13. *Для функций $u \in \dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$ имеют место следующие оценки*

$$|u^{(j)}(t)|^2 \le C_j t^{2m-2j-1-\alpha}\|u\|^2_{\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)}, j = 0,1,\dots,m-1. \tag{0.5}$$

Утверждение 1.14. *При $\beta \le \alpha - 2m$ имеет место непрерывное вложение*

$$\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty) \hookrightarrow L_{2,\beta}(1,+\infty),$$

которое при $\beta < \alpha - 2m$ компактно.

Утверждение 1.18. *Если функция φ имеет ограниченную кусочно-непрерывную производную порядка m в $[1, A]$ для любого $A > 1$ и $\varphi^{(k)}(1) = 0$, $k = 0,1,\dots,m-1$ причем $\|\varphi\|_{\dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)} < \infty$, а при больших t выполняются неравенства* (0.5)*, то $\varphi \in \dot{W}^m_\alpha(1,+\infty)$.*

Вторая глава состоит из четырех параграфов и посвящена к изучению вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений.

В *параграфе* 2.1, который состоит из пяти пунктов, рассматриваются вырождающиеся самосопряженные дифференциальные уравнения высокого порядка в конечном отрезке.

В *пункте* 2.1.1 рассматривается задача Дирихле для вырождающегося самосопряженного дифференциального уравнения высокого порядка

$$Pu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + pt^\beta u = f, \tag{0.6}$$

где $t \in (0,b)$, $\alpha \ge 0$, $\alpha \ne 1,3,\cdots,2m-1$, $m \in \mathbb{N}$, p-постоянное число, $\beta \ge \alpha - 2m$, а $f \in L_{2,-\beta}(0,b)$.

Определим обобщенное решение уравнения (0.6) (см. [33]).

Определение 2.1. Функция $u \in \dot{W}^m_\alpha(0,b)$ называется обобщенным решением уравнения (0.6), если имеет место равенство

$$\{u,v\}_\alpha + p(t^\beta u, v) = (f,v) \tag{0.7}$$

для любого $v \in \dot{W}^m_\alpha(0,b)$.

Доказывается, что обобщенное решение для уравнения (0.7) при $p = 0$

$$Su \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} = f.$$

существует и единственно для любого $f \in L_{2,-\beta}(0,b)$. Определим оператор, соответствующий Определению 2.1.

Определение 2.3. Будем говорить, что $u \in \dot{W}^m_\alpha(0,b)$ принадлежит к области определения $D(P)$ оператора P, если существует функция $f \in L_{2,-\beta}(0,b)$, так что выполняется равенство

$$\{u,v\}_\alpha + p(t^\beta u, v) = (f,v)$$

для любого $v \in \dot{W}^m_\alpha(0,b)$. Тогда будем писать $Pu = f$.

Так как для оператора S мы имеем $D(S) \subset \dot{W}^m_\alpha(0,b)$, то естественно, что решение уравнения $Su = f$ может иметь лучшее поведение в окрестности $t = 0$. Верна следующая теорема (ср. с работой Р. Ойнаров, М. Отелбаев [25]).

Теорема 2.4. *Для любого* $u \in D(S), D(S) \subset \dot{W}^m_\alpha(0,b)$ $u(0)$ *значение* $u(0)$ *конечно при* $2m-1 < \alpha < 2m-1/2$, *а при* $2m-2k-1 < \alpha < 2m-2k$, $k = 1,\cdots,m-1$ *конечны также значения* $u^{(k)}(0)$. *Эти значения* $u^{(k)}(0)$, $k = 0,1,\cdots,m-1$ *не могут быть заданы произвольно и определяются правой частью уравнения* (0.6).

Заметим, что оператор S действует из $L_{2,-\beta}(0,b)$ в $L_{2,\beta}(0,b)$. Определим новый оператор $\mathbb{S} := t^{-\beta}S, D(\mathbb{S}) = D(S)$. Ясно, что оператор $\mathbb{S}$ будет действовать в пространстве $L_{2,\beta}(0,b)$.

Теорема 2.7. *Оператор* $\mathbb{S} : L_{2,\beta}(0,b) \to L_{2,\beta}(0,b)$ *при* $\beta \geq \alpha - 2m$ *является положительным и самосопряженным оператором, а обратный оператор* $\mathbb{S}^{-1} : L_{2,\beta}(0,b) \to L_{2,\beta}(0,b)$ *является непрерывным при* $\beta \geq \alpha - 2m$ *и компактным при* $\beta > \alpha - 2m$.

Введем обозначение

$$d(m,\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha-3)^2 \cdot (\alpha-(2m-1))^2}{4^m}.$$

Теорема 2.8. *Спектр оператора* $\mathbb{S} : L_{2,\beta}(0,b) \to L_{2,\beta}(0,b)$ *при* $\beta = \alpha - 2m$ *чисто непрерывный и совпадает с лучом* $[d(m,\alpha), +\infty)$.

В пункте 2.1.2 рассматривается задача Неймана для уравнения

$$Bu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + pt^\alpha u = f, \tag{0.8}$$

где $f \in L_{2,-\alpha}(0,b), \alpha \geq 0, \alpha \neq 1,3,\cdots,2m-1$, $p = const$.

Сперва рассматривается случай $p = 1$.

Определение 2.11. Функция $u \in W^m_\alpha(0,b)$ называется обобщенным решением задачи Неймана для уравнения (0.8) при $p = 1$, если для любого $v \in W^m_\alpha(0,b)$ имеет место равенство

$$(t^\alpha u^{(m)}, v^{(m)}) + (u,v) = (f,v).$$

Утверждение 2.12. *Обобщенное решение задачи Неймана для уравнения* (0.8) *при* $p = 1$ *существует и единственно для любого* $f \in L_{2,\alpha}(0,b)$.

Затем дается описание функций из $D(B)$.

Утверждение 2.14. *Область определения оператора* B *состоит из функций* $u \in W_\alpha^m(0,b)$, *для которых значения* $u^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, *конечны для* $0 \le \alpha < 2m - 2j$. *Значение* $u(0)$ *конечно для* $0 \le \alpha < 2m + 1$. *Значения* $u^{(j)}(0)$ *не могут быть заданы произвольно и определяются правой частью уравнения* (0.8).

Пусть $\mathbb{B} \equiv t^{-\alpha} B, \mathbb{B} : L_{2,\alpha}(0,b) \to L_{2,\alpha}(0,b)$.

Утверждение 2.15. *Оператор* $\mathbb{B} : L_{2,\alpha}(0,b) \to L_{2,\alpha}(0,b)$ *является положительным и самосопряженным, а обратный оператор* $\mathbb{B}^{-1} : L_{2,\alpha}(0,b) \to L_{2,\alpha}(0,b)$ *является компактным.*

В пункте 2.1.3 рассматриваются смешанные задачи двух типов. Сперва рассматривается смешанная задача *первого типа* для следующего частного случая одномерного уравнения

$$Bu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + t^\alpha u = f, \tag{0.9}$$

где $f \in L_{2,-\alpha}(0,b), \alpha \ge 0, \alpha \ne 1, 3, \cdots, 2m-1$.

Определение 2.18. Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_\alpha^m(0)$ называется обобщенным решением смешанной задачи *первого типа* для уравнения (0.9), если для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_\alpha^m(0)$ выполняется равенство

$$(t^\alpha u^{(m)}, v^{(m)}) + (t^\alpha u, v) = (f, v).$$

Имеет место следующее

Утверждение 2.19. *Обобщенное решение смешанной задачи первого типа для уравнения* (0.9) *существует и единственно для любого* $f \in L_{2,-\alpha}(0,b)$.

Определим, как и выше, оператор $\mathbb{B} = t^{-\alpha} B$. Доказывается, что оператор $\mathbb{B} : L_{2,\alpha}(0,b) \to L_{2,\alpha}(0,b)$ является положительным и самосопряженным, а обратный оператор $\mathbb{B}^{-1}$ является компактным. Затем доказывается

Утверждение 2.23. *Обобщенное решение смешанной задачи первого типа для уравнения* (0.9) *при* $\alpha \ge 1$ *существует тогда и только тогда, когда* $(f, P_{m-s_\alpha-1}(t)) = 0$ *для любого многочлена* $P_{m-s_\alpha-1}(t)$ *порядка* $m - s_\alpha - 1$.

Далее рассматривается смешанная задача *второго типа* для другого частного случая одномерного уравнения

$$Su \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} = f, \quad f \in L_{2,-\alpha}(0,b). \tag{0.10}$$

Определение 2.24. Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_\alpha^m(b)$ называется обобщенным решением смешанной задачи *второго типа* для уравнения (0.10), если для любого

$v \in W^m_\alpha(b)$ выполняется равенство

$$(t^\alpha u^{(m)}, u^{(m)}) + (t^\alpha u, v) = (f, v). \tag{0.11}$$

Аналогично смешанной задаче *первого типа* доказывается существование и единственность обобщенного решения для уравнения (0.11), а также самосопряженность оператора $\mathbb{S} : D(\mathbb{S}) = D(S) \subset L_{2,\alpha}(0, b) :\to L_{2,\alpha}(0, b)$. Доказывается также, что оператор $\mathbb{S}$ является положительным и самосопряженным, а обратный оператор $\mathbb{S}^{-1}$ компактным оператором в пространстве $L_{2,\alpha}(0, b)$.

В пункте 2.1.4 рассматриваются вырождающиеся самосопряженные дифференциальные уравнения для произвольного веса

$$Pu \equiv (-1)^m(\rho(t)u^{(m)})^{(m)} = f, \quad f \in L_2(0, b). \tag{0.12}$$

Определение 2.25. Функция $u \in W^m_\rho(0, b)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (0.12), если для любого $v \in W^m_\rho(0, b)$ имеет место равенство

$$(\rho(t)u^{(m)}, v^{(m)}) = (f, v).$$

Доказывается, что обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (0.12) существует и единственно для любого $f \in L_2(0, b)$. Отметим, что здесь предполагается выполнение условия (см. [32])

$$\int_0^b \frac{\tau^{2m-1}}{\rho(\tau)}\, d\tau < \infty. \tag{0.13}$$

Утверждение 2.28. *Оператор* $P : L_2(0, b) \to L_2(0, b)$ *при выполнении условия* (0.13) *является положительным и самосопряженным, а обратный оператор* $P^{-1} : L_2(0, b) \to L_2(0, b)$ *является компактным оператором.*

В пункте 2.1.5 рассматривается задача Дирихле для уравнения четвертого порядка следующего вида

$$Su \equiv (t^\alpha u'')'' - qu'' = f, \tag{0.14}$$

где $0 \le \alpha \le 4$, $\alpha \ne 1, 3$, $q > 0$.

Определим функцию $v_h = v\psi_h$, где $\psi_h(t) = 0, 0 \le \alpha \le h, h < b/2$,
$\psi_h(t) = h^{-3}(t - h)^2 \cdot (5h - 2t), t \in [h, 2h]$ и $\psi_h(t) = 1, 2h \le h \le b$.

Функция $u \in \dot{W}^2_\alpha(0, b)$ называется обобщенным решением уравнения (0.14), если для любой функции $v \in \dot{W}^2_\alpha(0, b)$ выполняется равенство

$$(t^\alpha u'', v_h'') + q(u_h', v_h') = (f, v_h).$$

Доказывается, что обобщенное решение уравнения (0.14) при $0 \leq \alpha < 3$ существует и единственно для любой $f \in L_2(0,b$. Доказательство проводится прямым решением уравнения с использованием функций Бесселя мнимого аргумента $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$. Отметим, что при этом были использованы асимптотические формулы для бесселевых функций (см. книгу Г.Н. Ватсон [3]).

Второй параграф 2.2, который состоит из *четырех* пунктов, посвящен к изучению вырождающихся несамосопряженных дифференциальных уравнений в конечном интервале $(0,b)$.

В пункте 2.2.1 рассматривается задача Дирихле для вырождающегося несамосопряженного обыкновенного дифференциального уравнения следующего вида

$$Su \equiv (-1)^m \big(t^\alpha u^{(m)}\big)^{(m)} + a\big(t^{\alpha-1}u^{(m)}\big)^{(m-1)} + pt^\beta u = f(t), \tag{0.15}$$

где $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1,3,\ldots,2m-1$, $\beta \geq \alpha - 2m$, $f \in L_{2,-\beta}(0,b)$, $a \neq 0$ и p- постоянные числа.

Определение 2.32. Функция $u \in \dot{W}^m_\alpha(0,b)$ называется обобщенным решением уравнения (0.15), если для любого $v \in \dot{W}^m_\alpha(0,b)$ выполняется следующее равенство

$$\{u,v\}_\alpha + a(-1)^{m-1}\big(t^{\alpha-1}u^{(m)}, v^{(m-1)}\big) + p(t^\beta u, v) = (f,v).$$

Теорема 2.33. *Пусть выполняются следующие условия*

$$a(\alpha-1)(-1)^m > 0, b^{\alpha-2m-\beta}\Big(d(m,\alpha) + \frac{a}{2}(\alpha-1)(-1)^m d(m-1,\alpha-2)\Big) + p > 0. \tag{0.16}$$

Тогда обобщенное решение уравнения (0.15) *существует и единственно для любого* $f \in L_{2,-\beta}(0,b)$.

Как и выше, определяется оператор $\mathbb{S} : L_{2,\beta}(0,b) \to L_{2,\beta}(0,b)$, действующий в $L_{2,\beta}(0,b)$ и доказывается

Утверждение 2.35. *При выполнении условий Теоремы* (2.33) *обратный оператор* $\mathbb{S}^{-1} : L_{2,\beta}(0,b) \to L_{2,\beta}(0,b)$ *является непрерывным оператором при* $\beta \geq \alpha - 2m$ *и компактным при* $\beta > \alpha - 2m$.

Теперь рассмотрим сопряженное к (0.15) уравнение

$$Tv \equiv (-1)^m (t^\alpha v^{(m)})^{(m)} - a\big(t^{\alpha-1}v^{(m-1)}\big)^{(m)} + pt^\beta v = g(t), \tag{0.17}$$

где $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1,3,\ldots,2m-1$, $\beta \geq \alpha - 2m$, $g \in L_{2,-\beta}(0,b)$, а $a \neq 0$ и p являются действительными постоянными.

Определение 2.36. Будем говорить, что $v \in L_{2,\beta}(0,b)$ является обобщенным решением уравнения (0.17), если для любого $u \in D(S)$ имеет место равенство

$$(Su, v) = (u, g).$$

Доказывается, что при выполнении условия (0.16) оператор $\mathbb{T}^{-1}$ является непрерывным при $\beta \geq \alpha - 2m$ и компактным при $\beta > \alpha - 2m$. Заметим также, что мы имеем $\mathbb{T} = \mathbb{S}^*$.

Замечание 2.38. При $\alpha > 1$ для любого обобщенного решения v уравнения (0.17) мы имеем

$$\left(t^{\alpha-1}|v^{(m-1)}(t)|^2\right)|_{t=0} = 0. \tag{0.18}$$

Отметим, что для уравнения (0.15) левая часть равенства (0.18) только конечна. Это является некоторым аналогом теоремы Келдыша (см. [14]).

В пункте 2.2.2 сперва рассматривается несамосопряженное дифференциальное уравнение четвертого порядка следующего вида

$$Mu \equiv (t^\alpha u'')'' + au''' = f, \tag{0.19}$$

где $a > 0$, $\alpha \neq 1, \alpha \neq 3$, $0 \leq \alpha \leq 4$ и $f \in L_2(0,b)$.

Определение 2.40. Функция $u \in \dot{W}^2_\alpha(0,b)$ называется обобщенным решением уравнения (0.19), если для любой $u \in \dot{W}^2_\alpha(0,b)$ и любого $h > 0$ имеет место равенство

$$\{u, v_h\}_\alpha - a(u'', v'_h) = (f, v_h),$$

где $v_h = v\psi_h$.

Прямым решением уравнения (0.19) доказывается, что имеет место следующая

Теорема 2.41. *Для любой функции $f \in L_2(0,b)$ обобщенное решение уравнения (0.19) при $0 \leq \alpha < 3$ существует и единственно.*

Доказывается, что тогда оператор $M^{-1} : L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ является компактным.

Далее рассматривается несамосопряженное дифференциальное уравнение четвертого порядка следующего вида

$$Nv \equiv (t^\alpha v'')'' - av''' = g, 0 \leq \alpha \leq 4, \tag{0.20}$$

где $a = const > 0$, $g \in L_2(0,b)$, $\alpha \neq 1, \alpha \neq 3$.

Определение 2.45. Функция $v \in L_2(0,b)$ называется обобщенным решением уравнения (0.20), если для любой $u \in D(M)$ имеет место равенство

$$(Mu, v) = (u, g).$$

Заметим, что $N = M^*$. Доказывается, что уравнение (0.20) при $0 \le \alpha < 3$ однозначно разрешимо для любого $g \in L_2(0, b)$.

В статье [1] доказано, что спектры операторов M и N лежат в правой полуплоскости, а обратные операторы являются компактными операторами при $0 \le \alpha < 3$.

В пункте 2.2.3 рассматривается вырождающееся несамосопряженное дифференциальное уравнение четвертого порядка *второго* типа

$$Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + au''' - pu'' + qu = f,$$

где $t \in (0, b)$, $0 \le \alpha \le 2$, $\alpha \ne 1$, a, p, q- постоянные числа, $p > 0$, $a \ne 0$, $f \in L_2(0, b)$.

Вначале рассматривается уравнение $Lu = f$ при $q = 0$, поскольку число q можно считать спектральным параметром для оператора L.

$$Ku \equiv (t^\alpha u'')'' + au''' - pu'' = f. \tag{0.21}$$

Пусть $\theta_h(t) = \theta(t)\psi_h(t)$.

Определение 2.50. Функция $u \in \dot{W}^2_\alpha(0, b)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (0.21), если для любой функции $\theta \in \dot{W}^2_\alpha(0, b)$ и любого числа $0 < h < b/2$ выполняется равенство

$$(t^\alpha u'', \theta_h'') - a(u'', \theta_h') + p(u', \theta_h') = (f, \theta_h).$$

Доказывается, что обратный оператор $K^{-1} : L_2(0, b) \to L_2(0, b)$ при $0 \le \alpha \le 2$, $\alpha \ne 1$ является компактным оператором (см. [13]). Исходя из существования и единственности обобщенного решения для уравнения (0.21) теперь можно изучить также формально-сопряженное уравнение

$$Pv \equiv (t^\alpha v'')'' - av''' - pv'' = g, a > 0, p > 0,$$

обобщенное решение которого определяется путем перехода к сопряженному уравнению.

Утверждение 2.53. *Обратный оператор $K^{-1} : L_2(0, b) \to L_2(0, b)$ при $\alpha \ne 1$ является компактным оператором.*

Отметим, что оператор $P = K^*$, т.е. оператор $P^{-1} : L_2(0, b) \to L_2(0, b)$ также является компактным оператором. Заметим также, что спектры операторов K и P лежат в правой полуплоскости.

В пункте 2.2.4 рассматривается граничная задача для вырождающегося дифференциального уравнения первого порядка

$$Su \equiv t^\alpha u' - pu = f, \quad u(0) - \mu u(b) = 0, \tag{0.22}$$

где p и μ-постоянные комплексные числа, $\alpha \geq 0$ и $f \in L_{2,\beta}(0,b)$. Рассматривается регулярный случай, т.е. случай $\alpha < 1$. Пусть S_0- минимальный оператор и $\tilde{S}$-максимальный оператор для оператора S (см. М.А. Наймарк [22] и J. Weidmann [34]).

Определение 2.54. Оператор $S : L_{2,\beta}(0,b) \to L_{2,\beta}(0,b)$ называется *правильным*, если

$$S_0 \subset S \subset \tilde{S}$$

и существует обратный оператор $S^{-1} : L_{2,\beta}(0,b) \to L_{2,\beta}(0,b)$, заданный на всем $L_{2,\beta}(0,b)$.

Наша цель найти такие значения чисел $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \mu \in \mathbb{C}$, для которых граничная задача (0.22) имеет единственное решение при любых $f \in L_{2,\beta}(0,b)$, т.е. когда оператор S будет правильным оператором.

Пусть $p(m,\alpha) := b^{\alpha-1}(1-\alpha)\ln|\mu| + i\arg\mu + 2\pi m i, m \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2.55. *Обобщенное решение краевой задачи* (0.22) *выполнении условия* $p \neq p(m,\alpha), m \in \mathbb{Z}$ *существует и единственно для любого* $f \in L_{2,\beta}(0,b)$ *тогда, когда*

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad 2\alpha + \beta < 1.$$

Доказывается, что спектр оператора $S : L_{2,\beta}(0,b) \to L_{2,\beta}(0,b)$ дискретный и совпадает с множеством точек

$$\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = p - p(m,\alpha), m \in \mathbb{Z}\}.$$

Третий параграф 2.3 посвящен к изучению нелинейных вырождающихся дифференциальных уравнений в конечном интервале $(0,b)$. Рассматривается вырождающиеся на обоих концах интервала $(0,b)$ дифференциальное уравнение высокого порядка

$$Lu \equiv \sum_{k=0}^{m}(-1)^k(a_k(t,u,u',\cdots,u^{(k)}))^{(k)} = f, \tag{0.23}$$

где $t \in (0,b)$, $D^k \equiv d^k/dt^k$, а функции $a_k(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_k), k = 0,1,\ldots,m$ зависят от t и $\xi^k \equiv (\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_k), D_k u \equiv (u, Du,\ldots,D^k u), k = 0,1,\ldots,m$ и непрерывны по t и ξ^k, дифференцируемы по ξ^k и удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}(t,\xi^k)\eta_k\overline{\eta}_j \geq c_3\sum_{k=0}^{m} t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}|\xi_k|^{p-2}|\eta|^2, \tag{0.24}$$

$$|a_{kj}(t,\xi^k)| \leq c_2 t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}\sum_{i=0}^{k}|\xi_i|^{p-2},\ k,j = 0,1,\ldots,m, \tag{0.25}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}(t,\xi^k)\eta_k\overline{\eta}_j \geq c_3\left(\sum_{k=0}^{m} t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}|\xi_k|^{p-2}\right)|\eta|^2, \quad (0.26)$$

при любых ξ^k и $\eta_k, k = 0,1,\ldots,m$, $|\eta|^2 = \sum_{k=0}^{m}|\eta_k|^2$, $a_{kj}(t,\xi^k) = \frac{\partial a_k(t,\xi^k)}{\partial \xi_j}$, а $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $p > 1, \alpha, \beta \neq p-1, 2p-1, \ldots, mp-1$, а числа c_1, c_2, c_3-положительные постоянные.

Отметим, что краевые условия зависят от чисел α и β.

Пусть X рефлексивное, сепарабельное банахово пространство. Определяются сильная монотонность, коэрцитивность и полунепрерывность оператора $B : X \to X^*$, где X^* является сопряженным к X пространством и доказывается следующая (см. книгу Гаевский Х., Грегер К., Захариас [5]).

Теорема 2.58. *При выполнении условий* (0.24), (0.25), (0.26) *и* $p \geq 2$ *оператор*

$$L : \dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(0,b) \to (\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(0,b))^*$$

является сильно монотонным и полунепрерывным.

Затем определяется обобщенное решение уравнения (0.23) и доказывается

Теорема 2.60. *Для любого* $f \in (\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(0,b))^*$ *обобщенное решение уравнения* (0.23) *при* $p \geq 2$ *существует и единственно.*

Далее рассматриваются нелинейные вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка специального вида

$$\mathcal{A}u \equiv -(t^\alpha(b-t)^\beta u')' + a(t,u) = f(t), \quad (0.27)$$

где $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$, $t \in (0,b)$, $f \in L_{2,-\alpha,-\beta}(0,b)$, а функция $a(t,\xi)$ непрерывна по ξ и для любых комплексных ξ и η удовлетворяет условиям

$$|a(t,\xi)| \leq c_1 t^\alpha (b-t)^\beta (1+|\xi|),$$

$$(a(t,\xi) - a(t,\eta)\overline{(\xi-\eta)} \geq c_2 t^\alpha (b-t)^\beta,$$

где c_1 и c_2 являются положительными постоянными.

Доказывается, что оператор $\mathcal{A}$ является сильно монотонным и полунепрерывным. Затем определяется обобщенное решение уравнения (0.27) и доказывается, что для любого $f \in \dot{W}^*_{\alpha,\beta}(0,b)$ существует единственное обобщенное решение.

В параграфе 2.4, который состоит из *двух* пунктов, изучается задача Дирихле для обыкновенных дифференциальных уравнений на бесконечном интервале $(1,+\infty)$.

В пункте 2.4.1 изучается задача Дирихле для самосопряженного дифференциального уравнения высокого порядка

$$Lu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + at^\beta u = f, \qquad (0.28)$$

где a-постоянное число, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, \alpha \neq 3, \cdots, \alpha \neq 2m-1$, $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$, $\beta \leq \alpha - 2m$. Определим оператор $Bu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)}$.

Аналогично случаю для конечного интервала определяется обобщенное решение для уравнения (0.28) и доказывается

Утверждение 2.66. *Обобщенное решение уравнения $Bu = f$ существует и единственно для любого $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.*

Затем определяется оператор $\mathbb{B} := t^{-\beta} B : L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ и доказываются следующие три теоремы.

Теорема 2.67. *Область определения оператора B состоит из функций $u \in \dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)$, для которых при $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ конечно значение $u^{(m-1)}(+\infty)$, а при $2m-2k-2 < \alpha < 2m-2k-1$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$, конечны также значения $u^{(k)}(+\infty)$.*

Теорема 2.68. *Оператор $\mathbb{B} : L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ при $\beta \leq \alpha - 2m$ является положительным и самосопряженным, а обратный оператор $B^{-1} : L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ ограничен, который при $\beta < \alpha - 2m$ является компактным оператором.*

Теорема 2.69. *Спектр оператора $\mathbb{B}$ при $\beta = \alpha - 2m$ чисто непрерывный и совпадает с лучом $\sigma(\mathbb{B}) = \sigma_c(\mathbb{B}) = [d(m,\alpha), +\infty)$.*

В пункте 2.4.2 рассматривается задача Дирихле для вырождающегося несамосопряженного дифференциального уравнения высокого порядка на бесконечном интервале

$$Lu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + a(-1)^{m-1} (t^{\alpha-1} u^{(m)})^{(m-1)} + pt^\beta u = f, \qquad (0.29)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $t \in (1,+\infty), \alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \cdots, 2m-1$, $\beta \leq \alpha - 2m$, $a \neq 0$, $a, p = const \in \mathbb{R}$, $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.

Определение 2.70. Функция $u \in \dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (0.29), если для любого $v \in \dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)$ выполняется равенство

$$(t^\alpha u^{(m)}, v^{(m)}) + a(t^{\alpha-1} u^m, v^{(m-1)}) + p(t^\beta u, v) = (f, v).$$

Доказывается следующая основная теорема (см. статью S.A. Zschorn [35]).

Теорема 2.71. *Пусть выполняются условия*

$$a(1-\alpha) > 0, d(m,\alpha) + \frac{a}{2}(1-\alpha) d(m-1, \alpha-2) + p > 0.$$

Тогда обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (0.29) *существует и единственно для любого* $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.

Теперь рассмотрим формально сопряженное к (0.29) уравнение

$$Sv \equiv (-1)^m (t^\alpha v^{(m)})^{(m)} - a(-1)^{m-1}(t^{\alpha-1}v^{(m-1)})^{(m)} + pt^\beta v = g(t), \qquad (0.30)$$

где $g \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$, а остальные условия как в предыдущей теореме.

Определим обобщенное решение этого уравнения путем перехода к сопряженному уравнению.

Определение 2.72. Функция $v \in L_{2,\beta}(1,+\infty)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (0.30), если выполняется равенство

$$(Lu, v) = (u, g).$$

Теорема 2.73. *Обобщенное решение уравнения* (0.30) *при выполнении условий Теоремы* (2.71) *существует и единственно для любого* $g \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.

Третья глава, которая состоит из *шести* параграфов, посвящена к изучению вырождающихся дифференциально-операторных уравнений.

В параграфе 3.1 сперва приводится *общая схема* изучения дифференциально-операторных уравнений, а затем рассматривается задача Дирихле для дифференциально-операторного уравнения высокого порядка в конечном интервале.

Пусть H *сепарабельное* гильбертово пространство. Обозначим через $\mathbb{H}_\beta(0,b)$, $\beta \geq 0$ гильбертово пространство функций $u(t), t \in (0,b)$ со значениями в H, для которых

$$\|u\|^2_{\mathbb{H}_\beta(0,b)} = \int_0^b t^\beta \|u(t)\|^2_H \, dt < \infty.$$

Рассматривается дифференциально-операторное уравнение

$$\mathbb{L}u \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + A(t^{\alpha-1}u^{(m)})^{(m-1)} + Pt^\beta u = f(t), \qquad (0.31)$$

где $t \in (0,b), \alpha \geq 0, \alpha \neq 1, \alpha \neq 3, \cdots, \alpha \neq 2m-1, f(t) \in \mathbb{H}_{-\beta}(0,b)$, а операторы A и P действуют в пространстве $\mathbb{H}$ и обладают *общей полной системой собственных функций*, образующих базис Рисса в $\mathbb{H}$ (являются так называемыми M-операторами, см. А.А. Дезин [10]).

Пусть $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая система собственных функций и, следовательно,

$$A\varphi_k = a_k\varphi_k, P\varphi_k = p_k\varphi_k, k \in \mathbb{N},$$

где a_k и $p_k, k \in \mathbb{N}$ являются собственными значениями операторов A и P.

Поскольку $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ образует базис Рисса в $\mathbb{H}$, то можем записать

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k.$$

Тогда операторное уравнение (0.31) расщепляется на бесконечную цепочку вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbb{L}_k u_k \equiv (-1)^m (t^\alpha u_k^{(m)})^{(m)}) + a_k (t^{\alpha-1} u_k^{(m)})^{(m-1)} + p_k t^\beta u_k = f_k(t), k \in \mathbb{N} \ (0.32).$$

Определение 3.1. Будем говорить, что функция $u_k \in D(\mathbb{L}_k), k \in \mathbb{N}$, если u_k является обобщенным решением уравнения (0.32) для некоторой функции $f_k \in L_{2,-\beta}(0,b)$.

Определение 3.2. Будем говорить, что $u \in \mathbb{H}_\beta$ принадлежит $D(\mathbb{L}_\beta)$ и $\mathbb{L}_\beta u = f$, если существует такая последовательность конечных сумм u^m, $m \in \mathbb{N}$, так что выполняются равенства

$$\lim_{m\to\infty} \|u^m - u\|_{\mathbb{H}_\beta(0,b)} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|f^m - f\|_{\mathbb{H}_{-\beta}(0,b)} = 0.$$

Функция $u \in \mathbb{H}_\beta(0,b)$, для которого $\mathbb{L}u = f$, называется обобщенным решением операторного уравнения (0.31). При доказательстве однозначной разрешимости для операторного уравнения (0.31) мы пользуемся следующей теоремой (доказательство см. в [10]).

Теорема 3.4. *Операторное уравнение* (0.31) *однозначно разрешимо для любой функции* $f \in \mathbb{H}_{-\beta}(0,b)$ *тогда и только тогда, когда все уравнения цепочки при любых* $f_k \in L_{2,-\beta}(0,b)$, $k \in \mathbb{N}$ *однозначно разрешимы и существует независимая от* $k \in \mathbb{N}$ *постоянная* $c > 0$, *такая что равномерно по* $k \in \mathbb{N}$ *выполняются неравенства*

$$\|u_k\|_{L_{2,\beta}(0,b)} \le c\|f_k\|_{L_{2,-\beta}(0,b)}. \qquad (0.33)$$

В параграфе 3.2 изучается задача Неймана для дифференциально-операторного уравнения высокого порядка

$$Pu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + t^\alpha Au = f, \qquad (0.34)$$

где $\alpha \ge 0$, $f \in L_{2,-\alpha}((0,b),H)$, оператор $A : H \to H$ является M-оператором в H и система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A\varphi_k = a_k\varphi_k, k \in \mathbb{N}$ образует базис Рисса в H. Применив общую схему изучения для операторного уравнения (0.34) для любого $u \in L_{2,\alpha}((0,b),H)$ и $f \in L_{2,-\alpha}((0,b),H)$ будем иметь

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (0.35)$$

Тогда получаем бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$P_k u_k \equiv (-1)^m (t^\alpha u_k^{(m)})^{(m)} + a_k t^\alpha u_k = f_k, f_k \in L_{2,-\alpha}, k \in \mathbb{N}. \qquad (0.36)$$

Определение 3.7. Функция $u \in L_{2,\alpha}((0,b),H)$ называется обобщенным решением задачи Неймана для уравнения (0.34), если функции $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$ в представлении (0.35) являются обобщенными решениями задачи Неймана для уравнений (0.36).

Доказывается следующая основная

Теорема 3.8. *При выполнении условия* $\rho(1-a_k, \lambda_m) > \varepsilon, k, m \in \mathbb{N}$ *обобщенное решение задачи Неймана для операторного уравнения* (0.34) *существует и единственно для любого* $f \in L_2((0,b),H)$.

В параграфе 3.3 рассматривается смешанная задача для операторного уравнения

$$Pu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + t^\alpha A u = f, \qquad (0.37)$$

где $t \in (0,b)$, $\alpha \geq 0$, $f \in L_{2,-\alpha}((0,b),H)$, а линейный оператор $A: H \to H$ действует сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Применив *общую схему* решение дифференциально-операторного уравнения (0.37) будем искать виде $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k$. Тогда получаем бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$P_k u_k \equiv (-1)^m (t^\alpha u_k^{(m)})^{(m)} + a_k t^\alpha u_k = f_k, \quad f_k \in L_{2,-\alpha}, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (0.38)$$

Определение 3.10. Функция $u \in L_{2,\alpha}((0,b),H)$ называется обобщенным решением смешанной задачи первого или второго типа для уравнения (0.37), если функции $u_k(t), k \in \mathbb{N}$ являются обобщенными решениями смешанной задачи первого или второго типа для уравнения (0.38).

Обозначим собственные значения операторов $\mathbb{B}$ и $\mathbb{S}$ (см. Главу 2) через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что выполняются неравенства

$$\rho(1-a_k, \lambda_m) > \varepsilon, \quad k, m \in \mathbb{N}, \qquad (0.39$$

$$\rho(-a_k, \nu_m) > \varepsilon, \quad k, m \in \mathbb{N}, \qquad (0.40)$$

где $\varepsilon > 0$ и ρ-расстояние в комплексной плоскости. Тогда справедлива следующая основная

Теорема 3.11. *При выполнении условия* (0.39) ((0.40)) *обобщенное решение смешанной задачи первого типа* (*второго типа*) *для уравнения* (0.38) *существует и единственно для любых* $f \in L_{2,-\beta}((0,b),H)$.

В параграфе 3.4 рассматривается вырождающееся дифференциально-операторное уравнение высокого порядка для произвольного веса

$$Pu \equiv (-1)^m(\rho(t)u^{(m)})^{(m)} + Au = f, \quad f \in L_2((0,b),H). \tag{0.41}$$

Пусть система собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора A образует базис Рисса в H. Пользуясь *общей схемой* исследования операторных уравнений решение будем искать в виде

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{0.42}$$

Тогда будем получать бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$P_k u_k \equiv (-1)^m(\rho(t)u_k^{(m)})^{(m)} + a_k u_k = f_k, \quad f_k \in L_2(0,b), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{0.43}$$

Для уравнений (0.43) мы сможем определить обобщенные решения $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$ задачи Дирихле (см. Главу 2).

Определение 3.13. Функция $u \in L_2((0,b),H)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (0.41), если функции $u_k(t), k \in \mathbb{N}$ в равенстве (0.43) являются обобщенными решениями задачи Дирихле для уравнений (0.43).

Пусть числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются собственными значениями оператора S. Предположим, что имеют место неравенства

$$\rho(-a_k, \lambda_m) > \varepsilon, \quad k, m \in \mathbb{N}, \tag{0.44}$$

где $\varepsilon > 0$ и ρ является расстоянием в комплексной плоскости.

Теорема 3.15. *При выполнении условия* (0.44) *обобщенное решение задачи Дирихле для операторного уравнения* (0.41) *существует и единственно для любых* $f \in L_2((0,b),H)$.

Если оператор $A : H \to H$ является самосопряженным, то мы можем дать следующее описание спектра оператора $\mathbb{P}$ (см. Ю.М. Березанский [1]).

Теорема 3.16. *Спектр* $\sigma(P)$ *оператора* $P : L_2((0,b),H) \to L_2((0,b),H)$ *совпадает с замыканием прямой суммы* $\sigma(P)$ *и* $\sigma(A)$, *т.е.*

$$\sigma(P) = \overline{\sigma(S) + \sigma(A)} \equiv \overline{\{\lambda_1 + \lambda_2 : \lambda_1 \in \sigma(S),\, \lambda_2 \in \sigma(A)\}}. \tag{0.45}$$

В параграфе 3.5 рассматривается вырождающееся дифференциально-операторное уравнение первого порядка

$$Lu \equiv t^{\alpha}u'(t) - Pu = f(t), \quad u(0) - \mu u(b) = 0, \tag{0.46}$$

где $t \in (0,b), \alpha \geq 0, \nu \in \mathbb{C}, P : H \to H$ является линейным оператором в сепарабельном гильбертовом пространстве H и $f \in L_{2,\beta}((0,b),H)$.

Следуя общей схеме вместо граничной задачи (0.46) для операторного уравнения получаем бесконечную цепочку граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_k u_k \equiv t^\alpha u_k'(t) + a_k u_k = f_k(t), \quad u_k(0) - \mu u_k(b) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{0.47}$$

Определяется оператор $L : L_{2,\beta}((0,b),H) \to L_{2,\beta}((0,b),H)$ как замыкание соответствующей дифференциальной операции (0.45), первоначально определенной на всех конечных линейных комбинациях $u_k(t)\varphi_k$, где $u_k \in D(L_k), k \in \mathbb{N}$.

Доказывается следующая основная теорема

Теорема 3.21. *Для равномерного выполнения по $k \in \mathbb{N}$ неравенств*

$$\|u_k\|_{L_{2,\beta}(0,b)} \leq c\|f_k\|_{L_{2,\beta}(0,b)}, c > 0$$

при $\mu = 0$ достаточно выполнение условий

$$Rep_k \geq M, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{0.48}$$

для некоторого $M \in \mathbb{R}$, а в случае $\mu \neq 0$ достаточным являются условия

$$|e^{\gamma_k b^{1-\alpha}} - \mu| \geq \varepsilon, \quad |Rep_k| \leq K, \tag{0.49}$$

для любых $k \in \mathbb{N}$ и некоторого $\varepsilon > 0, K > 0$, где $\gamma_k = \frac{p_k}{1-\alpha}$.

В параграфе 3.6, который состоит из *двух* пунктов, рассматриваются вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения в бесконечном интервале $(1,+\infty)$.

В пункте 3.6.1 рассматривается задача Дирихле для вырождающегося самосопряженного дифференциально-операторного уравнения

$$Lu \equiv (-1)^m (t^{(\alpha)} u^{(m)})^{(m)} + At^\beta u = f(t), \tag{0.50}$$

где $f \in L_{2,-\beta}(((1,+\infty),H)$, а линейный оператор $A : H \to H$ является M-оператором.

Нетрудно убедиться, что при выполнении условия $\rho(-a_k, \sigma(\mathbb{L})) > \varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{B}u \equiv (-1)^m t^{-\beta}(t^\alpha u^{(m)})^m$, $A\varphi_k = a_k\varphi_k$, $k \in \mathbb{N}$ и ρ-расстояние в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, равномерно относительно $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $\|u_k\|_{L_{2,\beta}(1,+\infty)} \leq c\|f_k\|_{L_{2,-\beta}(1,+\infty)}$. Поэтому обобщенное решение уравнения (0.50) существует и единственно для любого $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.

Когда оператор A является самосопряженным, имеет место следующая

Теорема 3.24. *Спектр оператора $\mathbb{L}$ совпадает с замыканием прямой суммы спектров $\sigma(\mathbb{B})$ и $\sigma(A)$, т.е.*

$$\sigma(\mathbb{L}) = \overline{\sigma(\mathbb{B}) + \sigma(A)}.$$

В пункте 3.6.2 рассматривается задача Дирихле для вырождающегося несамосопряженного дифференциально-операторного уравнения

$$Lu \equiv (-1)^m (t^{(\alpha)} u^{(m)})^{(m)} + (-1)^{m-1} A (t^{\alpha-1} u^{(m)})^{(m)} + P t^\beta u = f(t), \qquad (0.51)$$

где $t \in (1, +\infty)$, $f \in L_{2,-\beta}((1, +\infty), H)$, а линейные операторы A и P, действующие в H, являются M-операторами.

Как и выше, операторное уравнение (0.51) расщепляется в бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_k u_k \equiv (-1)^m (t^\alpha u_k^{(m)})^{(m)} + (-1)^{m-1} a_k (t^{\alpha-1} u^{(m)})^{(m-1)} + p_k t^\beta u = f_k(t), (0.52)$$

где $f_k(t) \in L_{2,-\beta}(1, +\infty)$, а числа a_k и p_k, $k \in \mathbb{N}$ являются собственными значениями операторов A и P.

При фиксированном $k \in \mathbb{N}$ достаточным условием разрешимости уравнения (0.52) является условие

$$a_k(1-\alpha) > 0, \gamma_k = d(m, \alpha) + \frac{a_k}{2}(1-\alpha) d(m-1, \alpha-2) + p_k > 0, k \in \mathbb{N}, \quad (0.53)$$

где $a_k \neq 0$, a_k и p_k некоторые числа, $k \in \mathbb{N}$.

Используя *общую схему* доказывается, что при *равномерном* выполнении неравенств

$$a_k(1-\alpha) > 0, \gamma_k = d(m, \alpha) + \frac{a_k}{2}(1-\alpha) d(m-1, \alpha-2) + p_k > \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N} \quad (0.54)$$

справедлива следующая

Теорема 3.25. *При выполнении условия* (0.54) *для любого* $k \in \mathbb{N}$ *операторное уравнение* (0.51) *имеет единственное обобщенное решение для любого* $f \in \mathbb{H}_{-\beta}(1, +\infty)$. *При этом обратный оператор* L^{-1} *ограничен.*

Отметим также, что в отличие от одномерного случая обратный оператор будет компактным лишь тогда, когда пространство H является конечномерным (см. статью E.V. Poulsen [32]).

Литература

[1] Ю.М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова Думка, Киев, 1965 г.

[2] А.В. Бицадзе, *Уравнения смешанного типа*, Москва, Издательствово АН СССР, 164 стр., 1959 г.

[3] Г.Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ч. 1, Москва, Изд. ин. лит., 799 стр., 1949 г.

[4] М.И. Вишик, *Эллиптические уравнения, вырождающиеся на границе области*, Математический сборник, том 35(77), ном. 3, стр. 513–568, 1954 г.

[5] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978 г.

[6] В.П. Глушко, *Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. I*, Дифференциальные уравнения, том 4, номер 9, стр. 1584-1597, 1968 г.

[7] В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Киев, Наукова думка, 284 стр., 1984 г.

[8] А.А. Дезин, *К общей теории граничных задач*, Математический сборник, том 100(142), ном. 2(6), стр. 171-180, 1976 г.

[9] А.А. Дезин, *Вырождающиеся операторные уравнения*, Математический сборник, том 115(157), ном. 3(7), стр. 323-336, 1981 г.

[10] А.А. Дезин, *Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач*, Труды МИАН, том 229, Москва, Наука, 3–175, 2000 г.

[11] П.А. Жаров, *Компактные вложения пространств функций одной переменной со степенным весом*, Известия ВУЗ-ов, Математика, ном. 8, стр. 82–85, 1988 г.

[12] В.К. Захаров, *Теоремы вложения для пространства с метрикой, вырождающиеся на прямолинейном участке границы*, Доклады АН СССР, том 114, ном. 3, стр. 468–471, 1957 г.

[13] В.К. Захаров, *Первая краевая задача для уравнения эллиптического типа четвертого порядка, вырождающегося на границе области*, Доклады АН СССР, том 114, ном 4, стр. 694–697, 1957 г.

[14] М.В. Келдыш, *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области*, Доклады АН СССР, том 77, ном. 2, стр. 181–183, 1951 г.

[15] В. В. Корниенко, *О спектре вырождающихся операторных уравнений*, Математические заметки, том 68, ном 5, стр. 677–691, 2000 г.

[16] С.Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, М.: Наука, 464 стр., 1967 г.

[17] Л.Д. Кудрявцев, *О вариационном методе отыскания обобщенных решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах со степенным весом*, Дифференциальные уравнения, том 19, ном. 10, стр. 1723–1740, 1983 г.

[18] Л.Д. Кудрявцев, *Об эквивалентных нормах в весовых пространствах*, Труды Математического института АН СССР, том 170, стр. 161–190, 1984 г.

[19] П.И. Лизоркин, С.М. Никольский, *Коэрцитивные свойства эллиптических уравнений с вырождением. Вариационный подход*, Труды МИАН СССР, т. 157, стр. 90–118, 1981 г.

[20] Е.В. Маховер, *О спектре собственных частот пластинки с острым краем*, Ученые записки Ленинградского гос. пед. ин-та им. Герцена, т. 197, стр. 113-118, 1958 г.

[21] С.Г. Михлин, *Вырождающиеся эллиптические уравнения*, Вестник ЛГУ, вып. 3, ном. 8, с. 19-48, 1954 г.

[22] М.А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, М., Наука, 527 стр., 1969 г.

[23] А. Нарчаев, *Первая краевая задача для эллиптических уравнений вырождающихся на границе области*, ДАН СССР, т. 156, ном. 1, стр. 28-31, 1964 г.

[24] О.А. Олейник, Е.В. Радкевич, *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой*, Сборник Матем. анализ. 1969. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР), Москва, стр. 7–252, 1971 г.

[25] Р. Ойнаров, М. Отелбаев, *О количестве решений одного вырожденного уравнения*, Известия АН Каз. ССР, сер. физ.-мат., ном. 1, стр. 59-61, 1984 г.

[26] М.М. Смирнов, *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения*, Москва, Наука, 292 стр., 1966 г.

[27] С.А. Терсенов, Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе области, Новосибирск, Государственнный университет, 1973 г.

[28] Ф. Трикоми, *О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа*, Москва, М.-Л., Гостехиздат, 192 стр., 1947 г.

[29] Г. Фикера, *К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка*, Математика, Периодический сборник переводов иностранных статей, том 7, ном. 6, с. 99–121, 1963 г.

[30] V.I. Burenkov, *Sobolev spaces on domains*, Teubner, 199 p., 1999.

[31] G. Jaiani, *On a generalization of the Keldysh theorem*, Georgian Mathematical Journal, vol. 2(3), pp. 291–297, 1995.

[32] Ebbe Tue Poulsen, *Boundary values in function space*, Math. Scand. 10, pp. 45–52, 1962.

[33] R.E. Showalter, *Hilbert space methods for partial differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 01, 1994, www.emis.de/journals/EJDE/Monographs/01/abstr.html.

[34] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teil 1, Grundlagen, Teubner Verlag, Stuttgart, 405 S., 2000.

[35] S.A. Zschorn, *Nonselfadjoint Degenerate Differential Operator Equations of Higher Order on Infinite Interval*, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, no 2, pp. 39-45, 2014.

Список опубликованных работ по теме диссертации

[1] Л. Тепоян, *Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения четвертого порядка*, Дифференциальные уравнения, том 23, ном. 8, стр. 1366-1376, 1987 г.

[2] Л. Тепоян, *Об одном вырождающемся дифференциально-операторном уравнении высокого порядка*, Известия Академии Наук Армении, Математика, том 34, ном. 5, стр. 48-56, 1999 г.

[3] Л. Тепоян, Хосейн Ансари, *Вырождающиеся обыкновенные дифференциальные уравнения четвертого порядка в бесконечном промежутке*, Вестник РАУ, Физико-математические и естественные науки, ном. 1, стр. 5-12, 2010 г.

[4] Л. Тепоян, Есмаил Юсефи, *Смешанная задача для вырождающегося дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка*, Вестник РАУ, Физико-математические и естественные науки, ном. 2, стр. 26-33, 2010 г.

[5] L. Tepoyan, G.S. Hakobian, *Uniqueness of generalized solution for a nonlinear differential equation with degeneration*, Izvestya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii, Matematika,vol. 35, no. 3, pp. 74-79, 2000 .

[6] L. Tepoyan, *On the spectrum of a degenerate operator*, Izvestya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii, Matematika, vol. 38, no. 5, pp. 53-57, 2003 .

[7] L. Tepoyan, G.S. Hakobian, *On boundary value problem for the nonlinear degenerate differential equation of higher order*, Izvestya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii, Matematika, vol. 38, no. 2, pp. 5-12, 2004 .

[8] L. Tepoyan, *The mixed problem for a degenerate operator equation*, Bulletin of TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics), vol. 12, pp. 15-29, 2008 .

[9] L. Tepoyan, S. Osipova, *On Euler type equation*, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, no. 1, pp. 16-19, 2009 .

[10] L. Tepoyan, Daryoush Kalvand, *Neumann problem for the differential equations of the fourth order*, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, no. 1, pp. 22-26, 2010 .

[11] L. Tepoyan, *The Neumann problem for a degenerate differential-operator equation*, Bulletin of TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics), vol. 14, pp. 1-9, 2010 .

[12] L. Tepoyan, Hosein Ansari, *Dirichlet problem for degenerate differential equations of fourth order on infinite interval*, World Applied Sciences Journal (WASJ), vol. 17, no. 7, pp. 852-855, 2012 .

[13] L. Tepoyan, H. Grigoryan, *On degenerate nonself-adjoint differential equations of fourth order*, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, vol. 229, no. 3, pp. 29-33, 2012 .

[14] L. Tepoyan, *Degenerate differential-operator equations of higher order and arbitrary weight*, Asian-European Journal of Mathematics, vol. 5, no. 02, pp. 1250030-1-1250030-8, 2012 .

[15] L. Tepoyan, *Degenerate differential-operator equations on infinite intervals*, Journal of Mathematical Sciences, vol. 189, no. 1, pp. 164-172, 2013 .

[16] L. Tepoyan, *Nonself-adjoint degenerate differential-operator equations of higher order*, Bulletin of TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics), vol. 17, no. 2, pp. 15-23, 2013 .

[17] L. Tepoyan, B.-W. Schulze, *The singular functions of branching edge asymptotics*, Operator Theory: Advances and Applications, Springer, Basel, vol. 231, pp. 27-53, 2013 ..

[18] L. Tepoyan, *Nonself-adjoint degenerate differential equations of higher order*, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, vol. 234, vol. 2, pp. 24-29, 2014 .

[19] L. Tepoyan, S. Zschorn, *Nonself-adjoint degenerate differential equations of higher order on infinite interval*, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 50, no. 3, pp. 114-118, 2015 .

[20] L. Tepoyan, M. Hedayat Mahmoudi, B.-W. Schulze, *Continuous and variable branching asymptotics*, Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, no. 6, pp. 69-112, 2015 .

[21] L. Tepoyan, *Degenerate first order differential-operator equations*, Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, vol. 3, no. 3, pp. 163-169, 2019 .

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Լ.Պ. Տեփոյան

ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ-ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ներկայացվող ատենախոսության մեջ դիտարկվում են հետևյալ բարձր կարգի վերասերվող դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումները

$$Lu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + A(t^{\alpha-1} u^{(m-1)})^{(m)} + t^\beta P u = f,$$

որտեղ $t \in V_t$, $V_t = (0, b)$ կամ $V_t = (1, \infty)$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \cdots, 2m-1$, $f \in L_{2,-\beta}(V_t, H) \equiv \mathbb{H}_{-\beta}(V_t)$, այսինքն

$$\|f\|^2_{\mathbb{H}_{-\beta}(V_t)} = \int_{V_t} t^{-\beta} \|f(t)\|^2_H \, dt < \infty,$$

$A, P : H \to H$ հանդիսանում են, ընդհանրապես ասած, գծային *անսահմանափակ* օպերատորներ, H *սեպարաբել* հիլբերտյան փարածության մեջ:

1) Սոբոլևի կշռային $\dot{W}^m_\alpha(0, b)$, $W^m_\alpha(0, b)$, $W_\rho(0, b)$ և $\dot{W}^m_\alpha(1; +\infty)$ փարածությունների համար ապացուցվել են համապատասխան ներդրման օպերատորների անընդհատությունը, ինչպես նաև հետազոտվել են այդ ներդրումների կոմպակտության հարցերը,

2) Ապացուցվել են ընդհանրացված լուծման գոյության և միակության թեորեմներ միաչափ բարձր կարգի վերասերվող դիֆերենցիալ հավասարումների համար ինչպես վերջավոր $(0, b)$, այնպես էլ անվերջ $(1, +\infty)$ միջակայքերում,

3) Մենք ապացուցում ենք անընդհատության և կոմպակտության թեորեմներ Դիրիխլեի խնդրի համար (վերջավոր և անվերջ միջակայքերում), Նեյմանի և խառը խնդիրների համար, Դիրիխլեի խնդրի համար կամայական կշռի դեպքում, ինչպես նաև մի առաջին կարգի հավասարման համար $(0, b)$ միջակայքերում: Հետազոտվել են նաև համապատասխան օպերատորների սպեկտրները,

4) Դիրիխլեի և Նեյմանի միաչափ խնդիրների համար վերջավոր $(0, b)$ միջակայքում տրվել է համապատասխան օպերատորների որոշման տիրույթների նկարագիրը,

5) Վերջավոր $(0, b)$ միջակայքում ապացուցվել են ընդհանրացված լուծման գոյությունը և միակությունը Դիրիխլեի, Նեյմանի և խառը խնդիրների համար բարձր կարգի վերասերվող դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումների համար, մի եզրային խնդրի համար վերասերվող առաջին կարգի դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարման համար, մի բարձր կարգի վերասերվող օպերատորային հավասարման համար կամայական կշռի դեպքում, ինչպես նաև հետազոտվել են համապատասխան օպերատորների սպեկտրները,

6) Մենք ապացուցում ենք ընդհանրացված լուծման գոյությունը և միակությունը բարձր կարգի վերասերվող դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումների համար $(1, +\infty)$ միջակայքում:

R E S U M E

Liparit Tepoyan

Boundary-value problems for degenerate differential-operator equations

In presented work we consider differential-operator equation

$$Lu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + A(t^{\alpha-1} u^{(m-1)})^{(m)} + t^\beta P u = f,$$

where $t \in V_t$, $V_t = (0, b)$ or $V_t = (1, \infty)$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \cdots, 2m-1$, $f \in L_{2,-\beta}(V_t, H) \equiv \mathbb{H}_{-\beta}(V_t)$, i.e.

$$\|f\|^2_{\mathbb{H}_{-\beta}(V_t)} = \int_{V_t} t^{-\beta} \|f(t)\|^2_H \, dt < \infty,$$

linear operators $A, P : H \to H$ are, in general, *unbounded operators* in *separable* Hilbert space H.

In other words we consider ordinary differential equations with operator coefficients. We suppose that this operators have *common complete system* of eigenfunctions $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ which form *Riesz* basis in H. These equations contains not only classical equations of mathematical physics but also more general equations.

The basic results obtained in thesis are the following:

1) For weighted Sobolev spaces $\dot{W}^m_\alpha(0, b)$, $W^m_\alpha(0, b)$, $W_\rho(0, b)$ and $\dot{W}^m_\alpha(1; +\infty)$ we prove continuity of corresponding embedding operators and study compactness of this embeddings,

2) We prove theorems on existence and uniqueness of generalized solution for the one-dimensional degenerate differential equations of higher order both in finite interval $(0, b)$ and in infinite interval $(1, +\infty)$,

3) We prove continuity and compactness theorems for inverse operators of Dirichlet problem (on finite and infinite intervals), Neumann and mixed problems on $(0, b)$, for Dirichlet problem in case of arbitrary weight, as well as for one first order equation. We explore also the spectra of corresponding operators,

4) For the one-dimensional Dirichlet and Neumann problems on finite interval we describe domain of definitions for corresponding operators,

5) We prove existence and uniqueness of generalized solutions of Dirichlet, Neumann and mixed problems for degenerate differential-operator equation of higher order, for one degenerate operator equation of higher order for arbitrary weight and for first order degenerate differential-operator equation in finite interval $(0, b)$ as well as explore the spectrum of corresponding operators,

6) We prove that generalized solution for degenerate differential-operator equation of higher order exists and is unique on infinite interval $(1, +\infty)$.