ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Պետրոսյան Գարիկ Վարդանի

ՏԱՐԲԵՐ ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՈՐՈՇԱԿԻ ՔԱՆԱԿԱԿԱՆ ԵՎ ՈՐԱԿԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄ

Ա.01.09. <<Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն>> մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի աստիճանի հայցման ատենախոսության

Երևան 2021

Ատենախոսության թեման հաստատվել է **Երևանի պետական համալսարանում:**

Գիտական ղեկավար՝
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Ա. Չուբարյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Է. Մ. Պողոսյան

ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Ս. Մ. Սայադյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Ռուս-Հայկական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2021 թ. հունիսի 22-ին, ժամը 15:00-ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈԿ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2021 թ. մայիսի 13-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Տ. Ն. Հարությունյան

Ատենախոսության ընդհանուր նկարագիրը

Սույն ատենախոսությունում ուսումնասիրված են տարբեր տրամաբանական համակարգերի որոշակի քանակական և որակական հատկությունները:

Թեմայի արդիականությունը. Արտածումների բարդության ոլորտը, որում ակտիվ հետազոտությունները նախաձեռնվել են Cook-ի և Reckhow-ի[1] աշխատությունով, ուսումնասիրում է ասույթային բանաձևերի արտածումների բարդության հայտանիշները տարբեր արտածման համակարգերում: Կարևոր խթանիչն է **P** և **NP** բարդության դասերի հարաբերության խնդրի լուծումը: Մասնավորապես, հայտնի է, որ ասույթային հաշվի այնպիսի համակարգի գոյությունը, որում բոլոր նույնաբանությունները ունեն «կարճ» արտածումներ, համարժեք է NP=coNP պնդմանը[1]: Այս հանգամանքը բացահայտում է կարևորագույն կապը արտածումների բարդության և հաշվարկելիության բարդության տեսության կարևորագույն խնդրի միջև, քանի որ NP դասի տարբերակումից coNP դասից կհետևի P և NP դասերի տարբերակումը: Բնական է, որ որոշակի պնդման կարճագույն ապացույցի երկարությունը էապես կախված է այն համակարգից, որում կատարվում է ապացույցը: Այսպիսով, արտածումների բարդության կարևորագույն չլուծված խնդիրներից մեկը հետևյալն է՝ արդյոք գոյություն ունի ասույթային հաշվի այնպիսի համակարգ, որում ցանկացած նույնաբանություն ունի ոչ ավելին, քան բանաձևի երկարությունից բազմանդամային երկարությամբ արտածում /այդպիսի համակարգերը[1] ում անվանվում են super համակարգեր/: Հայտնի է, որ բազմաթիվ համակարգեր super չեն, սակայն ասույթային հաշվի առավել բնական (սեկվենցիալ կամ Ֆրեգեի) համակարգերի վերաբերյալ super համակարգ լինելու խնդիրը դեռ բաց է: Արտածումների տեսանկյունից Ֆրեգեի համակարգերը համարվում են առավել «բարդ» հետևյալ իմաստներով՝

ա/ բոլոր այն բանաձևերը, որոնք որոշ այլ համակարգերում ունեն արտածումների բարդության ստորին ցուցչային գնահատականներ, Ֆրեգեի համակարգերում արտածվում են բազմանդամային բարդությամբ,

բ/ այս համակարգերում ստորին սուպեր-բազմանդամային գնահատականի ստացումը հայտնի մեթոդներով թվում է անհարին, կամ չափազանց դժվար:

Ասույթային արտածումների բարդության ոլորտի հիմնական խնդիրն է բացահայտել այն միջոցները, որոնք անհրաժեշտ են որոշակի պնդումն ապացուցելու համար: Սա հեռահար նպատակն է, սակայն առկա են նաև այլ հետաքրքրություններ, որոնցով նույնապես պատճառաբանվում են այս ոլորտում առկա հետազոտությունների մեծամասնությունը: Այդպիսի խնդիրներից է, մասնավորապես, **ԻՐԱԳՈՐԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ** խնդրի /**SAT** problem-ի / լուծումը: Անիրագործելիությունը հաստատող որևէ ալգորիթմ սահմանում է որոշակի արտածման համակարգ, որը

---

[1] Cook S. A. and Reckhow A. R., "The relative efficiency of propositional proof systems". Symbolic Logic, 44, (1979), 36-50

կրկնորինակում է ալգորիթմի կատարման քայլերը և, հակառակը, անիրագոծելիությունը փաստող որևէ արտածման համակարգ հանդիսանում է SAT problem-ը լուծող ալգորիթմ: SAT problem-ի ժամանակակից լուծողները որոնում են որոշակի «թույլ» համակարգերում (Resolution, Polynomial Calculus, Cutting Planes) արտածումների բարդության վերին և ստորին գնահատականները, որոնք հուշում են SAT problem-ի լուծման համար նվազագույն և առավելագույն բավարար ռեսուրսների մասին: Այսպիսով, արտածումների բարդության բնութագրիչների հետազոտումները հետաքրքիր են նաև արտածման «թույլ» համակարգերում:

Նպատակն ու խնդիրները. Աշխատանքի հիմնական նպատակն է ասույթային հաշվի տարբեր տրամաբանությունների որոշակի համակարգերում արտածումների տարբեր բնութագրիչների գնահատականների հետազոտումը և ըստ այդմ նաև այդ համակարգերի որոշակի որակական հատկությունների առկայության հայտնաբերումը: Հիմնական խնդիրներն են՝

- դասական տրամաբանության Ֆրեգեի համակարգերում արտածումների բազմանդամորեն սահմանափակ բարդության բնութագրիչներով բանաձևերի հնարավոր դասերի հայտնաբերումը,
- էականորեն հավասար բանաձևերի արտածումների բարդության բնութագրիչների հարաբերությունների հետազոտումը տարբեր տրամաբանությունների որոշակի համակարգերում, ,
- տարբեր տրամաբանությունների որոշակի համակարգերի մոնոտոնության և խիստ մոնոտոնության հատկությունների հետազոտում:

Հետազոտման մեթոդներն են մաթեմատիկական տրամաբանության և հաշվարկելիության բարդության տեսության մեթոդները, կոմբինատոր օպտիմիզացիայի մեթոդները:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթներն են՝

1. Դասական տրամաբանության **Ֆրեգեի** $\mathcal{F}$ համակարգերում որոշակի դասերի նույնաբանությունների արտածումների բարդության բոլոր բնութագրիչների բազմանդամային սահմանափակ լինելու փաստը, ինչպես նաև այնպիսի տեսքերի բանաձևերի դասերի նկարագրումը, որոնց արտածումների բարդության բնութագրիչների բազմանդամորեն սահմանափակ լինելու հատկության արկայությունը հանգեցնում է բոլոր /կամ որոշակի սահմանափակումներով/ նույնաբանությունննեի բազմանդամորեն սահմանափակ բարդության բնութագրիչներով արտածումների գոյությանը:

2. Տարբեր տրամաբանությունների մի շարք համակարգերում էականորեն հավասար բանաձևերի արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատականների էապես տարբեր լինելու փաստը:

3. Տարբեր տրամաբանությունների մի շարք համակարգերում մոնոտոն լինելու, մեկ այլ համակարգերի մոնոտոն չլինելու և բոլոր դիտարկված համակարգերի խիստ մոնոտոն չլինելու փաստերի ապացույցները:

Գիտական նորույթը. *Ներկայացվող հետազոտությունների ուղղությամբ ստացված բոլոր արդյունքները նոր են՝ ա/ առաջին անգամ նկարագրվել են դասական նույնաբանությունների հետաքրքիր դասեր, որոնց արտածումների բարդության* բնութագրիչների բազմանդամորեն սահմանափակ լինելու փաստը կարող է հանգեցնել հայտնի NP և coNP բարդության դասերի համընկմանը, բ/ ապացուցվել է, որ էականորեն հավասար դասական և ոչ դասական նույնաբանութնուները կարող են ունենալ *արտածումների բարդության* բնութագրիչների էականորեն տարբեր գնահատականներ, գ/ առաջին անգամ լուծվել է դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների մոնոտոն և ոչ մոնոտոն լրիվ համակարգերի գոյության հարցը:

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը. Որոշակի համակարգերում արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատումները, ունենալով տեսական նշանակություն, **ունեն նաև պրակտիկ կիրառություն** թեորեմների արտածումների ավտոմատացման գործընթացում, ինչպես նաև այնպիսի ոլորտներում, ինչպիսիք են Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Computational Biology, Cryptography, Data Mining, Machine Learning, Hardware Design-ը:

Հրապարակումներ. Ատենախոսության հետազոտությունների վերաբերյալ տպագրվել են 14 գիտական աշխատություններ, որոնց ցանկը բերվում է սույն սեղմագրի վերջնամասում:

Ստացված արդյունքների փորձարկումը. Ատենախոսությունում ներկայացված արդյունքները բազմիցս ներկայացվել և քննարկվել են տարբեր սեմինարների և միջազգային գիտաժողովների ընթացքում՝

- Logic Colloquium 2016. European Summer Meeting of the. Association for Symbolic Logic. Leeds 2016.
- Logic Colloquium 2017. European Summer Meeting of the. Association for Symbolic Logic. Stockholm 2017.
- Logic Colloquium 2018. European Summer Meeting of the. Association for Symbolic Logic. Udine 2018.
- Logic Colloquium 2019. European Summer Meeting of the. Association for Symbolic Logic. Prague 2019.
- ԵՊՀ ՈՒԳԸ գիտական նստաշրջան 2017
- ԵՊՀ ՈՒԳԸ գիտական նստաշրջան 2018
- «Բարդության ընդհանուր տեսության» սեմինար

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը. Ատենախոսությունը կազմված է ներածությունից, չորս գլուխներից, եզրակացությունից, օգտագործված գրականության ցանկից /43 անուն/, մեկ հավելվածից և երեք օգտակար ցուցակներից: Ծավալը 89 էջ է:

Ատենախոսության համառոտ բովանդակություն

Առաջին գլխում սահմանվում են բոլոր այն գաղափարները, որոնք օգտագործված են հետագա հետազոտություններում

1.1 կետում տրվում են դասական տրամաբանության որոշ արտածման համակարգերի սահմանումները, իսկ դրանց նմանատիպերը ոչ դասական տրամաբանությունների համար տրվում են Հավելված 1.-ում: Դիտարկված համակարգերն են՝ դասական, ինտուիցիոնիստական, *Յոհանսոնի* /մինիմալ/ տրամաբանությունների **Ֆրեգեի** $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}I$, $\mathcal{F}M$ համակարգերը**,** նույն տրամաբանությունների ***PC, PI, PM*** **սեկվենցյալ** համակարգերը, ինչպես նաև, հետևելով Asterias,...[2] աշխատությանը, ***PMon***–մոնոտոնիկ տրամաբանության համակարգը: Դիտարկվում են նաև այդ բոլոր համակարգերի առանց **հատույթի կանոնի** տարբերակները համապատասխանաբար՝ ***PC⁻, PI⁻, PM⁻*** և ***Pmon⁻:***

1.2. կետում, հենվելով Ա. Չուբարյանի[3] աշխատության վրա, տրվում է հետագա հետազոտությունների համար կարևոր **որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարը դասական տրամաբանության համար:** Հետևելով ընդունված սահամնումներին, փոփոխականները և դրանց ժխտումները կանվանենք լիտերալներ: K կոնյունկտը իրենից ներկայացնում է լիտերալների բազմություն (կոնյունկտը չի կարող պարունակել փոփոխականը և այդ փոփոխականի ժխտումը միաժամանակ):

Դիցուք $\boldsymbol{\varphi}$–ն ասույթային հաշվի բանաձև է, իսկ $\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2},\dots,\boldsymbol{p_n}\}$–ն՝ այդ բանաձևի բոլոր փոփոխականների բազմությունը: $\boldsymbol{P'}=\{\boldsymbol{p_{i_1}},\boldsymbol{p_{i_2}},\dots,\boldsymbol{p_{i_m}}\}$-ով $(\boldsymbol{1}\le\boldsymbol{m}\le\boldsymbol{n})$ նշանակենք $\boldsymbol{P}$–ի որևէ ենթաբազմություն:

Սահմանում 1.2.2. Տրված $\sigma=\{\sigma_1,\dots,\sigma_m\}\subset E^m$–ի /m-չափանի միավոր խորանարդի/ համար $K^\sigma=\left\{p_{i_1}^{\sigma_1},p_{i_2}^{\sigma_2},\dots,p_{i_m}^{\sigma_m}\right\}$ կոնյունկտը կանվանենք $\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{1}$–որոշիչ ($\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{0}$-որոշիչ), եթե ամեն p_{i_j}–ին σ_j արժեքը $(1\le j\le m)$ վերագրելուց հետո կստանանք φ–ի արժեքը (1 կամ 0) անկախ մնացած փոփոխականների արժեքներից:

Սահմանում 1.2.3. $D=\{K_1,K_2,\dots,K_l\}$ ԴՆՁ-ն կանվանենք որոշիչ ԴՆՁ (ոԴՆՁ) φ–ի համար, եթե $\varphi=D$ և ցանկացած K_j $(1\le j\le l)$ կոնյունկտ 1-որոշիչ է φ–ի համար:

1.2.1. կետում տրվում են ***E, R, OP*** **համակարգերի սահմանումները** դասական տրամաբանության համար, իսկ դրանց նմանատիպերը ոչ դասական տրամաբանությունների համար տրվում են Հավելված 1.-ում: Այս համակարգերում հենասույթները նախապես ամրագրված չեն: Նրանք ընտրվում են յուրովի յուրաքանչյուր բանաձևի համար: Այստեղ սահմանված ամեն մի համակարգ պարունակում է մեկ

[2] Asterias A., Galesi N., Gavalda R., Monotone Proofs of the Pigeon-hole Principle, Mathematical Logic Quarterly, 47, 2001, 4, 461-474.

[3] A.A.Chubaryan: Comparison of proof sizes in systems and substitution systems of Frege, *Izvestiya NAN Armenii, Matematika, vol. 35, No. 5*, 2002, 71-84.

արտածման կանոն դասական տրամաբանության համար և վերջավոր քանակությամբ արտածման կանոններ ոչ դասական տրամաբանությունների համակարգերի համար:

Հիմնվելով որոշիչ ԴՆՁ-ի գաղափարի վրա Ա. Չուբարյանի վերոհիշյալ աշխատությունում սահմանված է արտածման ***E*** համակարգը: Կամայական բանաձևի համար ***E***-ում որպես հենասույթ վերցվում են այդ բանաձևի որևէ ոԴՆՁ-ի կոնյունկտները:

E համակարգը ունի մեկ արտածման կանոն՝ կրճատման կանոնը (ε-կանոնը) արտածում է $K' \cup K''$-ն $K' \cup \{p\}$ և $K' \cup \{\neg p\}$ կոնյունկտներից կամայական p ասույթային փոփոխականի և K', K'' կոնյունկտների համար:

E-արտածում է կոչվում կոնյունկտների այնպիսի վերջավոր հաջորդականությունը որոնցից յուրաքնչյուրը կամ արտածվող բանաձևին համապատասխանող հենասույթներից է, կամ ստացվել է նախորդներից ε-կանոնի կիրառմամբ: Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \dots, \boldsymbol{K_l}\}$ ԴՆՁ-ն նույնաբանություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\{\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \dots, \boldsymbol{K_l}\}$ հենասույթներից կարելի է արտածել դատարկ կոնյունկտը ($\emptyset$) $\boldsymbol{\varepsilon}$-կանոնով:

Դասական տրամաբանության ռեզոլյուցիոն *RC* համակարգը կոնյունկտիվ նորմալ ձևերով (ԿՆՁ) տրված բանաձևի հերքման մեթոդով արտածման համակարգն է: Հայտնի է ասույթային հաշվի բանաձևերից դիզյունկցիաների համակարգին /ԿՆՁ-ին/ անցնելու այնպիսի եղանակ, որ ստացված ԿՆՁ-ի երկարությունը ոչ ավելին, քան վեց անգամ է գերազանցում տրված բանաձևի երկարությունը:

Ստացված ԿՆՁ-ի յուրաքանչյուր դիզյունկտ կարող է համարվել հենասույթ: Ռեզոլյուցիոն կանոնը $\boldsymbol{D'} \cup \{\boldsymbol{p}\}$ և $\boldsymbol{D''} \cup \{\boldsymbol{p}\}$ –ից արտածում է $\boldsymbol{D'} \cup \boldsymbol{D''}$-ը, որտեղ $\boldsymbol{D'}$ և $\boldsymbol{D''}$-դիզյունկտներ են, իսկ $\boldsymbol{p}$-ն փոփոխական: $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ ԿՆՁ-ն կոչվում է հերքվող այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի դատարկ դիզյունկտի (Λ) արտածում $\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}$ հենասույթներից: Իր հերթին, յուրանքչյուր բանաձևին համապատասխանեցված ԿՆՁ-ի հերքելիությունը համարժեք է տրված բանաձևի նույնաբանություն հանդիսանալուն: Минц[4] աշխատությունում նկարագրված է ռեզոլուցիայի ինտուիցիոնիստական համակարգը ***RI,*** որը սեկվենցիոն համակարգ է, արտածման կանոններից ոմանց որոշակի սահմանափակումների պարտադրմամբ սահմանվում է Յոհանսոնի տրամաբանության ***RJ*** ռեզոլյուցիոն համակարգը: Վերջին երկու համակարգերի և ***Pmon*** համակարգի արտածումների հիման վրա կառուցվում են ոԴՆՁ-եր նաև այդ երեք ոչ դասական տրամաբամությունների համար /տես, օրինակ, An. Chubaryan &...[5]/:

---

[4] Г.Минц, Системы резолюций для неклассических логик, Семиотика и информатика, 25 (1985) 120-133.

[5] An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, A. Mnatsakanyan, Proof complexities of strongly equal classical tautologies in some proof systems, Nauka i Studia, NR 42 (110) 2013, pp.92-98.

Чубарян Ан, Чубарян Арм.[6] աշխատությունում ներմուծված է **ընդհանուր տրոհումների համակարգը (*OP*)** հետևյալ եղանակով՝ յուրաքանչյուր բանաձևին համապատասխանեցվում է բինար ուղղորդված ծառ, որի արմատին վերագրված է ինքը բանաձևը, տերևներին վերագրված է 0 կամ 1, իսկ որևէ v գագաթի երկու զավակ հանդիսացող գագաթներին վերագրվում են v-ին վերագրված բանաձևի մեջ նրա որևէ p փոփոխականի փոխարեն համապատասխանաբար 0 կամ 1 տեղադրելուց հետո ստացված բանաձևերը: Այս համակարգում նույնաբանություններին համապատասխանում են ծառեր, որոնց տերևներին վերագրված է 1 արժեքը:

1.3 կետում, հետևելով Jakob Nordstro¨m[7] աշխատությանը, սահմանվել են **արտածման բարդության բնութագրիչները՝**
արտածման **երկարությունը (*l*-բարդություն)** հավասար է արտածման բոլոր տողերի երկարությունների /տրամաբանական նշանների մուտքերի քանակի/ գումարին, արտածման **քայլերի քանակը (*t*-բարդություն)**, արտածման **ծավալը**. նրա յուրաքանչյուր քայլը կատարելու համար անհրաժեշտ նվազագույն տարացքը (***s*-բարդություն**), արտածման **լայնությունը** որպես ամենաերկար տողի երկարությանը (***w*-բարդություն**):

Դիցուք, ունենք $\boldsymbol{\Phi}$ արտածման համակարգը և $\boldsymbol{\varphi}$ նույնաբանությունը: $\boldsymbol{t}_{\varphi}^{\phi}(\boldsymbol{l}_{\varphi}^{\phi},\boldsymbol{s}_{\varphi}^{\phi},\boldsymbol{w}_{\varphi}^{\phi})$-ով նշանակենք $\boldsymbol{\Phi}$ համակարգում $\boldsymbol{\varphi}$-ի բոլոր արտածումների $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{s},\boldsymbol{w})$-բարդությունների մինիմալ արժեքը:

Սահմանում 1.3.3: Դիցուք M-ը նույնաբանությունների որևէ բազմություն է: M բազմության Φ-արտածումները կանվանենք t-բազմանդամորեն (w-բազմանդամորեն, l-բազմանդամորեն, s-բազմանդամորեն) սահմանափակ եթե գոյություն ունի p() բազմանդամ այնպիսին որ $\boldsymbol{t}_{\varphi}^{\phi} \le p(|\varphi|)$ $(\boldsymbol{w}_{\varphi}^{\phi} \le p(|\varphi|), \boldsymbol{l}_{\varphi}^{\phi} \le p(|\varphi|), \boldsymbol{s}_{\varphi}^{\phi} \le p(|\varphi|))$ ցանկացած $\boldsymbol{\varphi}$ -ի համար M-ից, որտեղ $|\boldsymbol{\varphi}|$-ով նշանակված է $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևի երկարությունը:

Սահմանում 1.3.4: Երկու արտածման համակարգեր կոչվում են *t-բազմանդամորեն* (l-բազմանդամորեն) համարժեք, եթե համակարգերից մեկում տրված յուրաքանչյուր արտածում կարող է ձևափոխվել նույն բանաձևի արտածմանը մյուս համակարգում ոչ ավելին, քան քայլերի քանակի (երկարության) բազմանդամային աճի:

Հայտնի է, որ դասական տրամաբանության Ֆրեգեի բոլոր $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ համակարգերը /ինտուիցիոնիստական տրամաբանության Ֆրեգեի բոլոր $\boldsymbol{\mathcal{F}IL}$ համակարգերը,

---

[6] Чубарян Ан.А., Чубарян Арм.А., Оценки некоторых сложностных характеристик выводов в системе обобщенных расщеплений, НАУ, Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени, часть 10, 2(7), 2015, стр.11-14.

[7] Jakob Nordstro¨m. Narrow proofs may be spacious: Separating space and width in resolution. SIAM Journal on Computing, 39(1):59–121, May 2009.

Յոհանսոնի տրամաբանության Ֆրեգեի բոլոր ***ℱML*** համակարգերը/ l-բազմանդամորեն /հետևաբար, նաև *t-բազմանդամորեն/* համարժեք են:

Սահմանում 1.3.6: Կասենք որ A նույնաբանության արտածումը բազմանդամորեն հանգեցվում է B նույնաբանության արտածմանը, եթե գոյություն ունի բանաձևերի $B_1, B_2, \ldots, B_n$ հաջորդականություն, այնպիսին որ $B \supset B_1, B_1 \supset B_2, \ldots, B_{n-1} \supset B_n$,$B_n \supset A$ բանաձևերը նույնաբանություններ են և այդ բանաձևերի l-բարդությունները սահմանափակված են $|A|$-ից բազմանդամով:

ԳԼՈՒԽ 2.-ում շարադրված են Ֆրեգեի դասական համակարգերում արտածման բարդության բնութագրիչների գնահատման հետ կապված մի շարք խնդիրների լուծումները՝

ա/ ապացուցվել է բանաձևերի որոշակի դասերի ըստ բոլոր դիտարկված բարդության բնութագրիչների բազմանդամային սահմանափակումը,

բ/ նկարագրվել են նույնաբանությունների որոշակի դասեր, որոնց համար ապացուցվել է կամայական նույնաբանության արտածման բազմանդամային հանգեցումը նշված դասերի բանաձևերի արտածումներին,

գ/ ուսումնասիրվել է նաև $\boldsymbol{A_n}, \boldsymbol{B_n}$ *և* $\boldsymbol{A_n} \wedge \boldsymbol{B_n}$, $\boldsymbol{A_n} \vee \boldsymbol{B_n}$ ու $\boldsymbol{A_n} \supset \boldsymbol{B_n}$ տեսքի նույնաբանությունների արտածումների բարդության որոշ բնութագրչների հարաբերությունները**:**

Սույն գլխի արդյունքները տպագրված են [4], [7], [9], [13] աշխատություններում:

2.1. կետում նկարագրվում են նույնաբանությունների որոշակի դասեր և, մասնավորապես, ապացուցվում է որ այդ դասերը ունեն բազմանդամային բարդությամբ արտածումներ:

2.1.1 ենթակետում տրվում է **նույնաբանություն հանդիսացող բալանսավորված ԴՆՁ-ների արտածման քայլերի գնահատումը**

Սահմանում 2.1.1.1. A բանաձևը կոչվում է **բալանսավորված**, եթե նրա յուրաանչյուր փոփոխական ունի ճիշտ երկու մուտք՝ մեկը ժխումով, մյուսը առանց ժխտման: Բալանսավորված բանաձևերը ուսումնասիրված են L.Strasburger[8] աշխատությունում, որտեղ, ի մասնավորի, ապացուցված է, որ յուրաքանչյուր նույնաբանության արտածումը Ֆրեգեի համակարգերում բազմանդամորեն հանգեցվում է որոշակի բալանսավորված նույնաբանության արտածմանը, հետևաբար խիստ կարևոր է բալանսավորված բանաձևերի արտածուների բարդության բնութագրիչների հետազոտումը: Բալանսավորված բանաձևերի մի ենթադասի համար ապացուցվել է

Թեորեմ 2.1.1.2. Նույնաբանություն հանդիսացող բալանսավորված ԴՆՁ-ների $\mathcal{F}$-արտածումները l-բազմանդամորեն (t-բազմանդամորեն, w-բազմանդամորեն, s-բազմանդամորեն) սահմանափակ են:

---

[8] Lutz Straßburger: Extension without Cut, INRIA Saclaylle-de-France and Ecole Polytechnique, LIX, Rue de Saclay, 91128 Palaiseau Cedex, France, 2016.

Ապացուցը տրվում է նշված բանաձևերի արտածումները հայտնի PHP_n բանաձևերի արտածումների հանգեցմամբ:

1.1.2 ենթակետում գնահատվում են հայտնի համարժեք բանաձևով փոխարինման գործողությունը /տես S.C. Kleene[9]-ի աշխատությունը/ իրականացնող օժանդակ բանաձևերի արտածումների բարդության բնութագրիչները, ինչը թույլ է տալի այդ գործողության միջոցով հիմնավորել հետևյալ «բարդ արտածվող» բանաձևերի բազմանդամային բարդությամբ $\mathcal{F}$-արտածելիության նոր ապացույց՝

$$\varphi_{n,m}^{k} = \vee_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in E_n} \wedge_{l=1}^{k} \left(\wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} \left(\left(x_{ij}^{l} \wedge \neg\varepsilon_i\right) \vee \left(\varepsilon_i \wedge \neg x_{ij}^{l}\right)\right) \supset \wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} \left(x_{ij}^{l}\right)^{\neg\varepsilon_i}\right)$$

Ա.Չուբարյանի վերոհիշյալ աշխատությունում ապացուցված է, որ այսպիսի բանաձևերի արտածման քայլերի քանակը ***E, R, OP*** համակարգերում ունի բանաձևի երկարությունից կախված ստորին ցուցչային գնահատական:

Այստեղ նախ ապացուցվում է փոխարինման գործողությանը վերաբերող

Թեորեմ 2.1.2.1. Դիցուք ունենք $P(A)$ նույնաբանությունը որի $\mathcal{F}$ -արտածումը l-բազմանդամորեն (t-բազմանդամորեն, w-բազմանդամորեն, s-բազմանդամորեն) սահմանափակ է և ունենք $A \equiv B$ նախադրյալը: Այդ դեպքում $P(B)$ նույնաբանության $\mathcal{F}$–արտածումը նույնպես l-բազմանդամորեն (t-բազմանդամորեն, w-բազմանդամորեն, s-բազմանդամորեն) սահմանափակ է կախված $|P(B)| + |A|$-ից:

Ապա ապացուցվում է

Թեորեմ 2.1.2.2 $\varphi_{n,m}^{k}$ բանաձևի համար գոյություն ունեն $\mathcal{F}$–արտածումներ, որոնք t-բազմանդամորեն(w-բազմանդամորեն, l-բազմանդամորեն, s-բազմանդամորեն) սահմանափակ են:

2.2 կետում ուսումնասիրված են **նույնաբանությունների արտածումների բազմանդամային հանգեցումները որոշակի տիպի բանաձևերի դասին**

2.2.1 ենթակետում ներմուծվել է **հատուկ տիպի բանաձևերի գաղափարը.**

Սահմանում 2.2.1.1. Ասույթային հաշվի A բանաձևը կանվանենք **հատուկ տիպի** եթե այն ունի հետևյալ տեսքը $A = p \supset A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$ $(k \geq 1)$, որտեղ $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$-ն ոչ նույնաբանություն է, ոչ հակասություն, A_i-երը նույնպես ոչ նույնաբանություններ են, ոչ հակասություններ, և $|A_i| \leq |A_i|/2^{i-1}\,(1 \leq i \leq k)$, իսկ p-ն լիտերալ է:

Ապացուցվել են հետևյալ պնդումները՝

[9] S.C. Kleene, Introduction to Metamathematics, D. VanNostrand Company, INC, New York, 1952.

Թեորեմ 2.2.1.1. Եթե գոյություն ունի ասույթային A նույնաբանություն, որի $\mathcal{F}$-արտածումները l-բազմանդամորեն (t-բազմանդամորեն, w-բազմանդամորեն, s-բազմանդամորեն) սահմանափակ չեն ապա գոյություն ունի այնպիսի հատուկ տիպի նույնաբանություն, որի $\mathcal{F}$-արտածումները նույնպես l-բազմանդամորեն (t-բազմանդամորեն, w-բազմանդամորեն, s-բազմանդամորեն) սահմանափակ չեն և նրանում A_i եթաբանաձևերը A-ի ենթաբանաձևեր կամ ենթաբանաձևերի ժխտումներ են:

Հետևանք: Եթե հատուկ տիպի բանաձևերի բազմության արտածումները l-բազմանդամորեն (t-բազմանդամորեն, w-բազմանդամորեն, s-բազմանդամորեն) սահմանափակ են, ապա ասույթային հաշվի բոլոր նույնաբանությունների $\mathcal{F}$-արտածումները l-բազմանդամորեն (t-բազմանդամորեն, w-բազմանդամորեն, s-բազմանդամորեն) սահմանափակ են:

2.2.2 ենթակետում ներմուծվել է **նշանափոխ ծառով տրվող բանաձևերի** գաղափարը և ապացուցվել է **որոշակի նույնաբանությունների արտածումների բազմանդամային հանգեցումը նշանափոխ ծառով տրվող բանաձևերից կազմված նույնաբանությունների արտածումների**

Սահմանում 2.2.2.2. Սահմանենք **նշանափոխ ծառով տրվող բանաձևերը** մակածման եղանակով:

1. Յանկացած լիտերալ նշանափոխ ծառով տրվող բանաձև է:
2. Եթե T_1-ը և T_2-ը նշանափոխ ծառով տրվող բանաձևեր են, իսկ r_1-ը լիտերալ, ապա $r_1 \wedge (T_1 \vee T_1)$-ը ևս նշանափոխ ծառով տրվող բանաձև է:
3. Այլ նշանափոխ ծառով տրվող բանաձևեր չկան:

Ապացուցվել է հետևյալ պնդումը՝

Թեորեմ 2.2.2.1 Դիցուք A ասույթային հաշվի նույնաբանություն է, որը պարունակում է միայն $\supset$ և $\neg$ նշանները, ընդ որում $\neg$ պարունակում է միայն լիտերալներում: Այդ դեպքում նրա արտածումը բազմանդամային բարդությամբ կարելի է հանգեցնել $\neg(T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_n)$ բանաձևի արտածմանը, որտեղ $n \leq |A|, T_i$ $(1 \leq i \leq n)$ նշանափոխ ծառով տրվող բանաձևեր են և $|T_i| \leq |A|$:

2.2.3. ենթակետում ներմուծվել է **լրիվ ԴՆՁ-ների** գաղափարը և ապացուցվել է **որոշակի ԴՆՁ-ների արտածումների բազմանդամային հանգեցումը լրիվ ԴՆՁ-ների արտածումներին**

Դիցուք ունենք $D = N_1 \vee N_2 \vee \ldots \vee N_n$ ԴՆՁ-է, որում բոլոր լիտերալները փոփոխականների ժխտումներ են: K կոնյունկտը կոչվում է D-ի ներկայացուցիչ եթե այն պարունակում է գոնե մեկ փոփոխական յուրաքանչյուր N_i-ից $(1 \leq i \leq n)$, նրա բոլոր լիտերալները փոփոխականներ են և բոլոր փոփոխականները D-ից են:

Սահմանում 2.2.3.1. $D_1 = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_m$ ԴՆՁ-ն կանվանենք $D_2 = N_1 \vee N_2 \vee \ldots \vee N_n$-ի լրացում, եթե$D_2$-ի կամայական K-ներկայացուցչի համար գոյություն ունի N_i $(1 \leq i \leq n)$ որը K-ի ենթաբազմություն է: $D = (N_1 \vee N_2 \vee \ldots \vee N_n) \vee (C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_m)$-ը կանվանենք **լրիվ ԴՆՁ:**

Ապացուցվել են հետևյալ պնդումները՝

Թեորեմ 2.2.3.1. Լրիվ ԴՆՁ-ները նույնաբանություններ են:

Թեորեմ 2.2.3.2. Եթե լրիվ ԴՆՁ-ների բազմությունը ունի l-բազմանդամորեն սահմանափակ արտածում ապա այնպիսի D ԴՆՁ նույնաբանությունների բազմությունը, որտեղ առանց ժխտում հանդես եկող փոփոխականների քանակը յուրաքանչյուր կոնյունկտում $O(log(|D|))$ է նույնպես ունի l-բազմանդամորեն սահմանափակ արտածում:

Հետևանք Եթե լրիվ ԴՆՁ-ների բազմությունը ունի l-բազմանդամորեն սահմանափակ արտածում ապա այնպիսի D ԴՆՁ նույնաբանությունների բազմությունը, որտեղ ժխտումով հանդես եկող փոփոխականների քանակը յուրաքանչյուր կոնյունկտում $O(log(|D|))$ է նույնպես ունի l-բազմանդամորեն սահմանափակ արտածում:

2.2.4 ենթակետում ներմուծվել է որոշակի "**նորմալ տեսքի բանաձևերի**" գաղափարը և ապացուցվել է բոլոր նույնաբանությունների արտածումների այդ դասի բանաձևերին բազմանդամորեն հանգեցման փաստը:

Սահմանում 2.2.4.1. Ասույթային հաշվի A բանձևը **նորմալ տեսքի է,** եթե այն պարունակում է միայն $\wedge$, $\vee$ և $\neg$ տրամաբանական գործողությունները, ընդ որում $\neg$ պարունակում է միայն լիտերալներում:

Օգտվելով փոխարինման գործողությանը վերաբերող պնդումից, ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2.2.4.1. Ասույթային հաշվի կամայական φ բանաձևի $\mathcal{F}$–արտածում բազմանդամորեն հանգեցվում է այնպիսի նորմալ տեսքի բանաձևի $\mathcal{F}$–արտածման, որի երկարությունը բազմանդամորեն է կախված φ-ի երկարությունից:

2.2.5. ենթակետում հետազոտվում է կամայական $\boldsymbol{A_n}$, $\boldsymbol{B_n}$ և $\boldsymbol{A_n} \vee \boldsymbol{B_n}$, $\boldsymbol{A_n} \wedge \boldsymbol{B_n}$ ու $\boldsymbol{A_n} \supset \boldsymbol{B_n}$ տեսքի բանաձևերի արտածումների բարդության բնութագրիչների փոխհարաբերությունները: Այսպիսի արդյունքները կարող են օգտակար լինեն կամայական բանաձևերի արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատման համար: Ստացված են հետևյալ արդյունքները՝

Թեորեմ 2.2.5.1. Գոյություն ունեն այնպիսի B_n և C_n նույնաբանություններ, որ $A_n = B_n \vee C_n$- ի արտածման t–բարդությունը $O(1)$ է l–բարդությունը $\Theta(n)$, իսկ B_n-ի և C_n-ի արտածման t–բարդությունները $\Theta(n)$ են, իսկ l–բարդությունները $\Theta(n^2)$:

Հայտնի է, որ $A_n(p) = \overbrace{\neg\neg\ldots\neg}^{2n}(\neg p \vee p)$ բանաձևերի արտածումների t–արդդությունը $\theta(n)$ է /տես, օրինակ, Krajichek[10] /:

Թեորեմ 2.2.5.2. $A_n(p) \vee A_n(q)$ բանաձևի արտածման t–բարդությունը $\theta(n)$ է:

Թեորեմ 2.2.5.3. Դիցուք A_n և B_n նույնաբանությունները այդ դեպքում $A_n \wedge B_n$-ի բարդության t, l, w և s բնութագրիչներից յուրաքանչյուրը կարգով հավասար է A_n-ի և B_n-ի համապատասխան բնութագրիչներից առավելագույնին:

[10] J. Krajicek, Speed-up for propositional Frege systems via generalizations of proofs, Commentationes Mathematicae Universitas Carolinae, 30(1), (1989), pp.137-140. 83

Թեորեմ 2.2.5.4. Գոյություն ունեն այնպիսի A_n և B_n նույնաբանություններ, որ $A_n = B_n \supset C_n$-ի արտածման t- բարդությունը $O(1)$ է s-բարդությունը $\Theta(n)$ իսկ B_n-ի և C_n-ի արտածման t-բարդությունները $\Theta(n)$ են իսկ s-բարդությունները $\Theta(n^2)$:

ԳԼՈՒԽ 3.-ում հետազոտվել են էականորեն հավասար նույնաբանությունների արտածումների բարդության բնութագրիչների հարաբերությունները ասույթային հաշվի որոշ համակարգերում: Ասույթային հաշվի բոլոր նույնաբանությունները որպես բուլյան ֆունկցիաներ իրար հավասար են, սակայն դրանցից որոշները արտածվում են բավականաչափ երկար, իսկ որոշները արագ: Որպեսզի նույնաբանությունները որոշ իմաստով տարբերակվեն արտածումների բարդություններով փոխկապակցված, An. Chubaryan, Arm. Chubaryan[11] աշխատությունում ներմուծվել է **Էականորեն հավասար** նույնաբանությունների գաղափարը: An. Chubaryan և ...[12] աշխատությունում ապացուցվել է, որ էականորեն հավասար նույնաբանությունների արտածումների բարդությունների մեծությունները «թույլ» համակարգերում /դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների E տիպի և ռեզոլյուցիոն, ինչպես նաև դասական տրամաբանության ***OP***/ համընկնում են: Սույն գլխում ուսումնասիրվում են էականորեն հավասար բանաձևերի արտածումների բարդության բնութագրիչների հարաբերությունները տարբեր տրամաբանությունների առավել ավանդական Ֆրեգեի և սեկվենցյալ /հատույթի կանոնով և առանց հատույթի կանոնի/ համակարգերում: Ցույց է տրվում որ միևնույն տրամաբանության միևնույն արտածման համակարգերում էականորեն հավասար բանաձևերը կարող են ունենալ արտածումների էապես տարբերվող բարդություններ:

Այս արդյունքները ներկայացված են [1], [2], [8], [11], [14] աշխատություններում.

3.1. ենթակետում տրվում են հիմնական սահմանումները և նշանակումները:

Սահմանում 3.1.2: Տրված կոնյունկտը **որոշիչ է տվյալ տրամաբանության արտածվող սեկվենտի համար** եթե այն որոշիչ է սեկվենտին համապատասխանող բանաձևային տեսքում:

Սահմանում 3.1.3: φ և ψ նույնաբանությունները (արտածվող սեկվենտները) **Էականորեն հավասար են,** եթե յուրաքանչյուր φ-որոշիչ կոնյունկտ նաև ψ-որոշիչ է և հակառակը:

---

[11] An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, A new conception of Equality of Tautologies, L&PS, Vol.V, No,1, 3-8, Triest, Italy, 2007.

[12] An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, A. Mnatsakanyan, Proof complexities of strongly equal classical tautologies in some proof systems, Nauka i Studia, NR 42 (110) 2013, pp.92-98.

Նշենք, որ ոչ դասական տրամաբանությունների համար որոշիչ կոնյունկտների սահմանումները տրվում են Հավելված 1.-ում:

3.2 ենթակետում համեմատվել են **էականորեն հավասար նույնաբանությունների արտածումների բարդության բոլոր չորս բնութագրիչները Ֆրեգեի** $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}IL$ **և** $\mathcal{F}ML$ **համակարգերում:** Յուրաքանչյուր համակարգի համար նշվում են էականորեն հավասար նույնաբանությունների զույգերի հաջորդականություններ, որոնցից առաջինների արտածումների բնութագրիչների համար ստացված վերին գնահատականները կարգով ավելի ցածր են, քան երկրորդների արտածումների բնութագրիչների համար ստացված ստորին գնահատականները:

3.3 ենթակետում համեմատվել են **էականորեն հավասար սեկվենտների արտածումների բարդության բնութագրիչների սեկվենցյալ** ***PC, PI, PM, PMon*** համակարգերում, ինչպես նաև դրանց առանց հատույթի կանոնի տարբերակներում: Այստեղ ևս յուրաքանչյուր համակարգի համար նշվում են էականորեն հավասար արտածվող սեկվենտների զույգերի հաջորդականություններ, որոնցից առաջինների արտածումների քայլերի քանակի և երկարությունների համար ստացված վերին գնահատականները կարգով ավելի ցածր են, քան երկրորդների արտածումների համապատասխանաբար քայլերի քանակի և երկարությունների համար ստացված ստորին գնահատականները:

ԳԼՈՒԽ 4.-ում հետազոտվել են ասույթային հաշվի տարբեր տրամաբանությունների մի շարք համակարգերի մոնոտոնության և խիստ մոնոտոնության հատկությունները:

Արտածումների բարդության չլուծված խնդիրներից է մինիմալ նույնաբանությունների և նրանցից որևէ տեղադրությամբ ստացված բանաձևերի արտածումների բարդությունների հարաբերությունը: Аникеев[13] աշխատությունում հետազոտվել է դասական տրամաբանության ասույթային հաշվի Հիլբերտյան մի համակարգում հետևյալ հատկությունը՝ արդյոք յուրաքանչյուր ոչ-մինիմալ նույնաբանություն ունի այնպիսի մինիմալ տրամաբանական միջուկ, որի արտածման քայլերի քանակը տվյալ համակարգում ոչ ավելին է, քան տրված ոչ-մինիմալ նույնաբանության արտածման քայլերը: Նույն աշխատությունում բերված են և այդպիսի հատկությամբ օժտված համակարգի մի օրինակ և այնպիսի համակարգի օրինակ, որի համար այդ հատկությունը տեղի չունի /նշենք, որ երկու տիպի օրինակները լրիվ համակարգեր չեն/: Լրիվ համակարգերի համար այս խնդիրը բաց էր:

Այս ատենախոսությունում ապացուցվել է, որ «թույլ» համակարգերից որոշները օժտված են մոնոտոնության հատկությամբ, իսկ որոշները – ոչ, ինչպես նաև ներմուծվել է արտածման համակարգերի խիստ մոնոտոնության գաղափարը և ապացուցվել է, որ բազմաթիվ հանրահայտ արտածման համակարգերը խիստ մոնոտոն չեն:

---

[13] А.С. Аникеев, О некоторой классификации выводимых пропозициональных формул, Математические заметки, 11, вып.2, 1972, 165-174.

Այս գլխի արդյունքները ներկայացված են [2], [5,6], [10], [12], [14] աշխատություններում:

4.1 Հիմնական գաղափարները.

Սահմանում 4.1.1. Նույնաբանությունը (I-նույնաբանությունը, M-նույնաբանությունը) կանվանենք **մինիմալ,** եթե այն չի ստացվում տեղադրությամբ ավելի կարճ նույնաբանությունից (I-նույնաբանությունից, M-նույնաբանությունից):

Սահմանում 4.1.2. Արտածվող **սեկվենտը կոչվում է մինիմալ**, եթե նրա բանաձևային տեսք հանդիսացող բանաձևը մինիմալ բանաձև է:

Ֆիքսած տրամաբանության կամայական ψ նույնաբանության համար $Min(\psi)$-ով նշանակենք ψ-ի նույն տրամաբանությունում բոլոր մինիմալ նույնաբանությունների բազմությունը:

Սահմանում 4.1.3. Φ համակարգը կոչվում է t-մոնոտոն (l-մոնոտոն), եթե այդ համակարգի կամայական ψ նույնաբանության համար գոյություն ունի այնպիսի φ մինիմալ նույնաբանություն նույն համակարգից, այնպես, որ $\varphi \in Min(\psi)$ և $t_{\varphi}^{\Phi} = t_{\psi}^{\Phi}$ ($l_{\varphi}^{\Phi} = l_{\psi}^{\Phi}$):

Սահմանում 4.1.4. Φ համակարգը կոչվում է t-խիստ մոնոտոն (l-խիստ մոնոտոն), եթե այդ համակարգի կամայական ψ նույնաբանության համար և նույն համակարգի կամայական այնպիսի φ մինիմալ նույնաբանության համար, որ $\varphi \in Min(\psi)$ և $t_{\varphi}^{\Phi} \leq t_{\psi}^{\Phi}$ ($l_{\varphi}^{\Phi} \leq l_{\psi}^{\Phi}$):

Տեղադրման կանոնով համալրված դասական տրամաբանության Ֆրեգեյի $\mathcal{F}$ համակարգը նշանակենք **$S\mathcal{F}$**-ով, իսկ Հենցենյան համակարգը և առանց հատույթի կանոնի Հենցենյան համակարգը համապատասխանաբար $\mathbf{SPC}$-ով և SPC^{-}-ով:

4.2. Հիմնական արդյունքները.

Թեորեմ 4.2.1. 1) Բոլոր դիտարկված տրամաբանությունների **առանց հատույթի կանոնի սեկվենցյալ համակարգերը** և t-մոնոտոն են, և l-մոնոտոն են:

2) ***RC, RI*** և ***RJ*** համակարգերը և t-մոնոտոն են, և l-մոնոտոն են:

Թեորեմ 4.2.2. ***OP*** համակարգը և դիտարկված բոլոր տրամաբանությունների ***E*** տիպի համակարգերը t-մոնոտոն չեն:

Թեորեմ 4.2.3. Հետևյալ համակարգերը ոչ t-խիստ մոնոտոն են, ոչ l-խիստ մոնոտոն՝

ա/ ***$\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$IL*** և ***$\mathcal{F}$ML,***

բ/ ***PC, PI, PM*** և ***PMon*** հատույթի կանոնով, թե առանց հատույթի կանոնի սեկվենցիալ համակարգերը, գ/ ***OP,*** դիտարկված բոլոր տրամաբանությունների ***E*** տիպի համակարգերը, ***RC, RI*** և ***RJ*** համակարգերը:

Թեորեմ 4.2.4. $\boldsymbol{S\mathcal{F}}$, SPC և $\boldsymbol{SPC^{-}}$ համակարգերը ոչ l-խիստ մոնոտոն են, ոչ t-խիստ մոնոտոն:

Արդյունքները ամփոփված են հաջորդիվ բերվող աղյուսակում:

Համակարգ	**Մոնոտոն**	**Խիստ մոնոտոն**
Ռեզոլյուցիոն (C, I, J)	+	-
Սեկվենցիալ առանց հատույթի կանոնի (C, I, J, Mon)	+	-
E (C, I, J, Mon), OP	-	-
Սեկվենցիալ հատույթի կանոնով և Ֆրեգեի(C, I, J)	?	-
Տեղադրման կանոնով $\boldsymbol{S\mathcal{F}}$, SPC և $\boldsymbol{SPC^{-}}$	?	-

Հարկ է նշել, որ խիստ մոնոտոն համակարգեր դեռ հայտնաբերված չեն, ինչպես նաև պարզ չէ վերջին երկու վանդակներում նշված համակարգերի մոնոտոնությունը:

Հիմնական արդյունքները և հետևությունները

Սույն ատենախոսությունում ուսումնասիրված են արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատականները դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների ասույթային հաշվի տարբեր համակարգերում:Ատենախոսության հիմնական արդյունքներն են՝

1. Դասական տրամաբանության **Ֆրեգեի $\mathcal{F}$** համակարգերում

   ա/ ապացուցվել է **նույնաբանություն հանդիսացող բալանսավորված ԴՆՁ-ների և «բարդ որոշելի» մի դասի նույնաբանությունների** արտածումների բարդության բոլոր բնութագրիչների բազմանդամային սահմանափակումը,

   բ/ նկարագրվել են **նորմալ տեսքի, հատուկ տիպի, նշանափոխ ծառերով տրվող և լրիվ ԴՆՁ-ներ հանդիսացող** նույնաբանությունւերի դասերը, որոնց արտածումների բարդության բնութագրիչների բազմանդամորեն սահմանափակ լինելու հատկության արկայությունը հանգեցնում է բոլոր /կամ որոշակի սահմանափակումներով/ նույնաբանություննեի բազմանդամորեն սահմանափակ բարդության բնութագրիչներով արտածումների գոյությանը,

   գ/ ապացուցվել են հետաքրքիր հարաբերություններ A_n և B_n նույնաբանությունների և դրանցից դիզյունկցիայով, կոնյունկցիայով ու իմպլիկացիայով կազմված նույնաբանությունների արտածումների բարդության բնութագրիչների միջև:

2. Դասական, ինտուիցիոնիստական, մինիմալ /Յոհանսոնի/ և մոնոտոնիկ տրամաբանությունների **$\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$IL և $\mathcal{F}$ML Ֆրեգեի** համակարգերի, սեկվենցիալ **PC, PI, PM և PMon հատույթի կանոնով և առանց հատույթի կանոնի** համակարգերի համար նշվել են էականորեն հավասար բանաձևերի զույգերի հաջորդականություններ, որոնց արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատականները էապես տարբեր են:

3. Հետազոտելով ասույթային հաշվի դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների մի շարք համակարգերի մոնոտոնության և խիստ մոնոտոնության հատկությունները, ապացուցվել է.

   ա/ ռեզոլյուցիոն **RC, RI և RJ** համակարգերը մոնոտոն են ըստ արտածման քայլերի, բոլոր դիտարկված տրամաբանությունների **առանց հատույթի կանոնի սեկվենցյալ համակարգերը** մոնոտոն են և ըստ արտածման քայլերի քանակի և ըստ արտածման երկարության, բ/ ընթհանրացված տրոհման կանոնի վրա հիմնված դասական տրամաբանության **OP** համակարգը և բոլոր տրամաբանությունների **E** տիպի համակարգերը ըստ արտածումների քայլերի քանակի մոնոտոն չեն,

գ/ հետազոտված ոչ մի համակարգ խիստ մոնոտոն չէ ոչ ըստ արտածման քայլերի և ոչ ըստ արտածման երկարության:

Սույն ատենախոսությունում ներկայացված հետազոտությունների բոլոր արդյունքները նոր են՝

1. առաջին անգամ նկարագրվել են դասական նույնաբանությունների հետաքրքիր դասեր, որոնց արտածումների բարդության բնութագրիչների բազմանդամորեն սահմանափակ լինելու փաստը կարող է հանգեցնել հայտնի **NP և coNP** բարդության դասերի համընկմանը,
2. ապացուցվել է, որ էականորեն հավասար դասական և ոչ դասական նույնաբանութնունները կարող են ունենալ արտածումների բարդության բնութագրիչների էականորեն տարբեր գնահատականներ,
3. առաջին անգամ լուծվել է դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների մոնոտոն և ոչ մոնոտոն լրիվ համակարգերի գոյության հարցը:

Թեզի շրջանակներում տպագրված աշխատությունները՝

1. A.Chubaryan, G.Petrosyan, The relations between the proof complexities of strongly equal classical tautologies in Frege systems, Российско-китайский научный журнал «Содружество» № I (1), 2016 / ФИЗ-МАТ НАУКИ, 78-80.
2. Anahit Chubaryan, Garik Petrosyan, Frege systems are no monotonous, Evolutio, Естественные науки, Вып 3, 2016, 12-14.
3. Anahit Chubaryan, Garik Petrosyan, The proof complexities relations for strongly equal classical tautologies in Frege systems, ASL, ESM, Logic Colloquium – 2016, Leeds, Volume of Abstracts, 69-70, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.23, No 2, 2017, 260.
4. Anahit Chubaryan, Garik Petrosyan, On proof complexities for some classes of tautologies in Frege systems, ASL, ESM, Logic Colloquium–2017, Stockholm, Abstracts, https://easychair.org/smart-program/LC2017/2017-08-15.html.1. The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.24, No 2, 2018, 240.

5. Anahit Chubaryan, Hakob Nalbandyan, Arman Karabakhtsyan, Garik Petrosyan, Propositional sequent systems of two valued classical logic and many valued logics are no monotonous, ASL, ESM, Logic Colloquium–2017, Stockholm, Abstracts, https://easychair.org/smart-program/LC2017/2017-08-14.html.,1. The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.24, No 2, 2018, 239-240.
6. Anahit Chubaryan, Artur Khamisyan, Garik Petrosyan, On some systems for two versions of many-valued logics and its properties, Lambert Academic Publishing (LAP), 2017, 73 pages.
7. Chubaryan A.A., Petrosyan G.W., Some notes on proof complexities in Frege systems,Sciences of Europe, Vol 1, # 12 (12), Physics and Mathematics, 2017, 31-34.
8. Chubaryan A., Petrosyan G., On the relations between the proof complexity measures of strongly equal k-tautologies in some proof systems, ASL, ESM, Logic Colloquium – 2018, Udine, Italy, Program and Abstracts, 122-123.
9. Պետրոսյան Գարիկ, Արտածումների բարդության բնութագրիչների հետազոտում Ֆրեգեի համակարգերում, Collection of Scientific Articles of YSU SSS, 1.1(24), Yerevan, 2018, 77-83.
10. Chubaryan A., Karabakhtsyan A., Petrosyan G., Some properties of several proof systems for Intuitionistic, Johansson's and Monotone propositional logics, JASR, V.8, N 2,2018, 61-72.
11. Anahit Chubaryan, Artur Khamisyan, Garik Petrosyan; Investigation of the Proof Complexity Measures of Strongly Equal K-Tautologies in Some Proof Systems. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence, Volume 7 No 1 February (2019); pp: 56-63 http://dx.doi.org/10.14738/tmlai.71.6187
12. ANAHIT CHUBARYAN, GARIK PETROSYAN, SERGEY SAYADYAN, Monotonous and strong monotonous properties of some propositional proof systems for Classical and Non Classical Logics, ASL, ESM, Logic Colloquium – 2019, Prague, Book of abstracts, 165-166, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.25, No 4, 2019, 506-507.

13. Petrosyan G.,Polynomial bounded proof complexities for some classes of DNF-tautologies, Mathematical Problems of Computer Science 53, 7–13, 2020.
14. G.V. Petrosyan, On some properties of several proof systems for propositional logic, ДНАН РА, т.121, №1, 2021, 9-13.

Investigation of some quantitative and structural properties of different logical proof systems

Abstract

Some **quantitative and structural properties of different propositional proof systems** for classical and non-classical logics are investigated in this thesis: a) a problem of polynomial bounded possibility for proof sizes in Frege systems of classical logic, b) the relations between the proofs complexity characteristics of essentially equal tautologies (sequents) in the same propositional systems for different logics and c) some structural property of propositional systems about the possibility or non-possibility for proving of non-minimal tautologies more quickly than some of its minimal kernels.

The propositional calculus had an undeserved reputation among logicians as being essentially trivial, but at present it is a strong conviction, that propositional calculus presents some of the most challenging and intriguing problems in modern logic. Interest in the problem arose from two fields: problem of automated theorem proving, which is base for creation of Artificial Intelligence, and one of fundamental problems of computational complexity theory.

One of the most fundamental problems of the proof complexity theory is to find an efficient proof system for classical propositional calculus. According to the opinion, a truly "effective" system must have a polynomial-size $p(n)$ proof for every tautology of size n. Cook and Reckhow named such a system a super system and they proved that class **NP is equal to class coNP** iff there exists a super system. It is well known that many propositional proof systems are not super because the lower bounds of some formulas are exponential in these systems, but for some traditional systems, in particular for Frege systems, this question is still open.

Most current research of some proof complexity characteristics is, in particular ***space*** measure, driven by other concerns also. One such concern is the connection to SAT problem. In fact, most modern-day SAT solvers can be seen to search for proofs in systems at fairly low levels in the proof complexity hierarchy (*Resolution, Polynomial Calculus, Analytic Tableaux, Catting Planes, Cut-fee Sequence, Bounded Frege*), and the bounds for these proof systems hence give information about the potential and limitations of the corresponding SAT solvers, therefore the investigations of proof complexities in such “weak” systems are very important also.

All above questions, besides their mathematical significance, ***have practical applications in*** such areas as Logic, Mathematics, Machine Learning, Hardware Design Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Cryptography, Data Mining etc., therefore these investigations are very actual as well.

Main results of this thesis are the following:

1. For the Frege systems of classical logic
    a) it is proved that all proof complexity characteristics for two sets of tautologies (balanced tautologies in disjunctive normal form and for some class of "hard determinable" formulas, which have exponential lower bounds of proofs sizes in weak systems) are polynomially bounded,
    b) the notions of four sets of tautologies (tautologies of a ***specific type,*** *tautologies,* ***definable with symbols changeable trees, full Disjunctive Normal Forms*** *and tautologies,* given in ***normal form)*** are introduced such, that the polynomial boundness of its proofs sizes implies the polynomial boundness of proofs sizes for all (or maybe with some restrictions) tautologies,
    c) it is given some results about interesting relations between the proof complexities of tautologies A_n , B_n and proof complexities of the tautologies in a form $A_n * B_n$, where $*$ is $\wedge, \vee$ *or* $\supset$.
2. The essential differences of proof complexities for essentially equal tautologies are proved in classical and non-classical logics for the Frege systems $\mathcal{F}$, **$\mathcal{F}$IL, $\mathcal{F}$ML** and sequent systems **PC, PI, PM, Pmon** with and without cut rule. It is showed that for each system there are sequence of tautologies pairs, which are essentially equal and the lower bounds for proof steps (sizes) of the first tautologies are an order more than the upper bounds for proof steps (sizes) of the second tautologies for all pairs. Note that essentially equal tautologies have the same proof complexities in weak systems.
3. The investigations of monotonous and strongly monotonous properties (some relations between the proof lines and proof sizes of non-minimal tautologies and its minimal tautologies) of some propositional proof systems for classical and non-classical logics show that
    a) resolution systems **RC, RI** and **RJ** are monotonous by proof steps, sequent systems without cut rule are monotonous both by steps and sizes of proofs,
    b) the system of generalized splitting method **OP** and **E** type systems for all investigated logics are non-monotonous by proof steps,
    c) neither of investigated propositional proofs systems are not strongly monotonous.

Note that the existence of monotonous and non-monotonous complete systems is proved at first time.

Исследование некоторых количественных и структурных характеристик различных логических систем

Резюме

В диссертации исследованы некоторые количественные и структурные характеристики для ряда пропозициональных систем выводов классической и неклассических логик, в частности а) исследованы возможности полиномиального ограничения длин выводов в системах Фреге классической логики, б) сравнены величины сложностных характеристик выводов существенно равных тавтологий (секвенций) в одной и той же системе выводов различных логик и в) выявлены некоторые структурные свойства пропозициональнх систем разлиных логик, заключающиеся в возможности (или невозможности) выводов не минимальных тавтологий проще, чем представителей их минимальных ядер.

В научной среде логиков пропозициональные системы выводов долгое время пользовались незаслуженной репутацией существенно тривиальных объектов для исследований, однако в настоящее время достаточно важные и интригующие проблемы современной логики относятся именно к пропозициональным системам. Интерес к этим задачам возник и подогревается двумя направлениями: проблемами автоматизции доказательств теорем, одной из основных задач создания искусственного интелекта, а также одной из фундаментальных проблем теории сложности вычислений.

Одной из основных проблем теории сложностей выводов является построение «эффективной» системы выводов для классической пропозициональной логики. Считается естественным, что в «эффективной» системе для некоторого полинома p длина вывода любой тавтологии длины n не должна превышать $p(n)$. Cook и Reckhow в упомянутой выше работе назвали такую систему ***супер*** системой и доказали, что ее существование равнозначно совпадению классов **NP и** co**NP**. Для многих пропозициональных систем выявлены примеры формул с экспоненциальной нижней оценкой сложностей выводов, т.е. они не претендуют на статус супер систем, но для более традиционных систем, в частности для систем Фреге, этот вопрос пока открыт.

Многие современные исследования некоторых «экзотических» характеристик сложностей выводов (space) вызваны иными интересами. Один из них связан с решением проблемы ВЫПОЛНИМОСТИ (SAT problem). Исследования этой проблемы проводятся в «слабых» системах (*Resolution, Polynomial Calculus, Analytic Tableaux, Cutting Planes, Cut-fee Sequence, Bounded Frege*), что дает информацию о потенциально необходимых для решения проблемы ресурсах, а значит, исследования в этих системах также важны.

Решения вышеперечисленных проблем помимо математического интереса, имеют также **практическое применемие** в таких областях, как Logic, Mathematics, Machine Learning, Hardware Design Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Cryptography, Data Mining, и т.д., следовательно, эти исследования весьма актуальны.

Основные результаты диссертации следующие:

1. В системах Фреге класичесской логики

а) доказана полиномиальная ограниченность всех сложностных характерстик выводов для двух множеств формул (класса балансированных ДНФ, являющихся тавтологиями, а также для некоторого класса «трудно определяемых» формул, сложности выводов которых в «слабых» системах ограничены экспонентой от длины формулы);

б) определены четыре класса формул (формулы **специального типа,** формулы, **задаваемые знакопеременными деревьями, полные ДНФ** и формулы **нормального вида),** полиномиальная ограниченность длин выводов каждого из которых приведет к обоснованию полиномиальной ограниченности сложностных характеристик выводов всех (или с наличием некоторых ограничений) тавтологий;

в) доказаны интересные соотношения сложностных характеристик выводов фомул An, Bn и формул, составленных из них применением конъюнкции, дизъюнкции и импликации.

2. Для классических и неклассических логик доказано существенное различие сложностных характеристик выводов существенно равных тавтологий в системах Фреге $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$IL, $\mathcal{F}$ML и секвенциальных системах **PC, PI, PM, Pmon** с правилом сечения и без него. Для каждой из систем построены последовательности пар существенно равных таких формул, что для первых из них нижние оценки сложностных характеристик по порядку выше верхних оценок сложностных характеристик выводов вторых.

3. Исследованием свойств монотонности и строгой монотонности ряда пропозициональнх систем классических и неклассических логик доказано:

а) системы резолюций **RC, RI** и **RJ** монотонны по шагам выводов, все секвенциальные системы без правила сечения монотонны и по длине и по шагам выводов,

б) система обобщенных расщеплений **OP** и системы типа E для всех рассмотренных логик по шагам выводов не монотонны,

в) ни одна из исследованных пропозициональных систем выводов не является строго монотонной.

Отметим, что существование монотонных и немонотонных полных систем доказано впервые.