ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ղարիբյան Արամ Հրաչիկի

Գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված տրոհումների հետազոտում

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Երևան - 2021

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Гарибян Арам Грачикович

Исследование локально-сбалансированных разбиений графов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван - 2021

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Պ.Ա. Պետրոսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ռ.Ռ. Քամալյան
	ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ի.Ա. Կարապետյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Հայ-ռուսական (սլավոնական) համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2021թ. հունիսի 22-ին, ժ. 15^{00}-ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈԿ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2021թ. մայիսի 13-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր՝ Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	кандидат физ.-мат. наук П.А. Петросян
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук Р.Р. Камалян
	кандидат физ.-мат. наук И.А. Карапетян
Ведущая организация:	Российско-Армянский (Славянский) университет

Защита состоится 22-го июня 2021г. в 15^{00} часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 050 “Математика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 13-го мая 2021г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук Т.Н. Арутюнян

Աշխատանքի ընդհանուր նկարագիրը

Թեմայի արդիականությունը: Հայտնի է, որ գրաֆների տրոհումների խնդիրները հանդիսանում են դիսկրետ մաթեմատիկայի կարևոր, արդի և արագ զարգացող հետազոտման ուղղություններից մեկը: Այդ խնդիրների հանդեպ մեծ հետաքրքրությունը պայմանավորված է ինչպես այդ խնդիրների՝ բազմաթիվ այլ կիրառական խնդիրների հետ առկա սերտ կապով, որոնցից են գերմեծ ինտեգրալ սխեմաների (ԳՄԻՍ) նախագծումը, զուգահեռ հաշվարկները, կարգացուցակների խնդիրները, բարդ ցանցերում համայնքների հայտնաբերումը, կլաստերիզացիայի խնդիրները և այլն, այնպես էլ մաթեմատիկայում առկա բազմաթիվ խնդիրներով, որոնք կարելի է ձևակերպել որպես գրաֆների տրոհման խնդիրներ (Ռամսեյի տեսության խնդիրներ, ֆակտորիզացիայի խնդիրներ, ներկումների խնդիրներ, կլաստերիզացիայի խնդիրներ և այլն): Օրինակ, G գրաֆի $a(G)$ (arboricity) պարամետրը գտնելու խնդիրը բերվում է այդ գրաֆի նվազագույն քանակությամբ անտառների տրոհման խնդրին, գրաֆի քրոմատիկ թվի գտնելու խնդիրը բերվում է այդ գրաֆի նվազագույն քանակությամբ անկախ բազմությունների տրոհման խնդրին, իսկ գրաֆի քրոմատիկ ինդեքսի որոշելու խնդիրը համարժեք է այդ գրաֆի նվազագույն թվով զուգակցումների տրոհման խնդրին: Գրաֆների տրոհման խնդիրների որոշ այլ կիրառություններ կարելի է գտնել Կ. Անդրեևի և Հ. Ռեկեի աշխատանքում[1]:

Դժվար է գերագնահատել հավասարակշռության գաղափարի դերը գիտության մեջ: Սովորաբար, հավասարակշռությունը դիտարկվում է որպես համակարգի այնպիսի վիճակ, որի դեպքում այդ համակարգի վրա ազդող ուժերը փոխլրացնում են իրար կամ բացակայում են: Հայտնի է հավասարակշռության գաղափարի կարևորությունը ֆիզիկայում, քիմիայում, տնտեսագիտությունում, էկոլոգիայում, ճարտարապետությունում և այլ բնագավառներում: Բազմաթիվ են հավասարակշռության գաղափարի մեկնաբանությունները մաթեմատիկայում: Այսպես, օրինակ, խաղերի տեսությունում դիտարկվում են հավասարակշռության թեորեմները (օրինակ՝ Նեշի հավասարակշռությունը), կարգացուցակների տեսությունում դիտարկվում են այնպիսի կարգացուցակներ, որտեղ ծանրաբեռնվածությունը բաշխվում է հավասարաչափ այդ կարգացուցակի մասնակիցների համար, գրաֆների տեսությունում ուսումնասիրվում են հավասարաչափ ներկումները, որոնց դեպքում ցանկացած երկու տարբեր գույնով ներկված գագաթների (կողերի) քանակների տարբերությունը մեծ չէ մեկից: Որոշ սոցիալական և այլ ցանցերում թույլատրվում է կողերին վերագրել «դրական» կամ «բացասական» նիշեր: Այն ցանցերը, որոնց ցիկլերում մասնակցում են զույգ թվով «բացասական» նիշեր, օժտված են կառուցվածքային հավասարակշռությամբ: Մասնավորապես, Ֆ. Հարարին[2,3] ապացուցել է, որ կառուցվածքային հավասարակշռությամբ օժտված ցանցը կարելի է տրոհել կապակցված գագաթների խմբերի այնպես, որ նույն խմբի անդամների բոլոր կապերը «դրական» լինեն, իսկ տարբեր խմբերի անդամների բոլոր կապերը «բացասական» լինեն:

[1]K. Andreev, H. Räcke, Balanced Graph Partitioning, Proceedings of the Sixteenth Annual ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures, Barcelona, Spain, 2004, pp. 120-124.

[2]F. Harary, R.Z. Norman, D. Cartwright, Structural models: an introduction to the theory of directed graphs, New York, Wiley, 1965.

[3]M.E.J. Newman, Networks, An Introduction, Oxford University Press, 2010.

Գրաֆների տեսությունում Դ. դե Վերրայի[4] կողմից դիտարկվել են երկկողմանի մուլտիգրաֆների կողային ներկումների գոյության և կառուցման խնդիրները, երբ յուրաքանչյուր գագաթի համար այդ գագաթին կից ցանկացած երկու գույնով ներկված կողերի քանակների տարբերությունը մեծ չէ մեկից: Ապացուցվել է, որ կամայական երկկողմանի G մուլտիգրաֆի և k բնական թվի համար G-ի կողերը կարելի է ներկել k գույներով՝ բավարարելով նշված պայմանին: Այս խնդրի լուծումները համապատասխանում են այնպիսի դասացուցակներին, երբ ուսուցիչների և դասարանների ծանրաբեռնվածությունները բաշխվում են հավասարաչափ: Առանձին հետաքրքրություն է ներկայացնում այնպիսի համակարգերի մոդելավորումը, որոնց դեպքում սուբյեկտները ենթակա են երկու հակադիր ազդեցությունների: Այդ համակարգերի հավասարակշռությունը հետազոտելու նպատակով Ս. Բալիկյանի և Ռ. Քամալյանի կողմից[5] 2005 թվականին ներմուծվել են գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումները: Պետք է նշել, որ Ս. Բալիկյանի և Ռ. Քամալյանի կողմից այդ խնդիրները դիտարկվել են երկու տարբեր ձևակերպումներով, երբ մոդելավորման համակարգի սուբյեկտները կարող են ունենալ կամ չունենալ ինքնապաշտպանության հնարավորություն: Գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումները կարող են նաև դիտարկվել որպես հիպերգրաֆների հավասարակշռված ներկումների մասնավոր դեպքեր: Կ. Բերժի[6] կողմից ստացվել են որոշ բավարար պայմաններ հիպերգրաֆների հավասարակշռված ներկումների գոյության համար: Հիպերգրաֆների հավասարակշռված ներկումների գոյության մասին որոշ արդյունքներ ստացվել են նաև Ռ. Յուսթերի կողմից[7]: Ա. Գուլիա-Հուրին[8] նկարագրել է ունիմոդուլյար հիպերգրաֆները օգտագործելով մասնակի հավասարակշռված 2-ներկումները և ապացուցել, որ $H = (V, E)$ հիպերգրաֆը ունիմոդուլյար է այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած $V_0 \subseteq V$-ի համար, գոյություն ունի 2-ներկում $\alpha : V_0 \to \{0, 1\}$ այնպիսին, որ ցանկացած $e \in E$ համար, $\big||e \cap \alpha^{-1}(0)| - |e \cap \alpha^{-1}(1)|\big| \leq 1$: Ա. Հայնալի, Ե. Սեմերեդիի, Վ. Մեյերի, Բ. Բոլլոբաշի և այլ հեղինակների կողմից դիտարկվել են գրաֆների ճիշտ գագաթային այնպիսի ներկումների գոյության և կառուցման խնդիրներ, որոնց համար ցանկացած երկու գույնային դասերի գագաթների քանակները տարբերվում են առավելագույնը մեկով: Յա. Կրատոշվիլի[9] կողմից դիտարկվել են գրաֆների գագաթային 2-ներկումներ, որոնց համար ցանկացած գագաթ ամեն գույնից հավասար քանակությամբ գագաթների է հարևան: Մասնավորապես, Յա. Կրատոշվիլը ապացուցել է, որ այդպիսի ներկման գոյության խնդիրը NP-լրիվ է անգամ $(2p, 2q)$-երկհամասեռ $(p, q \geq 2)$ երկկողմանի գրաֆների համար: Ավելին, նա ցույց է տվել, որ վերոնշյալ ներկման գոյության խնդիրը $(2p, 2q)$-երկհամասեռ $(p, q \geq 2)$ երկկողմանի գրաֆների համար կարելի է լուծել բազմանդամային ժամանակում: Մ. Գերբերը և Դ. Կոբլերը առաջարկել են[10] դիտարկել գրաֆի երկու ոչ դատարկ բազմությունների տրոհման խնդիրը, այնպես որ ցանկացած գագաթ ունի ամենաքիչը այնքան հարևան իր կողմում,

---

[4]D. de Werra, Balanced schedules, INFOR. N9, 1971, pp. 230-237.

[5]С.В. Баликян, Р.Р. Камалян, Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$, Доклады НАН РА, т. 105, No. 1, 2005, стр. 21-27.

[6]C. Berge, Graphs and Hypergraphs. Elsevier Science Ltd, 1985.

[7]R. Yuster, Equitable coloring of k-uniform hypergraphs, SIAM J. Disc. Math. 16(4), 2003, pp. 524-532.

[8]A. Ghouila-Houri, Caracterisation des matrices totalement unimodulaires, C. R. Acad. Sci. Paris, 254, 1962, pp. 1192–1194.

[9]J. Kratochvil, Complexity of Hypergraph Coloring and Seidel's Switching, Graph Theoretic Concepts in Computer Science, 29th International Workshop, WG 2003, Elspeet, The Netherlands, Revised Papers, 2880, 2003, pp. 297-308.

[10]M. Gerber, D. Kobler, Algorithmic approach to the satisfactory graph partitioning problem, European J. Oper. Res. 125, 2000, pp. 283–291.

որքան մյուսում: Ք. Բազգանի, Ժ. Տուզաի և Դ. Վանդերպուտենի կողմից[11] ապացուցվել է, որ այդ խնդիրը NP-լրիվ է: 2005 թվականին Ս. Բալիկյանը և Ռ. Քամալյանը ապացուցել են, որ 3 առավելագույն աստիճան ունեցող երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդիրը բաց շրջակայքի դեպքում NP-լրիվ է: 2006 թվականին նմանատիպ արդյունք 4 առավելագույն աստիճան ունեցող երկկողմանի գրաֆների դասում ապացուցվել է լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդրի համար փակ շրջակայքի դեպքում[12]: Ս. Բալիկյանի[13] կողմից ստացվել է նաև անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ ծառերում լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության համար:

Իրական խնդիրների հետազոտման ժամանակ մոդելավորվող համակարգերի սուբյեկտները հաճախ ենթակա են ոչ թե երկու տարբեր հակադիր ազդեցությունների, այլ տարբեր շահեր հետապնդող k ուժերի: Այդպիսի համակարգերի հավասարակշռության հետազոտումը կարևոր են դարձնում այնպիսի k-տրոհումների ուսումնասիրությունը, որոնց գագաթների վրա դրվում է լոկալ-հավասարակշռության պայմանը ցանկացած երկու ազդող ուժերի նկատմամբ: Գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումներին նվիրված հետազոտությունները վերջին 15 տարիներում հիմնականում վերաբերվում էին երկկողմանի գրաֆներին, սակայն մոդելավորվող համակարգերին համապատասխանող գրաֆները կարող են լինել ոչ միայն երկկողմանի գրաֆներ, այլև գրաֆների այլ դասեր, որոնք մնում էին քիչ հետազոտված: Մյուս կողմից, կիրառական խնդիրների մոդելավորման ժամանակ հաճախ առաջանում են իրավիճակներ, երբ լոկալ-հավասարակշռության պայմանը պետք է կիրառել մոդելավորվող համակարգի ոչ թե բոլոր սուբյեկտների համար, այլ միայն որոշակի արտոնություն ունեցող մասնակիցների համար: Այսպիսի իրավիճակները մոդելավորելիս անհրաժեշտ է լինում դիտարկել լոկալ-հավասարակշռության պայմանի կատարումը գրաֆների գագաթների որոշակի ենթաբազմության համար (օրինակ՝ երկկողմանի գրաֆի մի կողմի գագաթների համար), ինչը ևս հետազոտության կարիք ունի:

Աշխատանքի հիմնական նպատակը և նրանում դիտարկված խնդիրները: Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների k-տրոհումների ($k \geq 2$) գոյության, կառուցման, բարդության և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրներ: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է վերոհիշյալ խնդիրների հետազոտումը գրաֆների տարբեր դասերի համար, ինչպես նաև արդյունավետ ալգորիթմների մշակումը, որոնք այդպիսի տրոհումների առկայության դեպքում կառուցում են անհրաժեշ k-տրոհումները:

Հետազոտության օբյեկտները: Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում գրաֆների տարբեր դասեր, գրաֆների k-տրոհումներ ($k \geq 2$), գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումներ ($k \geq 2$), lb-բաց և lb-փակ քրոմատիկ թվեր, ինչպես նաև լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումներ ($k \geq 2$) չունեցող գրաֆներ:

[11] C. Bazgan, Zs. Tuza, D. Vanderpooten, The satisfactory partition problem, Discrete Applied Mathematics 154, 2006, pp. 1236–1245

[12] С.В. Баликян, Р.Р. Камалян, Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$, при расширенном определении окрестности вершины, Доклады НАН РА, т. 106, No. 3, 2006, стр. 218-226.

[13] S.V. Balikyan, On existence of certain locally-balanced 2-partition of a tree, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 30, 2008, pp. 25-30.

Հետազոտության մեթոդները: Հետազոտությունն իրականացվել է դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և կոմբինատոր օպտիմիզացիայի մեթոդների օգնությամբ:

Գիտական նորույթը: Աշխատանքում ընդհանրացվել են գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումները՝ տրվել է գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհման ($k \geq 2$) սահմանումը, ինչպես նաև ներմուծվել են lb-բաց և lb-փակ քրոմատիկ թվերը և նշվել է նրանց կապը գրաֆների այլ քրոմատիկ թվերի հետ: Աշխատանքում առաջին անգամ ուսումնասիրվել են գրաֆների այնպիսի k-տրոհումները ($k \geq 2$), երբ լոկալ-հավասարակշռության պայմանը դրվում է գրաֆի գագաթների ենթաբազմության վրա:

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը: Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները, նրանում ստացված արդյունքները և մշակված ալգորիթմները ունեն տեսական կարևոր նշանակություն գրաֆների տրոհումներին և ներկումներին նվիրված հետազոտություններում: Աշխատանքում ստացված որոշ արդյունքներ կարող են ունենալ գործնական կիրառություններ: Մասնավորապես, այդ արդյունքները կարող են կիրառվել այնպիսի համակարգերի մաթեմատիկական մոդելավորման համար, որոնց սուբյեկտները ենթակա են տարբեր շահեր հետապնդող k ($k \geq 2$) ուժերի կողմից ազդեցությունների և պահանջվում է նվազեցնել կոնֆլիկտների հավանականությունը:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները: Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները.

1. Գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների ($k \geq 2$) գոյության և կառուցման հետ առնչվող մի շարք արդյունքներ, ինչպես նաև lb-բաց, lb-փակ քրոմատիկ թվերի ընդհանուր գնահատականներ և որոշ գրաֆների դասերի համար այդ պարամետրերի ճշգրիտ արժեքներ,
2. Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների ($k \geq 2$) գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ,
3. Զույգ, կենտ և երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության անհրաժեշտ, բավարար պայմաններ, ինչպես նաև որոշ այդպիսի գրաֆների դասերի դեպքում լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ,
4. n-չափանի խորանարդի, ցանցերի, գլանների և տոռերի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումերի գոյության և կառուցման հետ առնչվող մի շարք արդյունքներ,
5. Գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների ($k \geq 2$) գոյության խնդիրի բարդության հետ կապված մի շարք արդյունքներ, ինչպես նաև այդ տրոհումների գոյության խնդրի բարդությունը, երբ լոկալ-հավասարակշռության պայմանը դրվում է գրաֆի գագաթների ենթաբազմության վրա:

Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փորձարկումը: Աշխատանքում ստացված արդյունքները պարբերաբար ներկայացվել և քննարկվել են ԵՊՀ-ում անցկացվող գրաֆների տեսության գիտական սեմինարների ժամանակ, ԵՊՀ ՈՒԳԸ-ի կողմից կազմակերպված տարեկան գիտաժողովների ժամանակ, ինչպես նաև զեկուցվել են մի շարք գիտաժողովներում Հայաստանում և եվրոպական երկրներում.

1. 6th Polish Combinatorial Conference, Bedlewo, Poland, September 19-23, 2016,
2. Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 25-29, 2017,
3. International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies, Balti, Moldova, April 19-21, 2018,
4. YSU SSS 5th International Scientific Conference, Yerevan, Armenia, April 16-20, 2018,
5. Armenian Workshop On Graphs, Combinatorics, Probability and their application to machine learning, Armenia, June 1-7, 2019,
6. Colloquium on Combinatorics, Paderborn, Germany, November 8-9, 2019,
7. 8th Polish Combinatorial Conference, Poland, September 14-18, 2020,
8. AMU Conference dedicated to the International Day of Mathematics, Yerevan, Armenia, March 14, 2021:

Աշխատանքի առանձին հատվածները մանրամասն քննարկվել են Պադերբորնի համալսարանում կազմակերպված սեմինարի ընթացքում:

Հրապարակումները: Հետազոտության թեմայի վերաբերյալ տպագրվել են 10 գիտական աշխատանքներ:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը: Աշխատանքի ծավալը կազմում է 118 էջ: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից (55 անուն): Աշխատանքը պարունակում է 5 նկար:

Աշխատանքի պարունակությունը

Աշխատանքում դիտարկվում են ոչ կողմնորոշված վերջավոր գրաֆներ՝ առանց պատիկ կողերի և օղերի: G գրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունները նշանակենք, համապատասխանաբար, $V(G)$-ով և $E(G)$-ով: Ցանկացած $v \in V(G)$-ի համար $d_G(v)$-ով նշանակենք այդ գագաթի *աստիճանը* G-ում, $\delta(G)$-ով և $\Delta(G)$-ով նշանակենք գրաֆի նվազագույն և առավելագույն աստիճանները: G գրաֆը կանվանենք r-*համասեռ*, եթե $\delta(G) = \Delta(G) = r$ ($r \in \mathbb{N}$): 3-համասեռ գրաֆներին կանվանենք *խորանարդ* գրաֆներ, իսկ այն գրաֆները, որոնց առավելագույն աստիճանը 3 է կանվանենք *ենթախորանարդ գրաֆներ*: Երկկողմանի գրաֆը կանվանենք (a,b)-*երկհամասեռ*, եթե մի կողմի յուրաքանչյուր գագաթի աստիճանը a է, իսկ մյուս կողմի յուրաքանչյուր գագաթի աստիճանը b: v գագաթի հարևանների բազմությունը G գրաֆում նշանակենք $N_G(v)$-ով և կանվանենք *v գագաթի բաց շրջակայք*: *v գագաթի փակ շրջակայքը* նշանակենք $N_G[v]$-ով և սահմանենք հետևյալ կերպ՝ $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$: G գրաֆը կանվանենք *զույգ (կենտ)*, եթե G-ի ցանկացած գագաթի աստիճանը զույգ (կենտ) է: Մենք կօգտագործենք ստանդարտ նշանակումները՝ P_n, C_n, K_n և Q_n n գագաթանի պարզ ճանապարհի, պարզ ցիկլի, լրիվ գրաֆի և n-չափանի խորանարդի համար համապատասխանաբար: Գրաֆը կանվանենք *պարզ ցիկլի k-րդ աստիճան* և կնշանակենք C_n^k-ով, եթե $V\left(C_n^k\right) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ և $E\left(C_n^k\right) = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, որտեղ $E_i = \{v_j v_{(j+i) \pmod n} : 0 \le j \le n-1\}$: Պարզ է, որ C_n^k-ն $2k$-համասեռ գրաֆ է[14]:

G գրաֆի կմախքային F ենթագրաֆը կոչվում է G-ի *r-ֆակտոր* ($r \in \mathbb{N}$), եթե ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթի համար $d_F(v) = r$: G գրաֆի *r-ֆակտորիզացիա* կանվանենք G-ի կողերով չհատվող r-ֆակտորների տրոհումը:

Եթե d թիվը n թվի բաժանարար է, ապա կնշանակենք $d|n$: a և b բնական թվերի *ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը* կնշանակենք $gcd(a,b)$-ով:

G և H գրաֆների $G\square H$ *դեկարտյան արտադրյալը* սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$V(G\square H) = V(G) \times V(H),$$
$$E(G\square H) = \{(u_1,v_1)(u_2,v_2) : (u_1 = u_2 \text{ և } v_1v_2 \in E(H)) \text{ կամ } (v_1 = v_2 \text{ և } u_1u_2 \in E(G)\} :$$

$m,n \in \mathbb{N}$-ի համար $P_m\square P_n$, $P_m\square C_n$ ($n \ge 3$) և $C_m\square C_n$ ($m,n \ge 3$) դեկարտյան արտադրյալները կանվանենք *քառակուսային ցանց, գլան և տոր* և կնշանակենք, համապատասխանաբար, $G(m,n)$, $C(m,n)$ և $T(m,n)$:

Դիցուք G-ն գրաֆ է և $R \subseteq V(G)$: *G գրաֆի 2-տրոհում* կոչվում է $f : V(G) \to \{0,1\}$ ֆունկցիան: G գրաֆի f 2-տրոհումը կանվանենք *լոկալ-հավասարակշռված բաց շրջակայքով R-ի վրա*, եթե կամայական $v \in R$-ի համար,

$$\big||\{u \in N_G(v) : f(u) = 0\}| - |\{u \in N_G(v) : f(u) = 1\}|\big| \le 1 :$$

Այն դեպքում, երբ $R = V(G)$, ապա f-ը պարզապես կանվանենք *լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում բաց շրջակայքով*:

Դիցուք G-ն գրաֆ է և $R \subseteq V(G)$: G գրաֆի f' 2-տրոհումը կանվանենք *լոկալ-հավասարակշռված փակ շրջակայքով R-ի վրա*, եթե կամայական $v \in R$-ի համար,

$$\big||\{u \in N_G[v] : f'(u) = 0\}| - |\{u \in N_G[v] : f'(u) = 1\}|\big| \le 1 :$$

Այն դեպքում, երբ $R = V(G)$, ապա f'-ը պարզապես կանվանենք *լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում փակ շրջակայքով*:

Այժմ սահմանենք G գրաֆի լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումները, երբ $k \ge 3$: Դիցուք G-ն գրաֆ է և $R \subseteq V(G)$: $f : V(G) \to \{0,1,\ldots,k-1\}$ սուրյեկցիան ($k \ge 3$) կանվանենք *G գրաֆի k-տրոհում*: G գրաֆի f k-տրոհումը ($k \ge 3$) կանվանենք *լոկալ-հավասարակշռված բաց շրջակայքով R-ի վրա*, եթե կամայական $v \in R$ գագաթի համար և կամայական $0 \le i < j \le k-1$ համար

$$\big||\{u \in N_G(v) \colon\ f(u) = i\}| - |\{u \in N_G(v) \colon\ f(u) = j\}|\big| \le 1:$$

Այն դեպքում, երբ $R = V(G)$, ապա f-ը պարզապես կանվանենք *լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհում բաց շրջակայքով*:

Դիցուք G-ն գրաֆ է և $R \subseteq V(G)$: G գրաֆի f' k-տրոհումը ($k \ge 3$) կանվանենք *լոկալ-հավասարակշռված փակ շրջակայքով R-ի վրա*, եթե կամայական $v \in R$ գագաթի համար և կամայական $0 \le i < j \le k-1$ համար

$$\big||\{u \in N_G[v] \colon\ f'(u) = i\}| - |\{u \in N_G[v] \colon\ f'(u) = j\}|\big| \le 1 :$$

[14] Չսահմանված հասկացությունների և նշանակումների համար տես D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

Այն դեպքում, երբ $R = V(G)$, ապա f'-ը պարզապես կանվանենք *լոկալ-հավասարակշռված* k*-փրոհում փակ շրջակայքով*:

Նվազագույն k թիվը, որի դեպքում G գրաֆը ունի լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհում բաց (փակ) շրջակայքով կանվանենք G գրաֆի lb*-բաց (*lb*-փակ) քրոմափիկ թիվ* և կնշանակենք $\chi_{(lb)}(G)$-ով ($\chi_{[lb]}(G)$-ով): Մենք կընդունենք $\chi_{(lb)}(K_1) = \chi_{[lb]}(K_1) = 2$: Ակնհայտ է, որ ցանկացած G գրաֆի համար

$$2 \leq \chi_{(lb)}(G) \leq |V(G)| \text{ և } 2 \leq \chi_{[lb]}(G) \leq |V(G)|:$$

Առաջին գլխի 1.1 պարագրաֆը նվիրված է գրաֆիների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումներին և lb-բաց և lb-փակ քրոմատիկ թվերին: Մասնավորապես, պարագրաֆում ներմուծվել են lb-բաց և lb-փակ քրոմատիկ թվերը և ապացուցվել է հետևյալ պնդումը.

Պնդում 1.1.7. *Ցանկացած $n \geq 2$ բնական թվի համար գոյություն ունեն G և H երկկողմանի գրաֆներ այնպիսին, որ $\chi_{(lb)}(G) = n$ և $\chi_{[lb]}(H) = n$:*

Պարագրաֆում նաև տրվել են lb-բաց և lb-փակ քրոմատիկ թվերի հասանելի վերին գնահատականներ: Մասնավորապես, ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1.1.8. *Կամայական $\Delta \geq 2$ առավելագույն աստիճան ունեցող G գրաֆի համար տեղի ունի*

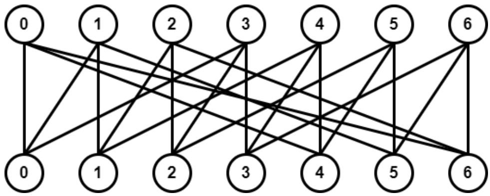
$$\chi_{(lb)}(G) \leq \Delta^2 - \Delta + 1:$$

Կամայական $\Delta \geq 1$ առավելագույն աստիճան ունեցող G գրաֆի համար տեղի ունի

$$\chi_{[lb]}(G) \leq \Delta^2 + 1:$$

Ավելին, գնահատականները հասանելի են:

Նկ. 1.1-ը ցույց է տալիս գրաֆի օրինակ, որի համար Թեորեմ 1.1.8-ի վերին գնահատականը հասանելի է:



Նկ. 1.1: $I(\pi(2))$ գրաֆի լոկալ-հավասարակշռված 7-տրոհումը բաց շրջակայքով:

Նույն պարագրաֆում դիտարկվել են նաև համասեռ գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների գոյության խնդիրը: Ստացվել է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 1.1.9. *Եթե $2kl$-համասեռ G գրաֆը ունի լոկալ-հավասարակշռված $2k$-տրոհում բաց շրջակայքով, ապա G-ն ունի l-ֆակտորիզացիա:*

1.1 պարագրաֆում ստացվել են նաև արդյունքներ, որոնք նվիրված են lb-փակ քրոմատիկ թվերին: Մասնավորապես, ապացուցվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 1.1.13. *Եթե G գրաֆում գոյություն ունի u գագաթ և կախված գագաթների S բազմություն այնպիսին, որ $S \subseteq N_G(u)$, ապա*

$$\chi_{[lb]}(G) \geq 1 + \left\lceil \frac{|S|}{d_G(u) - |S| + 2} \right\rceil :$$

Պնդում 1.1.14. *Ցանկացած Δ և k բնական թվերի համար ($2 \leq k \leq \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$), գոյություն ունի G կապակցված գրաֆ այնպիսին, որ $\Delta(G) = \Delta$ և $\chi_{[lb]}(G) = k$:*

Պարագրաֆի վերջում նշվել է lb-բաց և lb-փակ քրոմատիկ թվերի կապը քրոմատիկ այլ պարամետրերի հետ: Հիշեցնենք, որ G գրաֆի *ինյեկտիվ k-ներկումը*[15] դա արտապատկերում է՝ $V(G)$-ից գույների $\{1, \ldots, k\}$ բազմության մեջ այնպես, որ 2 հեռավորություն ունեցող կամայական երկու գագաթ ներկված են տարբեր գույներով, իսկ G գրաֆի *ինյեկտիվ քրոմատիկ թիվը*՝ $\chi_i(G)$-ն դա այն նվազագույն k թիվն է, որի համար G գրաֆը ունի ինյեկտիվ k-ներկում: G գրաֆի 2-*հեռավորության k-ներկումը*[16,17] արտապատկերում է՝ $V(G)$-ից գույների $\{1, \ldots, k\}$ բազմության մեջ այնպես, որ առավելագույնը 2 հեռավորություն ունեցող կամայական երկու գագաթ ներկված են տարբեր գույներով: G գրաֆի 2-*հեռավորության քրոմատիկ թիվը*՝ $\chi_2(G)$-ն դա այն նվազագույն k թիվն է, որի համար G գրաֆը ունի 2-հեռավորության k-ներկում:

Թեորեմ 1.1.15. *Կամայական $\Delta \geq 2$ առավելագույն աստիճան ունեցող G գրաֆի համար տեղի ունի հետևյալը*

1) *Եթե $\chi_{(lb)}(G) \geq \Delta$, ապա $\chi_{(lb)}(G) = \chi_i(G)$,*

2) *Եթե $\chi_{[lb]}(G) \geq \Delta + 1$, ապա $\chi_{[lb]}(G) = \chi_2(G)$:*

1.2 պարագրաֆը նվիրված է lb-բաց և lb-փակ քրոմատիկ թվերի ճշգրիտ արժեքների հետազոտմանը: Մասնավորապես, պարագրաֆում ստացվել են ցիկլերի, լրիվ գրաֆների, n-չափանի խորանարդի և լրիվ երկկողմանի գրաֆների lb-բաց և lb-փակ քրոմատիկ թվերի ճշգրիտ արժեքները: Նշենք այդ արդյունքներից մի քանիսը:

Թեորեմ 1.2.2. *K_n լրիվ գրաֆը ունի լոկալ-հավասարակշռված k-փրոհում ($2 \leq k \leq n$) բաց շրջակայքով այն և միայն այն դեպքում, եթե n-ը բաժանվում է k-ի:*

Հետևանք 1.2.4. *Ցանկացած n բնական թվի համար գոյություն ունի $k \geq 2$ բնական թիվ և G գրաֆ այնպիսին, որ G-ն ունի լոկալ-հավասարակշռված k-փրոհում և $(k+n)$-փրոհում բաց շրջակայքով, բայց ցանկացած $1 \leq i < n$ համար G-ն չունի լոկալ-հավասարակշռված $(k+i)$-փրոհում բաց շրջակայքով:*

Թեորեմ 1.2.5. *Ցանկացած n բնական թվի համար n-չափանի Q_n խորանարդը ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-փրոհում բաց և փակ շրջակայքերով:*

Հետևանք 1.2.6. *Ցանկացած n բնական թվի համար*

$$\chi_{(lb)}(Q_n) = \chi_{[lb]}(Q_n) = 2:$$

[15] G. Hahn, J. Kratochvíl, J. Širáň, D. Sotteau, On the injective chromatic number of graphs, Discrete Math. 256, 2002, pp. 179-192.

[16] F. Kramer, H. Kramer, Un probleme de coloration des sommets d'un graphe, C.R. Acad. Sci. Paris A 268, 1969, pp. 46–48.

[17] F. Kramer, H. Kramer, A survey on the distance-coloring of graphs, Discrete Math. 308, 2008, pp. 422–426.

Թեորեմ 1.2.10. *Եթե $m > 2$ կամ $n > 2$ չի բաժանվում k-ի վրա ($2 \leq k \leq m+n$), ապա լրիվ երկկողմանի $K_{m,n}$ գրաֆը ունի լոկալ-հավասարակշռված k-փրոհում փակ շրջակայքով այն և միայն այն դեպքում, երբ $k = m + n$:*

Հետևանք 1.2.11. *Ցանկացած բնական $m > 2$, $n > 2$ թվերի համար*

$$\chi_{[lb]}(K_{m,n}) = \begin{cases} m+n, & \text{եթե} \quad gcd(m,n) = 1, \\ min\{k : k \geq 2, \ k \mid m, \ k \mid n\}, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

1.3 պարագրաֆը նվիրված է կենտ և զույգ գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների ուսումնասիրությանը: Մասնավորապես, պարագրաֆում ստացվել է զույգ գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության անհրաժեշտ պայմանը.

Թեորեմ 1.3.1. *Դիցուք G-ն n գագաթանի զույգ գրաֆ է և*

$$k = \min\{q : v \in V(G), d_G(v) = p2^q, \text{որտեղ } p\text{-ն կենտ է և } q \in \mathbb{N}\}:$$

Եթե G-ն ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-փրոհում բաց շրջակայքով, ապա

$$|\{v : v \in V(G), d_G(v) = p2^k, \text{որտեղ } p\text{-ն կենտ է}\}| \text{ զույգ է:}$$

Նշենք, որ այս աշխատանքի վերջին գլխում ապացուցվում է, որ զույգ երկկողմանի գրաֆների դասում լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհման գոյության խնդիրը բաց շրջակայքի դեպքում NP-լրիվ է:

Հետևանք 1.3.2. *Ցանկացած կենտ գագաթանի $2r$-համասեռ գրաֆ չունի լոկալ-հավասարակշռված 2-փրոհում բաց շրջակայքով:*

Նույն պարագրաֆում ստացվել է նաև կենտ գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության համանման պայման: Որոշ զույգ կամ կենտ գրաֆների դեպքում տրվել են լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

Թեորեմ 1.3.4. *$K_m \square K_n$ ($m, n \geq 2$) գրաֆը ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-փրոհում փակ շրջակայքով այն և միայն այն դեպքում, եթե m-ը և n-ը զույգ են:*

Թեորեմ 1.3.6. *Որպեսզի C_n^k գրաֆը ունենա լոկալ-հավասարակշռված 2-փրոհում բաց շրջակայքով անհրաժեշտ է և բավարար, որ $n/(gcd\ (n, k+1))$ լինի զույգ:*

1.4 պարագրաֆը նվիրված է երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության և կառուցման խնդիրներին: Մասնավորապես, ապացուցվել է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 1.4.2. *$(2, 2k+1)$-երկհամասեռ ($k \in \mathbb{N}$) երկկողմանի G գրաֆը ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-փրոհում բաց շրջակայքով այն և միայն այն դեպքում, եթե G չի պարունակում $2 \pmod 4$ երկարությամբ ցիկլ:*

Այս արդյունքը Յա. Կրատոշվիլի[18] արդյունքի հետ մեկտեղ ցույց է տալիս, որ (a, b)-երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆների, երբ $\min\{a, b\} \leq 2$, լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդիրը բաց շրջակայքի դեպքում կարելի է լուծել բազմանդամային ժամանակում: Բայց մյուս կողմից այս աշխատանքի վերջին գլխում

[18]J. Kratochvil, Complexity of Hypergraph Coloring and Seidel's Switching, Graph Theoretic Concepts in Computer Science, 29th International Workshop, WG 2003, Elspeet, The Netherlands, Revised Papers, 2880, 2003, pp. 297-308.

ապացուցվում է, որ նույն խնդիրը $(3,8)$-երկիամասեռ երկկողմանի գրաֆների դեպքում NP-լրիվ է:

Չնայած նրան, որ Ս. Բալիկյանը և Ռ. Քամալյանը ապացուցել են[19], որ ենթախորանարդ երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդիրը բաց շրջակայքի դեպքում NP-լրիվ է, այնուամենայնիվ, նույն պարագրաֆում հաջողվել է ապացուցել հետևյալ արդյունքը:

Թեորեմ 1.4.3. *Եթե ենթախորանարդ երկկողմանի G գրաֆը չի պարունակում $2 \pmod 4$ երկարությամբ ցիկլ, ապա G ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում բաց շրջակայքով:*

1.5 պարագրաֆում հետազոտվել են ցանցային տիպի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումները: Մասնավորապես, ապացուցվել է, որ $G(m,n)$ քառակուսային ցանցերը և $C(m,n)$ գլանները ($m \geq 2$) ունեն լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում բաց շրջակայքով, իսկ տոռերի դեպքում ստույգ է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 1.5.3. *Ցանկացած բնական $m,n \geq 3$ թվերի համար $T(m,n)$ տոռը ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում բաց շրջակայքով այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \cdot n$-ը զույգ է:*

Նույն պարագրաֆում դիտարկվել են նաև ցանցային տիպի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության և կառուցման խնդիրներ փակ շրջակայքի դեպքում և ստացվել են այդպիսի տրոհումների գոյության մի շարք բավարար պայմաններ:

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է լրիվ բազմակողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումներին, երբ $k \geq 2$:

2.1 պարագրաֆում հետազոտվել է լրիվ բազմակողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումները: Մասնավորապես, պարագրաֆում ստացվել է այդ գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը բաց շրջակայքի դեպքում: Մինչ արդյունքին անցնելը տանք մի քանի անհրաժեշտ սահմանում: Լրիվ բազմակողմանի գրաֆի X կողմը կանվանենք զույգ (կենտ), եթե $|X|$-ը զույգ է (կենտ է): m_1, m_2 և $m_{\geq 3}$-ով նշանակենք լրիվ բազմակողմանի գրաֆի, համապատասխանաբար, մեկ գագաթ, երկու գագաթ և առնվազն երեք գագաթ պարունակող կողմերի քանակները:

Թեորեմ 2.1.3. *$K_{r_1,r_2,\ldots,r_n}$ գրաֆը ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում բաց շրջակայքով այն և միայն այն դեպքում, երբ կենտ կողմերի քանակը զույգ է կամ մեկ:*

Նույն պարագրաֆում դիտարկելով մի շարք դեպքեր հաջողվել է ստանալ այդ գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման փակ շրջակայքի դեպքում: Նշենք դրանցից մի քանիսը:

Թեորեմ 2.1.7. *Եթե $m_1 > 0$ և $|V(K_{r_1,r_2\ldots,r_n})|$-ը զույգ է, ապա $K_{r_1,r_2,\ldots,r_n}$ գրաֆը ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում փակ շրջակայքով այն և միայն այն դեպքում, եթե այն չունի 3 կամ ավել գագաթ պարունակող կենտ կողմ:*

Թեորեմ 2.1.9. *Եթե $K_{r_1,r_2,\ldots,r_n}$ գրաֆի գագաթների քանակը կենտ է, $m_1 > 0$ և ցանկացած X կողմ պարունակում է երկու կամ կենտ քանակությամբ գագաթներ, ապա $K_{r_1,r_2\ldots,r_n}$-ը ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում փակ շրջակայքով այն և միայն այն դեպքում, եթե $m_1 \geq 2m_2 + m_{\geq 3} - 1$:*

[19] С.В. Баликян, Р.Р. Камалян, Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$, Доклады НАН РА, т. 105, No. 1, 2005, стр. 21-27.

2.2 պարագրաֆում ուսումնասիրվել է լրիվ բազմակողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումները ($k \geq 3$) բաց շրջակայքի դեպքում: Մասնավորապես, պարագրաֆում դիտարկելով մի շարք դեպքեր հաջողվել է ստանալ անհրաժեշտ և բավարար պայման այդ գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների ($k \geq 3$) գոյության համար բաց շրջակայքի դեպքում: Նշենք դրանցից մի քանիսը: Բայց մինչ արդյունքներին անցնելը տանք մի քանի անհրաժեշտ սահմանում: $G = K_{r_1,r_2,\ldots,r_n}$-ն լրիվ բազմակողմանի գրաֆի և ցանկացած բնական k թվի համար $rem_G(k)$-ով և $num_G(k)$-ով նշանակենք համապատասխանաբար հետևյալ մեծությունները՝ $rem_G(k) = \sum_{i=1}^{n}(r_i \pmod{k})$ և $num_G(k) = \sum_{i=1}^{n}(sgn(r_i \pmod{k}))$:

Թեորեմ 2.2.7. *Դիցուք $G = K_{r_1,r_2,\ldots,r_n}$-ը լրիվ բազմակողմանի գրաֆ է, $rem_G(k) > k$ և $num_G(k) = 2$, ապա G-ն ունի լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհում բաց շրջակայքով:*

Թեորեմ 2.2.12. *Դիցուք $G = K_{r_1,r_2,\ldots,r_n}$-ը լրիվ բազմակողմանի գրաֆ է, $rem_G(k) > k$ և $num_G(k) > 2$: Որպեսզի G-ն ունենա լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհում բաց շրջակայքով անհրաժեշտ է և բավարար, որ $num_G(k) < k$ և $(num_G(k)-1) \cdot k < rem_G(k) \leq (k-1) \cdot num_G(k)$:*

Աշխատանքի երրորդ գլուխը նվիրված է գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված տրոհումների խնդիրների բարդությանը:

3.1 պարագրաֆում դիտարկվում են գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդրի բարդության հետ կապված հարցեր: Մասնավորապես, պարագրաֆում ապացուցվում է, որ լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդիրը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր երկհամասեռ, զույգ և ենթախորանարդ երկկողմանի գրաֆների, ինչպես նաև կենտ ենթախորանարդ գրաֆների դասում:

$V = \{x_1, \ldots, x_n\}$-ով նշանակենք փոփոխականների վերջավոր բազմությունը: Լիտերալ ասելով կհասկանանք x փոփոխականը կամ նրա ժխտումը՝ $\overline{x}$: Լիտերալների բազմությունը նշանակենք $L_V = \{x, \overline{x} : x \in V\}$-ով: *clause*-ը լիտերալների բազմություն է, այսինքն L_V-ի ենթաբազմություն, իսկ k-*clause*-ը դա ճիշտ k հատ իրարից տարբեր լիտերալներ պարունակող clause-ն է: clause-ը կանվանենք մոնոտոն, եթե իր բոլոր փոփոխականները չեն պարունակում ժխտումներ:

$NAE_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ֆունկցիան սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$NAE_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } x_1 = x_2 = \cdots = x_n, \\ 1, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Եթե c-ն մոնոտոն k-clause է և $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in c$, ապա $NAE_k(c)$ ֆունկցիան սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$NAE_k(c) = NAE_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$$

Կասենք, որ $f(x_1, \ldots, x_n) = NAE_3(c_1) \,\&\, \cdots \,\&\, NAE_3(c_k)$ բանաձևը իրագործելի է, եթե գոյություն ունի $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, որ $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր 3.1.1 (NAE-3-Sat-E4).

Մուտք: *Տրված է փոփոխականների $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ բազմությունը և մոնոտոն 3-clause-ների $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ հավաքածուն ըստ V-ի փոփոխականների այնպես, որ ամեն փոփոխական հանդիպում է ճիշտ 4 clause-ում:*

Հարց: *Իրագործելի՞ է արդյոք $f(x_1, \ldots, x_n) = NAE_3(c_1) \,\&\, \cdots \,\&\, NAE_3(c_k)$ բանաձևը:*

Ա. Դարմաննը և Ջ. Դոքերը ապացուցել են[20] հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3.1.1. *Խնդիր 3.1.1-ը NP-լրիվ է:*

Ինչպես արդեն նշվել էր 1.4 պարագրաֆում, $(2,4)$-երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդիրը բաց շրջակայքի դեպքում կարելի է լուծել բազմանդամային ժամանակում: Այնուամենայնիվ, մեզ հաջողվել է ցույց տալ, որ զույգ երկկողմանի գրաֆների դասում, որտեղ յուրաքանչյուր գագաթ ունի 2 կամ 4 աստիճան, նույն խնդիրը NP-լրիվ է:

Խնդիր 3.1.2.

Մուտք: *Տրված է G զույգ երկկողմանի գրաֆը, որի $\Delta(G) = 4$:*

Հարց: *Գոյություն ունի՞ արդյոք G գրաֆի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում բաց շրջակայքով:*

Թեորեմ 3.1.2. *Խնդիր 3.1.2-ը NP-լրիվ է:*

2006 թվականին Ս. Բալիկյանի և Ռ. Քամալյանի կողմից[21] ապացուցվել է, որ առավելագույնը 4 աստիճան ունեցող երկկողմանի գրաֆներում լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդիրը փակ շրջակայքի դեպքում NP-լրիվ է: Նույն հեղինակների կողմից առաջարկվել է հիպոթեզ, համաձայն որի առավելագույնը 3 աստիճան ունեցող երկկողմանի գրաֆներում լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդիրը փակ շրջակայքի դեպքում մնում է NP-լրիվ: Այս պարագրաֆում հաստատվել է այդ հիպոթեզը:

Խնդիր 3.1.3.

Մուտք: *Տրված է G երկկողմանի գրաֆը, որի $\Delta(G) = 3$:*

Հարց: *Գոյություն ունի՞ արդյոք G գրաֆի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում փակ շրջակայքով:*

Թեորեմ 3.1.3. *Խնդիր 3.1.3-ը NP-լրիվ է:*

Խնդիր 3.1.4.

Մուտք: *Տրված է G կենտ գրաֆը, որի $\Delta(G) = 3$:*

Հարց: *Գոյություն ունի՞ արդյոք G գրաֆի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում փակ շրջակայքով:*

Թեորեմ 3.1.4. *Խնդիր 3.1.4-ը NP-լրիվ է:*

3.2 պարագրաֆում դիտարկվում են գրաֆների գագաթների R ենթաբազմության վրա լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհման գոյության խնդրի բարդության հետ կապված հարցեր: Մասնավորապես, պարագրաֆում ապացուցվում է, որ R-ի վրա լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդիրը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր անգամ երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆների դասում:

[20] A. Darmann, J. Döcker, On a simple hard variant of Not-All-Equal 3-Sat, Theoretical Computer Science 815, 2020, pp. 147-152.

[21] С.В. Баликян, Р.Р. Камалян, Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$, при расширенном определении окрестности вершины, Доклады НАН РА, т. 106, No. 3, 2006, стр. 218-226.

Խնդիր 3.2.1.

Մուտք: *Տրված է $(3,4r)$-երկհամասեռ երկկողմանի $G=(X,Y;E)$ գրաֆը ֆիքսած r բնական թվի համար:*

Հարց: *Գոյություն ունի՞ արդյոք G գրաֆի լոկալ-հավասարակշռված 2-փրոհում բաց շրջակայքով Y-ի վրա:*

Թեորեմ 3.2.1. *Խնդիր 3.2.1-ը NP-լրիվ է:*

3.3 պարագրաֆում դիտարկվում են գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների ($k \geq 3$) գոյության խնդրի բարդության հետ կապված հարցեր: Մասնավորապես, պարագրաֆում ապացուցվում է, որ լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների գոյության խնդիրը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր երկկողմանի գրաֆների դասում:

Խնդիր 3.3.1.

Մուտք: *Տրված է G երկկողմանի գրաֆը և բնական $3 \leq r \leq |V(G)|$ թիվը:*

Հարց: *Գոյություն ունի՞ արդյոք G գրաֆի լոկալ-հավասարակշռված r-փրոհում բաց շրջակայքով:*

Թեորեմ 3.3.1. *Խնդիր 3.3.1-ը NP-լրիվ է:*

Խնդիր 3.3.2.

Մուտք: *Տրված է G երկկողմանի գրաֆը և բնական $3 \leq r \leq |V(G)|$ թիվը:*

Հարց: *Գոյություն ունի՞ արդյոք G գրաֆի լոկալ-հավասարակշռված r-փրոհում փակ շրջակայքով:*

Թեորեմ 3.3.2. *Խնդիր 3.3.2-ը NP-լրիվ է:*

Հիմնական արդյունքներն ու հետևությունները

Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների ($k \geq 2$) գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրներ, ներմուծվել են և գնահատվել են lb-բաց, lb-փակ քրոմատիկ թվերը, գրաֆների որոշ դասերի համար գտնվել են այդ թվերի ճշգրիտ արժեքները, հետազոտվել է այդ տրոհումների գոյության խնդրի բարդության հետ կապված հարցեր, ինչպես նաև դիտարկվել է այդ տրոհումների գոյության խնդրի բարդությունը, երբ լոկալ-հավասարակշռության պայմանը դրվում է գրաֆի գագաթների ենթաբազմության վրա:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1. Գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների ($k \geq 2$) գոյության և կառուցման հետ առնչվող մի շարք արդյունքներ, ինչպես նաև $\chi_{(lb)}(G)$, $\chi_{[lb]}(G)$ քրոմատիկ թվերի ընդհանուր գնահատականներ, իսկ n-չափանի խորանարդի, լրիվ գրաֆի և լրիվ երկկողմանի գրաֆների համար այդ պարամետրերի ճշգրիտ արժեքներ,

2. Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների ($k \geq 2$) գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ,
3. Զույգ, կենտ և երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության անհրաժեշտ, բավարար պայմաններ, իսկ $K_m \Box K_n$ ($m, n \geq 2$) և C_n^k գրաֆների, ինչպես նաև որոշ երկկողմանի գրաֆների դեպքում լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ,
4. Ցանցերի, գլանների և տոռերի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումերի գոյության և կառուցման հետ առնչվող որոշ արդյունքներ, մասնավորապես, ապացուցվել է, որ ցանկացած բնական $m, n \geq 3$ թվերի համար $T(m, n)$ տոռը ունի լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհում բաց շրջակայքով այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \cdot n$-ը զույգ է,
5. Գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների խնդիրների բարդության հետ կապված մի շարք արդյունքներ, մասնավորապես, ցույց է տրվել, որ լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության խնդիրը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր երկհամասեռ, զույգ և ենթախորանարդ երկկողմանի գրաֆների, ինչպես նաև կենտ ենթախորանարդ գրաֆների դասում,
6. Գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների ($k \geq 3$) խնդիրների բարդության հետ կապված մի շարք արդյունքներ, մասնավորապես, ցույց է տրվել, որ լոկալ-հավասարակշռված k-տրոհումների գոյության խնդիրը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր երկկողմանի գրաֆների դասում:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրապարակված աշխատանքների ցանկ

1. A.H. Gharibyan, P.A. Petrosyan, Locally-balanced 2-partitions of complete multipartite Graphs, 6th Polish Combinatorial Conference, Poland, Będlewo, 2016, p. 19.
2. A.H. Gharibyan, P.A. Petrosyan, On Locally-balanced 2-partitions of some graphs, Computer Science and Information Technologies, Armenia, Yerevan, 2017, pp. 196-197.
3. A.H. Gharibyan, P.A. Petrosyan, Locally-balanced 2-partitions of complete multipartite graphs, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 49, 2018, pp. 7-17.
4. A.H. Gharibyan, P.A. Petrosyan, On locally-balanced 2-partitions of grid-like graphs, International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies Dedicated to the Illustrious Scientist Valentin Belousov MITI 2018. Republic of Moldova, Balti, Alecu Russo Balti State University 2018, pp. 111-112.
5. A.H. Gharibyan, P.A. Petrosyan, On locally-balanced k-partitions of graphs, Colloquium on Combinatorics, Germany, Paderborn, Paderborn University, 2019, p. 48.
6. A.H. Gharibyan, On locally-balanced 2-partitions of some classes of graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 54: 1, 2020, pp. 9–19.
7. A.H. Gharibyan, P.A. Petrosyan, On locally-balanced 2-partitions of bipartite graphs, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences 54: 3, 2020, pp. 137-145.

8. A.H. Gharibyan, Two NP-complete problems on locally-balanced 2-partitions of graphs, Вестник Российско-Армянского университета, Физико-Математические и естественные науки 2, 2020, pp. 5-21.
9. A.H. Gharibyan, Complexity results on locally-balanced k-partitions of graphs, Вестник Российско-Армянского университета, Физико-Математические и естественные науки 1, 2021, pp. 43-54.
10. A.H. Gharibyan, P.A. Petrosyan, Locally-balanced k-partitions of graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 55: 2, 2021, 18 p.

Abstract

Graph partition problems are one of the well-known and prominent areas of research in Graph Theory. There are many different applications of graph partition problems in VLSI design, parallel computing, task scheduling, clustering and detection of communities in complex networks, etc. There are also many areas where systems equilibrium issues are studied. In particular, in order to the study of the equilibrium problems concerning a distribution of influences of two different powers in a modelling system, in 2005 S. Balikyan and R. Kamalian introduced locally-balanced 2-partitions of graphs. This dissertation is devoted to investigation of such partitions and their different generalizations.

We consider finite undirected graphs without loops and multiple edges. Let $V(G)$ and $E(G)$ denote the sets of vertices and edges, respectively. The set of neighbors of a vertex v in G is denoted by $N_G(v)$. Let $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. A graph G with maximum degree at most 3 is called *subcubic*. A bipartite graph is (a,b)*-biregular* if all vertices in one part have degree a and all vertices in the other part have degree b. A graph G is *even* (*odd*) if the degree of every vertex of G is even (odd). We use the standard notations P_n, C_n and K_n for the simple path, simple cycle and the complete graph on n vertices, respectively. A graph is a *power of cycle*, denoted C_n^k, if $V\left(C_n^k\right) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ and $E\left(C_n^k\right) = E_1 \cup \dots \cup E_k$, where $E_i = \{v_j v_{(j+i) \pmod n} : 0 \le j \le n-1\}$. Clearly, C_n^k is a $2k$-regular ($k \in \mathbb{N}$) graph.

The Cartesian product $G \Box H$ of graphs G and H is defined as follows:

$$V(G \Box H) = V(G) \times V(H)$$
$$E(G \Box H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) : (u_1 = u_2 \text{ and } v_1 v_2 \in E(H)) \text{ or } (v_1 = v_2 \text{ and } u_1 u_2 \in E(G)\}$$

For any $m, n \in \mathbb{N}$, the Cartesian products $P_m \Box P_n$, $P_m \Box C_n$ ($n \ge 3$) and $C_m \Box C_n$ ($m, n \ge 3$) are called *grids, cylinders and tori*, respectively.

Let G be a graph and $R \subseteq V(G)$. A k*-partition* of a graph G is a surjection $f : V(G) \to \{0, 1, \dots, k-1\}$. A k-partition ($k \ge 2$) f of a graph G is *locally-balanced with an open neighborhood on* R if for every $v \in R$ and any $0 \le i < j \le k-1$,

$$||\{u \in N_G(v) : f(u) = i\}| - |\{u \in N_G(v) : f(u) = j\}|| \le 1.$$

If $R = V(G)$, then f is called a *locally-balanced* k*-partition with an open neighborhood* of G. A k-partition ($k \ge 2$) f' of a graph G is *locally-balanced with a closed neighborhood on* R if for every $v \in R$ and any $0 \le i < j \le k-1$,

$$\left||\{u \in N_G[v] : f'(u) = i\}| - |\{u \in N_G[v] : f'(u) = j\}|\right| \le 1.$$

If $R = V(G)$, then f' is called a *locally-balanced* k*-partition with a closed neighborhood* of G.

The minimum number k ($k \ge 2$) for which a graph G has a locally-balanced k-partition with an open (a closed) neighborhood is called an lb*-open (*lb*-closed) chromatic number* of G and denoted by $\chi_{(lb)}(G)$ ($\chi_{[lb]}(G)$). We set that $\chi_{(lb)}(K_1) = \chi_{[lb]}(K_1) = 2$.

In the dissertation we consider the problems of the existence, construction and estimation of numerical parameters of locally-balanced k-partitions ($k \ge 2$) of graphs. In particular, we introduce and bound the lb-open and lb-closed chromatic numbers of graphs, moreover, in some cases we also determine the exact values of these chromatic numbers for various

classes of graphs. In addition, we consider complexity problems of the existence of locally-balanced k-partitions of graphs, as well as the complexity of the problem of the existence of such partitions when the locally-balanced condition holds for the subset of the vertices of the graph. In particular, the following results were obtained.

1. New results are obtained for the existence and construction of locally-balanced k-partitions ($k \geq 2$) of graphs, general bounds are derived on the lb-open and lb-closed chromatic numbers of graphs, as well as the exact values of these chromatic numbers for complete, complete bipartite graphs and n-dimensional cubes were determined.

2. Necessary and sufficient conditions are given for the existence of locally-balanced k-partitions ($k \geq 2$) of complete multipartite graphs.

3. Necessary, sufficient conditions are obtained for the existence of locally-balanced 2-partitions of even, odd and bipartite graphs. Moreover, for rook's graphs $K_m \square K_n$ ($m, n \geq 2$), powers of cycles C_n^k and some bipartite graphs necessary and sufficient conditions are given for the existence of locally-balanced 2-partitions of these graphs.

4. Some results are obtained for the existence and construction of locally-balanced 2-partitions of grids, cylinders and tori. In particular, it is proved that for any $m, n \in \mathbb{N}$, the torus $C_m \square C_n$ ($m, n \geq 3$) has a locally-balanced 2-partition with an open neighborhood if and only if $m \cdot n$ is even.

5. New complexity results are obtained for the problems of the existence of locally-balanced 2-partitions of graphs. In particular, it is shown that the problem of the existence of such partitions of biregular, even, subcubic bipartite and odd graphs is NP-complete.

6. New complexity results are obtained for the problems of the existence of locally-balanced k-partitions ($k \geq 3$) of graphs. In particular, it is shown that the the problem of the existence of such partitions of bipartite graphs is NP-complete.

Резюме

Задачи разбиения графов являются одной из наиболее известных и центральных областей исследования в теории графов. Это обусловлено множеством различных приложений задач разбиения графов, среди которых следует отметить проектирование СБИС, параллельные вычисления, планирование выполнения работ, кластеризация и обнаружение сообществ в сложных сетях и т.д. Многочисленны также области, в которых изучаются вопросы равновесия различных систем. В частности, при моделировании таких систем, в которых субъекты подвергаются двум различным противоположным влияниям, важно учитывать в целях повышения безопасности этой системы необходимость равномерного распределения этих влияний для субъектов системы. Для изучения равновесия этих систем С. Баликяном и Р. Камаляном в 2005 году было введено определение локально-сбалансированного 2-разбиения графа. Настоящая работа посвящена изучению таких разбиений и их различных обобщений.

В диссертационной работе рассматриваются конечные неориентированные графы без кратных ребер и петель. Пусть $V(G)$ — множество вершин графа G, а $E(G)$ — множество ребер графа G. Если $v \in V(G)$, то множество всех вершин графа G, смежных с вершиной v, называется *открытой окрестностью вершины* v и обозначается через $N_G(v)$. Обозначим через $N_G[v]$ *закрытую окрестность вершины* v, где $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Граф G называется *субкубическим*, если его максимальная степень не превосходит 3. Двудольный граф G называется (a,b)*-бирегулярным*, если все вершины одной доли имеют степень a, а все вершины другой доли имеют степень b. Граф G называется *чётным (нечётным)*, если все его вершины имеют чётную (нечётную) степень. Обозначим через P_n, C_n, K_n, соответственно, простой путь, простой цикл и полный граф с n вершинами. Граф называется k*-ой степенью простого цикла* и обозначается через C_n^k, если $V\left(C_n^k\right) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ и $E\left(C_n^k\right) = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, где $E_i = \{v_j v_{(j+i) \pmod{n}} : 0 \leq j \leq n-1\}$. Ясно, что C_n^k - $2k$-регулярный граф ($k \in \mathbb{N}$).

Декартовым произведением графов G и H называется граф $G \square H$, определяемый следующим образом:

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H)$$
$$E(G \square H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) : (u_1 = u_2 \text{ и } v_1 v_2 \in E(H)) \text{ или } (v_1 = v_2 \text{ и } u_1 u_2 \in E(G)\}$$

Для $m, n \in \mathbb{N}$ декартовы произведения $P_m \square P_n$, $P_m \square C_n$ ($n \geq 3$) и $C_m \square C_n$ ($m, n \geq 3$) называются, соответственно, *сетками, цилиндрами и торами*.

Пусть G — граф и $R \subseteq V(G)$. Сюръекция $f : V(G) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ называется k*-разбиением графа* G. k-разбиение ($k \geq 2$) f графа G является *локально-сбалансированным с открытой окрестностью на* R, если для любой вершины $v \in R$ и любых $0 \leq i < j \leq k-1$,

$$||\{u \in N_G(v) \colon f(u) = i\}| - |\{u \in N_G(v) \colon f(u) = j\}|| \leq 1.$$

Если $R = V(G)$, то f называется *локально-сбалансированным* k*-разбиением с открытой окрестностью* графа G. k-разбиение ($k \geq 2$) f' графа G является *локально-сбалансированным с закрытой окрестностью на* R, если для любой вершины $v \in R$ и любых $0 \leq i < j \leq k-1$,

$$\left||\{u \in N_G[v] \colon f'(u) = i\}| - |\{u \in N_G[v] \colon f'(u) = j\}|\right| \leq 1.$$

Если $R = V(G)$, то f' называется *локально-сбалансированным k-разбиением с закрытой окрестностью* графа G.

Минимальное число k ($k \geq 2$), для которого граф G имеет локально-сбалансированное k-разбиение с открытой (закрытой) окрестностью, называется *lb-открытым (lb-закрытым)* хроматическим числом G и обозначается через $\chi_{(lb)}(G)$ ($\chi_{[lb]}(G)$). Положим $\chi_{(lb)}(K_1) = \chi_{[lb]}(K_1) = 2$.

В настоящей работе исследованы задачи существования, построения и оценки числовых параметров локально-сбалансированных k-разбиенией ($k \geq 2$) графов. В частности, в работе введены lb-открытые и lb-закрытые хроматические числа и даны оценки этих чисел, а также определены точные значения этих хроматических чисел для некоторых классов графов. Кроме того, особое внимание в работе уделено сложности задач существования локально-сбалансированных k-разбиенией ($k \geq 2$) графов, а также рассмотрена сложность задачи существования таких разбиений, при выполнении условия локальной сбалансированности для подмножества вершин графа. В частности, получены следующие основные результаты:

1. ряд результатов, касающихся задач существования и построения локально-сбалансированных k-разбиенией ($k \geq 2$) графов, общие оценки lb-открытых и lb-закрытых хроматических чисел, а также определены точные значения этих хроматических чисел для полных, полных двудольных графов и n-мерных кубов;

2. необходимые и достаточные условия существования локально-сбалансированных k-разбиенией ($k \geq 2$) полных многодольных графов;

3. необходимые, достаточные условия существования локально-сбалансированных 2-разбиенией чётных, нечётных и двудольных графов, а также необходимые и достаточные условия существования таких разбиений в случае ладейных графов $K_m \square K_n$ ($m, n \geq 2$), степеней простого цикла C_n^k и некоторых двудольных графов;

4. некоторые результаты, касающиеся задач существования и построения локально-сбалансированных 2-разбиенией сеток, цилиндров и торов, в частности, показано, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ тор $C_m \square C_n$ ($m, n \geq 3$) имеет локально-сбалансированное 2-разбиение с открытой окрестностью тогда и только тогда, когда $m \cdot n$ - чётное число;

5. новые результаты, касающиеся сложности задач существования локально-сбалансированных 2-разбиенией графов, в частности, показано, что задача существования локально-сбалансированного 2-разбиения графа является NP-полной в классе бирегулярных, чётных, субкубических двудольных графов, а также нечётных графов;

6. новые результаты, касающиеся сложности задач существования локально-сбалансированных k-разбиенией ($k \geq 3$) графов, в частности, показано, что задача существования локально-сбалансированного k-разбиения графа является NP-полной в классе двудольных графов.