ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վազգեն Գագիկի Միքայելյան

Զուգամիտության հարցեր Ֆրանկլինի համակարգով և նրա ընդհանրացումներով շարքերի համար

Ա.01.01 – «Մաթեմատիկական անալիզ» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2021

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Вазген Гагикович Микаелян

Вопросы сходимости рядов по системе Франклина и её обобщениями

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специалностьи
А.01.01-"Матемтический анализ"

ЕРЕВАН- 2021

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի Պետական Համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Գ. Գ. Գևորգյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ու. Գոգինավա, ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Մ. Գ. Գրիգորյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կկայանա 2021թ. հուլիսի 14-ին ժ. 15:00-ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2021թ. մայիսի 25-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	академик НАН Армении, доктор физ.-мат. наук Г. Г. Геворкян
Официальные опоненты:	доктор физ.-мат. наук У. Гогинава, доктор физ.-мат. наук М. Г. Григорян

Ведущая организация: институт математики национальной академии наук Армении.

Защита состаится 14 июля 2020 г. в 15:00 на заседании специализированного совета 050 ВАК, действующий в Ереванском государственном университете по адресу 0025, Ереван, Алек Манукян 1.

Автореферат разослан 27 мая, 2021 г..

Ученый секретарь специализированного совета
Доктор физ.-мат. наук Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуалность темы. В диссертации исследуются различные вопросы сходимости рядов по системе Франклина и ее обобщений. Система Франклина первый пример ортонормированного базиса в пространстве $C[0,1]$, которая была построена Франклином в 1928 г. (см. [4]). Это полная ортонормированная система непрерывных и кусочно-линейных функций (с двоичными узлами).

Систематическое исследование системы Франклина начал З. Чисельский в [5] и [6]. В этих работах он выявил основные свойства этой системы. Эти свойства дали толчок для получения дальнейших результатов. Известно, что система Франклина является базисом в $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$ при $1 \leq p < \infty$. Безусловная базисность этой системы в $L^p[0,1]$ при $1 < p < \infty$ было доказано С. Бочкаревом в [7]. Кроме этого система Франклина является безусловном базисом во всех рефлексивных пространствах Орлича [8]. Далее П. Войташек в [9] получил характеризацию пространств BMO в терминах коэффициентов функций системы Франклина и доказал, что эта система является безусловным базисом в действительном пространстве Харди H^1. Безусловная базисность системы Франклина в действительных пространствах Харди H^p, $\frac{1}{2} < p \leq 1$, были получены П. Шелином и Дж. Стромбергом ([10]). З. Чиселский и А. Чанг доказали, что $f \in H^1$, если ее ряд Фурье-Франклина безусловно сходится в L^1 ([11]).

Базисы в пространствах $C^1(I^2)$ (см. [12], [13]) и $A(D)$ (см. [8]) также построены с применением системы Франклина. Здесь $C^1(I^2)$ - пространство всех непрерывно дифференцируемых функций $f(x,y)$ на квадрате $I^2 = [0,1]$ с нормой

$$\|f\| = \max|f(x,y)| + \max\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|,$$

а $A(D)$ пространство аналитических функций на открытом диске $D = \{z : |z| < 1\}$ и непрерывных в замкнутом диске. Вопросы существования базисов в $C^1(I^2)$ и $A(D)$ были поставлены С. Банахом [14].

Дальнейшие исследования показали, что системы Хаара и Франклина имеют много общих свойств. Тем не менее доказательства свойств системы Франклина существенно трудныее чем доказательства свойств системы Хаара. В частности, совсем недавно была получена теорема единственности типа Кантора для рядов Франклина ([15]). Отметим также, что многие задачи, решенные для системы Хаара, остаются открытыми для системы Франклина. Например, неизвестно, как можно восстановить коэффициенты всюду сходящегося ряда Франклина. На аналогичный вопрос для системы Хаара еще в 1960-х годах ответил В. Скворцов [16].

В работе [17] З. Чисельский и А. Камонт определили общую систему Франклина. Из оценок L^∞-норм ортогональных проекций на пространство кусочно-линейных функций (см. [5]) следует, что для каждой последовательности узлов $\mathcal{T}$, соответствующая система Франклина является базисом в $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ и если все узлы из $\mathcal{T}$ простые, то соответствующая общая система Франклина является базисом в $C[0,1]$. Отметим также, что каждая непрерывная на $[0,1]$ функция является пределом частичных сумм ряда по общей системе Франклина, в равномерной норме. В [18] Г. Геворкян и А. Камонт доказали, что общая система Франклина является безусловным базисом в пространствах $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$.

Стромберг [19] поставил перед собой задачу построить базис в пространстве $H^p(\mathbb{R})$. Модифицируя систему Франклина, он получил систему $\{f_{i,j}(x)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$, которая является безусловным базисом в $H^p(\mathbb{R})$ при $p > \dfrac{1}{2}$.

В 1915 году Н. Лузином [20] была поставлена задача о том, может ли тригонометрический ряд сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры. Ю. Гермейер [21] доказал, что тригонометрический ряд не может суммириватся методом Римана к $+\infty$ на множестве положительной меры. Н. Лузин и И. Привалов [22] построили пример тригонометрического ряда, почти всюду суммируемого к $+\infty$ методом Абеля. Д. Меньшов [23] доказал, что для любой функции, не объязательно конечной почти всюду, существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней по мере. В частности, существует тригонометрический ряд, который по мере сходится к $+\infty$ на $[-\pi, \pi]$. А. Талалян [24] установил, что для любой измеримой на $[-\pi, \pi]$ функции f существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней по мере и почти всюду на множестве, где f конечна. Наконец, в 1988 году С. Конягин [25] решил проблему Лузина.

Многие математики исследовали вопрос сходимости или суммируемости к $+\infty$ ортогональных рядов на множестве положительной меры (см. [26]-[31]), в частности для системы Франклина это свойство исследовано Г. Геворкяном в [31]. Г. Геворкян [32] доказал признак сходимости ряда по классической системы Франклина.

В 1898, 1899 годах американский физик Дж. У. Гиббс опубликовал две заметки ([34], [35]), в которых показал, что ряд Фурье не всегда представляет разлагаемую функцию с должной точностью. Гиббс не знал, что этот результат уже был опубликован английским ученом Г. Уилбрагамом в 1848 году (см. [36]), который доказал, что ряд Фурье разрывной функции не сходится к разлагаемой функции в окрестности разрыва. В последствие за этим явлением установилось название "Явление Гиббса".

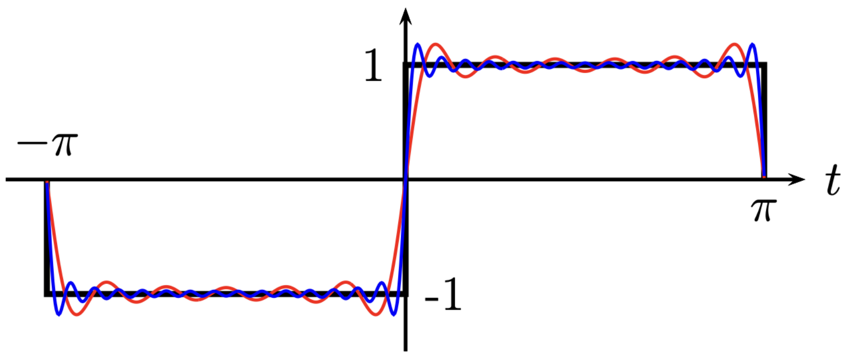
Демонстрируем явление Гиббса на частном примере функции

$$f(t) = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1, \text{ при } -\pi < t < 0 \\ 0, \text{ при } t = 0 \\ 1, \text{ при } 0 < t < \pi, \end{cases}$$

продолженной с периодом 2π на всю ось. Для этой функций сумма первых n ненулевых членов ряда Фурье имеет вид

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}.$$

Характер приближения функции $f(t)$ частичными суммами S_n ее ряда Фурье изображен на рисунке:



Как видно частичные суммы S_n осцилируют вблизи значений ± 1 функции $f(t)$. Известно, что справедлива формула

$$\max\left(\lim_{n\to\infty} S_n(t)\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.179.$$

Таким образом сумма ряда Фурье функции $f(t)$ делает скачки примерно на 17.9% больше, чем скачки функции $f(t)$. Результат выше справедлив и при разложении в ряд Фурье функций общего типа имеющий разрыв первого рода (см. [37]).

Далее многие авторы исследовали явление Гиббса для разных ортогональных систем (см. [2] стр. 123-126, [38]-[42]).

Цель и задачи диссертации. Основная цель данной диссертации исследовать вопросы сходимости рядов по системе Франклина и ее обобщений. Получены следующие результаты.

1. Если $\{n_k\}$ любая возрастающая последовательность натуральных чисел и отношение n_{k+1} на n_k ограничено, то n_k-я частичная сумма ряда по системе Франклина не может стремиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Доказано также, что если это отношение не ограничено, то существует ряд по системе Франклина, n_k-я частичная сумма которого стремиться к $+\infty$ почти всюду в $[0,1]$.
2. Доказан признак сходимости ряда по общей системе Франклина соответствующая квазидвоичному и сильно регулярному разбиению.
3. Решена задача поставленная Голубом в (см. [33]) о монотонно ограниченно полной базисности системы Франклина в пространствах $C[0,1]$ и $L^1[0,1]$.
4. Изучено явление Гиббса для общей системы Франклина и систем Стромберга.

Методы исследования. В работе использованы методы исследования ортогональных рядов, анализа Фурье и метрический теорий функций.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, обоснованы строгими математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты расширяют знания в области гармонического анализа и могут быть применены в дальнейших исследованиях вопросов сходимости ортогональных рядов и базисности разных систем в банаховых пространствах.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях [8*]-[15*].

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 научных статьях. Список статей приводится в конце автореферата ([1*]-[7*]).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка цитируемой литературы, включающего в себе 69 наименонаваний. Общий объем диссертации составляет 98 страниц.

Основное содержание диссертации

Во введении мы напоминаем несколько классических результатов о системе Франклина, полученных разными авторами. Мы также формулируем два важных приложения системы Франклина для построения базисов в пространстве всех непрерывно дифференцируемых функций на единичном квадрате и в пространстве аналитических функций на открытом единичном круге, которые непрерывно продолжаются до границы. Вопросы существования базисов в этих пространствах были поставлены С. Банахом. Далее мы даем определение системы Франклина и приведем два обобщения классической системы Франклина. В конце введения описывается феномен Гиббса.

В первой главе мы исследуем вопросы сходимости общих рядов по системе Франклина и по общей системе Франклина.

Выше приведены важные результаты разных авторов связанные со сходимостью к бесконечности тригонометрических рядов. Для рядов по системам Хаара и Уолша имеется следующая картина. А. Талалян и Ф. Арутюнян [26] доказали, что ряды по системам Хаара и

Уолша не могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры. В работах [27], [28] даны более простые доказательства этой теоремы. Однако (см. [29]), существуют равномерно ограниченные ортонормированные системы функций, ряды по которым могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры при любой перестановке членов ряда. Н. Погосян [30] установил, что для каждой полной ортонормированной системы существует ряд, который после подходящей перестановки сходится почти всюду к $+\infty$. В работе [31] Г. Геворкян доказал, что ряд по системе Франклина не может сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры. Это следует из следующей теоремы [31].

Теорема 1.1.1 *Пусть $S_n(x)$ частичная сумма некоторого ряда по системе Франклина. Тогда*

$$\mu\left(\left\{x \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} S_{2^k}(x) = +\infty\right\}\right) = 0.$$

В разделе 1.2 изучается возможность стремления к $+\infty$ частичных сумм $S_{n_k}(x)$ ряда по системе Франклина на множестве положительной меры.

Пусть $\{n_k\}$ любая возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $\sigma_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, суммы первых $n_k + 1$ членов ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x). \tag{1}$$

т. е.

$$\sigma_k(x) = \sum_{n=0}^{n_k} a_n f_n(x).$$

в диссертации доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1.2 *Если* $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} < +\infty$*, то*

$$\mu\left(\left\{x \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} \sigma_k(x) = +\infty\right\}\right) = 0.$$

Теорема 1.1.3 *Если* $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} = +\infty$*, то существует ряд по системе Франклина такой, что* $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k(x) = +\infty$ *почти всюду в* $[0,1]$.

Теорема 1.1.4 *Для возрастающей последовательности* $\{n_k\}$ *условие*

$$\mu\left(\left\{x \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} \sigma_k(x) = +\infty\right\}\right) = 0$$

выполняется для всех рядов вида (1) *тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} < +\infty$.

Теорема 1.1.4 следует из теорем 1.1.2 и 1.1.3.

При доказательстве теоремы 1.1.1 важную роль играет понятие скалярного произведения ряда (1) на функции пространства S_n, определенное в работе [43] и успешно примененное в вопросах единственности рядов по системе Франклина (см. также [44], [45] и [31]).

Через S формально обозначим ряд (1). Из определения системы Франклина следует, что если $g \in S_m$ и $n > m$, то

$$\int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = 0.$$

Поэтому можно определить скалярное произведение ряда S и функции $g \in S_m$ по формуле

$$(S, g) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = \sum_{n=0}^{m} a_n \int\limits_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx.$$

Очевидно, что если $g_1 \in S_{m_1}$ и $g_2 \in S_{m_2}$, то для любых α, β имеем

$$(S, \alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha (S, g_1) + \beta (S, g_2).$$

Пусть δ_{ij}-символ Кронекера, т. е. $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Для $n \geq 2$ определим функции $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^{n}$ (B-сплайны) следующим образом:

$$N_{n,i}(s_{n,j}) = \delta_{ij}, j = 0, \ldots, n \text{ и } N_{n,i}(t) \text{ линейна на } [s_{n,j-1}, s_{n,j}], j = 1, 2, \ldots, n.$$

Функции $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^{n}$ нормированы в пространстве $C[0,1]$ и из $N_{n,i}(s_{n,j}) = \delta_{ij}$ следует, что система $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^{n}$ образует базис в S_n. Обозначив

$$M_{n,i}(t) := \frac{2}{s_{n,i+1} - s_{n,i-1}} N_{n,i}(t),$$

получим другой базис в S_n, который нормирован в $L^1[0,1]$.

Так как в дальнейшем изложении мы будем иметь дело только с функциями $M_{n,i}$, когда $n = n_k$, то с целью уменьшения количества индексов, вместо $M_{n_k,i}$ будем писать M_i^k.

Введем также обозначение $\tau_i^k := s_{n_k,i}$, $\Delta_i^k := \mathrm{supp} M_i^k = \left[\tau_{i-1}^k, \tau_{i+1}^k\right]$.

В разделе 1.3 доказан аналог теоремы Конягина для общей системы Франклина соответствующая квазидвоичному и сильно регулярному разбиению. Для классической системы Франклина эта теорема доказана Г. Геворкяном в [32].

Обозначим $\sigma_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f_k(x)$, $x \in [0,1]$, где $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ система Франклина соответствующая некоторому квазидвоичному и сильно регулярному разбиению отрезка $[0,1]$. Сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 1.1.5 *Если* $\inf\limits_n \sigma_n(x) > -\infty$, $x \in E$ *то* $\sup\limits_n \sigma_n(x) < +\infty$ *почти всюду на* E.

Теорему 1.1.5 можно сформулировать в следующей равносильной форме:

Теорема 1.1.6 *Справедливо равенство*

$$\mu\left(\left\{x \in [0,1] : -\infty < \liminf_n \sigma_n(x) \leq \limsup_n \sigma_n(x) = +\infty\right\}\right) = 0.$$

В работе [46] доказана следующая теорема:

Теорема 1.1.7 *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) < +\infty$, *почти всюду на* E.

2. $\sup |\sigma_n(x)| < +\infty$, *почти всюду на* E.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$, *сходится почти всюду на* E.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$, *сходится по мере безусловно на* E.

Отметим, что подобная теорема доказана Ф. Арутюняном [47] для рядов Хаара, а для мартингалов Р. Ганди [27]. Последовательность частичных сумм ряда Хаара является регулярным мартингалом. В то же время последовательность частичных сумм ряда по общей системе Франклина не является мартингалом. Но как показывает теорема 1.1.7 ряды по общей системе Франклина имеют свойства похожие свойствам мартингалов.

Из теорем 1.1.5 и 1.1.7 вытекают следующие теоремы.

Теорема 1.1.8 *Если* $\inf\limits_n \sigma_n(x) > -\infty$, $x \in E$ *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ *сходится почти всюду на* E.

Теорема 1.1.9 *Если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) = +\infty$ *на* E, *то* $\liminf\limits_n \sigma_n(x) = -\infty$ *и* $\limsup\limits_n \sigma_n(x) = +\infty$ *почти всюду на* E.

Подобные теоремы доказаны Ф. Арутюняном [47] для рядов Хаара и Чоу для мартингалов [48].

При доказательстве теоремы 1.1.5 важную роль играют функции $N_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ определенные выше и понятие скалярного произведения рядов по общей системе Франклина и функции $\varphi \in \mathcal{S}_n$, которые определяется так же как в случае классической системы Франклина.

Обозначим $M_{n,i}(t) := \dfrac{2}{\tau_{n,i+1} - \tau_{n,i-1}} N_{n,i}(t)$ и $\Delta_{n,i} := [\tau_{n,i-1}, \tau_{n,i+1}]$.

Для обзора результатов раздела 1.4 приведем следующие определения.

Определение 1.1.1 *Базис* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *в банаховом пространстве* X *называется ограниченно полным, если для любой последовательности чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяющей условию*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k e_k \right\| < +\infty, \tag{2}$$

ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ *сходится.*

Если пространство содержит ограниченно полный базис, то пространство изоморфно сопряженному пространству (см. [49], стр. 70). В частности пространства $C[0,1]$ и $L^1[0,1]$ не имеют ограниченно полные базисы. Дж. Голуб в [33] ввел понятие монотонно ограниченного базиса, которое слабее понятия ограниченного базиса. Напомним, что базис $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ в банаховом пространстве X называется полунормированным, если существует постоянная $C > 0$, такая что $C^{-1} \le \|e_n\| \le C$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1.2 *Полунормированный базис* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *в банаховом пространстве* X *называется монотонно ограниченно полным, если для любой монотонной и сходящейся к нулю последовательности чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющей условию* (2) *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ *сходится.*

Голуб [33] доказал, что базис Фабер-Шаудера в $C[0,1]$ монотонно ограниченно полна. Он поставил следующий вопрос: будут ли системы Хаара и Франклина монотонно ограниченно полными базисами в $L^1[0,1]$. В работе [50] В. Кадец доказал, что система Хаара является монотонно ограниченно полным базисом в $L^1[0,1]$. В разделе 1.4 доказана, что система Франклина монотонно ограниченно полная в $L^1[0,1]$ и $C[0,1]$, причем в случае $L^1[0,1]$ нами доказано более сильное свойство чем монотонно ограниченная полнота системы Франклина.

При исследовании свойств системы Франклина важную роль сыграли экспоненциальные оценки З. Чисельского (см. [6]):

Вопрос 1.1.1 *Пусть* $n = 2^\mu + i$, $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^\mu$, *тогда существует такой* $q \in (0,1)$, *что для всех* $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$C_1 2^{\frac{\mu}{2}} q^{|k-(2i-1)|} \le (-1)^{k+1} f_n(s_{n,k}) \le C_2 2^{\frac{\mu}{2}} q^{|k-(2i-1)|}.$$

Следствие 1.1.1 *Для всех* $n \ge 1$ *справедливы оценки* $\dfrac{C_3}{\sqrt{n}} \le \|f_n\|_1 \le \dfrac{C_4}{\sqrt{n}}$.

Нами доказаны следующие теоремы:

Теорема 1.1.10 *Пусть* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *последовательность действительных чисел, такая, что*

$$\frac{|a_n|}{n^\alpha} \le C_5 \frac{|a_k|}{k^\alpha},\ n \ge k$$

при некотором $\alpha \ge 0$. *Если* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f_k \right\|_1 < +\infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ *сходится в* $L^p[0,1]$, *для всех* $1 \le p < \infty$.

Теорема 1.1.11 *Система Франклина нормированная в* $L^1[0,1]$ *является монотонно ограниченно полным базисом в этом пространстве.*

Теорема 1.1.12 *Система Франклина нормированная в* $C[0,1]$ *является монотонно ограниченно полным базисом в этом пространстве.*

Во второй главе мы исследуем явление Гиббса для общей системы Франклина и систем Стромберга. Приведем формальное определение феномена Гиббса

Определение 2.1.1 *Пусть* t_0 *точка разрыва первого рода функции* $q \in L^1[0,1]$, *причем* $|q(t_0+) - q(t_0-)| = 2d > 0$, *и пусть последовательность функций* $\{q_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ *сходится к* $q(t)$ *в каждой точке некоторой окресности точки* t_0. *Функцию*

$$G(t_0, q, \{q_n\}_{n=1}^{\infty}) = G(t_0) = \varlimsup_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} \frac{1}{d}\left| q_n(t) - \frac{q(t_0+) + q(t_0-)}{2} \right|$$

назовем функцией Гиббса для последовательности $\{q_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. *Если* $G(t_0) > 1$, *то скажем, что для последовательности* $\{q_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *в точке* t_0 *имеет место явление Гиббса.*

Хорошо известно (см. [2], стр. 123-126), что для частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе имеет место явление Гиббса: функция $G(t_0)$ не зависит от t_0 и равна постоянной Гиббса

$$G(t_0) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.17.$$

Явление Гиббса для рядов Фурье по системе Уолша исследовано в работах [38] и [39]. Существование явления Гиббса для рядов Фурье по системе Уолша доказано А. Зубакином в [38]. В [39] доказано, что значение постоянной Гиббса для частичных сумм рядов Фурье-Уолша зависит от распределения точек разрыва функции, и для двоично-иррациональных точек находиться между числами $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{2}$. Значение $\frac{3}{2}$ достигается почти всюду, а значение $\frac{4}{3}$ в определенных точках. Подобные вопросы исследованы также в работах [40], [41].

Явление Гиббса для рядов Фурье по классической системе Франклина исследовано О. Саргсяном в [42], где доказана следующая теорема:

Теорема 2.1.1 *Пусть t_0 является точкой разрыва первого рода функции $f \in L^1[0,1]$. Обозначим через $S_n(f,t)$ частичную сумму ряда Фурье-Франклина функции f. Тогда в каждой точке $t_0 \in (0,1)$*

$$1+\frac{\sqrt{3}-1}{3} \leq G\left(t_0, f, \{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq 1+\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3},$$

причем почти всюду

$$G\left(t_0, f, \{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1+\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}.$$

Сформулируем основные результаты второй главы.

Теорема 2.1.2 *Пусть t_0 является точкой разрыва первого рода функции $f \in L^1[0,1]$. Обозначим через $S_n(f,t)$ частичную сумму ряда Фурье по общей системе Франклина функции f. Тогда*

a) $G\left(t_0, f, \{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq 2$ для любого $t_0 \in (0,1)$,

b) $G\left(t_0, f, \{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}\right) \geq \frac{5}{4}$ для почти всех $t_0 \in [0,1]$.

Замечание 2.1.1 *Заметим, что нижняя грань в данном результате больше чем нижняя грань в теореме 2.1.1.*

Следствие 2.1.1 *Явление Гиббса для рядов Фурье по общей системе Франклина имеет место почти во всех точках $[0,1]$.*

Для системы Стромберга мы исследуем следующую частичную сумму ряда Фурье-Стромберга:

$$S_{i_0,j_0}^{(m)}(f,x) = \sum_{i=-\infty}^{i_0-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{i,j} f_{i,j}^{(m)}(x) + \sum_{j=-\infty}^{j_0} a_{i_0,j} f_{i_0,j}^{(m)}(x), i_0, j_0 \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 2.1.3 *Пусть t_0 неустраняемая точка разрыва первого рода функции $f \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда*

$$1+\frac{48-28\sqrt{3}+8\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{27} \leq G\left(t_0, f, \left\{S_{i_0,j_0}^{(0)}(f,\cdot)\right\}_{i_0,j_0=-\infty}^{+\infty}\right) \leq \frac{1+2\sqrt{3}}{3},$$

причем $G\left(t_0, f, \left\{S_{i_0,j_0}^{(0)}(f,\cdot)\right\}_{i_0,j_0=-\infty}^{+\infty}\right) = \frac{1+2\sqrt{3}}{3}$, для почти всех $t_0 \in \mathbb{R}$.

Следствие 2.1.2 *Для частичных сумм ряда Фурье-Стромберга в случае $m = 0$, явление Гиббса имеет место везде и функция Гиббса постоянна почти всюду.*

Теорема 2.1.4 *Для частичных сумм ряда Фурье-Стромберга (при любом m) явление Гиббса имеет место почти всюду.*

В статье [52] для общей системы Франклина $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ доказано, что для почти всех $x \in [0,1]$, если функция $f \in L^1[0,1]$ в точке x имеет разрыв первого рода, то ряд Фурье-Франклина расходится в этой точке. До этого в [51] было доказано, что для классической системы Франклина последное свойство справедливо для всех $x \in [0,1]$. В связи с этим и с теоремой 2.1.2 возникают следующие два вопроса:

Вопрос 2.1.1 *Справедливо ли утверждение, что для рядов Фурье по произвольной общей системе Франклина явление Гиббса имеет место для всех точек интервала $(0,1)$?*

Вопрос 2.1.2 *Справедливо ли утверждение для произвольной общей системы Франклина, что если в точке $x \in [0,1]$ функция $f \in L^1[0,1]$ имеет разрыв первого рода, то ряд Фурье-Франклина расходится в этой точке?*

Список литературы

[1] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris: Firmin Didot Père et Fils, 1822.

[2] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, Москва, 1961.

[3] A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann. , **69** (1910), 331-371.

[4] Ph. Franklin, *A set of continuous orthogonal functions*, Math. Ann., **100** (1928), 522-528.

[5] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system*, Studia Math. **23** (1963), 141-157.

[6] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system, II.* Studia Math. **27** (1966), no. 3, 289-323.

[7] S. V. Bochkarev, *Some inequalities for the Franklin series.* Anal. Math. **1** (1975), 249-257.

[8] С. В. Бочкарев, *Существование базиса в пространстве функций, аналитических в круге, и некоторые свойства системы Франклина*, Матем. сб., **95** (1974), н. 1, 3-18.

[9] P. Wojtaszczyk, *The Franklin system is an unconditional basis in H_1,* Arkiv fur Matematik, **20** (1982), no. 1, 293-300.

[10] P. Sjölin, *Convergence almost everywhere of spline expansions in Hardy spaces,* Topics in modern harmonic analysis, (Turin/Milan, 1982) Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Rome, (1983), 645- 651.

[11] S.-Y. A. Chang and Z. Ciesielski, *Spline characterizations of H^1.* Studia Math., **75** (1983), 183-192.

[12] Z. Ciesielski, *A construction of a basis in $C^1(I^2)$,* Studia Math. , **33** (1969), no. 2, 243-247.

[13] S. Schonefeld, *Schauder bases in spaces of differentiable functions,* Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 586-590.

[14] S. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Chelsea, reprint 1955.

[15] G. G. Gevorkyan, *On the uniqueness of series in the Franklin system*, Sbornik: Mathematics **207** (2016), no. 12, 1650-1673.

[16] V. A. Skvorcov, *Calculation of the coefficients of an everywhere convergent Haar series*, Mathematics of the USSR-Sbornik **4** (1968), no. 3, 317-327.

[17] Z. Ciesielski and A. Kamont, *Projections onto piecewise linear functions*, Funct. Approx. Comment. Math., **25** (1997), 129-143. Dedicated to Roman Taberski on the occasion of his 70th birthday.

[18] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, *Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$,* $1 < p < \infty$, Studia Math., **164** (2004), 161-204.

[19] J. O. Stromberg, *A modified Franklin system and higher-order Spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces*, Conf. on Harmonic Analyses in honor of A. Zygmund, **2** (1983), 475-494.

[20] Н. Н. Лузин, *Интеграл и тригонометрический ряд*, ГИТТЛ, М.-Л., 1951.

[21] Ю. Б. Гермейер, *Производные Римана и Валле-Пуссена и их применение к некоторым вопросам из теории тригонометрических рядов*, Дис. канд. физ.-мат. наук, М., 1946.

[22] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М., 1950.

[23] Д. Е. Меньшов, *О сходимости по мере тригонометрических рядов*, Труды МИАН СССР, **32** (1950), 3-98.

[24] А. А. Талалян, *Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов*, Изв. АН СССР, сер. матем., **27** (1963), н. 3, 621-660.

[25] С. В. Конягин, *О пределах неопределенности тригонометрических рядов*, Матем. заметки, **44** (1988), н. 6, 770-784.

[26] А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, *О сходимости рядов по системе Хаара к* $+\infty$, Мат. сб., **66** (1965), н. 2, 240-247.

[27] R. F. Gundy, *Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series*, Trans. Amer. Math. Soc., **124** (1966), no. 2, 228-248.

[28] В. А. Скворцов, *Дифференцирование относительно сетей и ряды Хаара*, Мат. заметки, **4** (1968), н. 1, 33-40.

[29] Р. И. Овсепян, А. А. Талалян, *О сходимости ортогональных рядов к* $+\infty$, Мат. заметки, **8** (1970), no. 2, 129-135.

[30] Н. Б. Погосян, *Представление измеримых функций базисами* $L_p[0,1], p>2$, ДАН Арм. ССР, **63** (1976), н. 4, 205-209.

[31] Г. Г. Геворкян, *О сходимости рядов Франклина к* $+\infty$, Мат. заметки, **106** (2019), н. 3, 341-349.

[32] G. G. Gevorkyan, *On a "Martingale Property" of Franklin Series*, Analysis math., **45** (2019), no. 4, 803-815.

[33] J. R. Holub, *Bounded completeness and Schauder's basis for* $C\,[0,1]$, Glasgow Math. J., **28** (1986), no. 1, 15-19.

[34] J. W. Gibbs, *Fourier's Series*, Nature, **59** (1898), no. 1522, 200.

[35] J. W. Gibbs, *Fourier's Series*, Nature, **59** (1898), no. 1539, 606.

[36] H. Wilbraham, *Fourier's Series*, Cambrige and Dublin Math. Journ., **3** (1848), 198-201.

[37] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления т. III*, М. Наука, 1966.

[38] А. М. Зубакин, *Явление Гиббса для мультипликативных систем типа Уолша и типа Виленкина-Джафарли*, Сиб. мат. журн., **12** 1971, н. 1, 147-157.

[39] Л. А. Балашов, В.А. Скворцов, *Константы Гиббса для частичных сумм рядов Фурье-Уолша и их* $(C,1)$*-средних*, Тр. МИАН СССР, **164** (1983), 37-48.

[40] C. Karanikas, *Gibbs phenomenon in wavelet analysis*, Results. Math., **34** (1998), 330-341.

[41] S. E. Kelly, *Gibbs Phenomenon for Wavelets*, Appl. Comput. Harmonic Anal., **3** (1996), 72-81.

[42] О. Г. Саргсян, *О сходимости и явлении Гиббса рядов Франклина*, Изв., НАН Армении, математика, **31** (1996), н. 1, 61-84.

[43] Г. Г. Геворкян, *Теоремы единственности для рядов по системе Франклина*, Матем. заметки, **98** (2015), н. 5, 786-789.

[44] Г. Г. Геворкян, *О единственности рядов по системе Франклина*, Матем. сб., **207** (2016), н. 12, 30-53.

[45] Г. Г. Геворкян, *О единственности рядов Франклина, сходящихся к интегрируемым функциям*, Матем. сб., **209** (2018), н. 6, 25-46.

[46] М. П. Погосян, *Сходимость почти всюду рядов по общей системе Франклина*, Изв. НАН Армении, математика, **35** (1996), 87-114.

[47] Ф. Г. Арутюнян, *О рядах по системе Хаара*, Доклады академии наук Арм. ССР, **42** (1966), н. 3, 134-140.

[48] Y. S. Chow, *Convergence theorems of martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **1** (1963), 340–346

[49] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Springer-Verlag, 1962.

[50] V. Kadets, *The Haar system in L^1 is monotonically boundedly complete*, Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya, **12** (2005), no. 1, 103-106.

[51] Г. Г. Геворкян, *О рядов по системе Франклина*, Analysis Math., **16** (1990), 87-114.

[52] Г. Г. Геворкян, *Об абсолютной сходимости рядов по общей системе Франклина*, Изв. НАН Армении, математика, **49** (2014), н. 2, 3-22.

Список публикаций автора

[1*] В. Г. Микаелян, *Явление Гиббса для общей системы Франклина*, Изв., НАН Армении, математика, **52** (2017), н. 4, 51-71.

[2*] В. Г. Микаелян, *Явление Гиббса для систем Стромберга*, Доклады академии наук Арм., **117** (2017), н. 3, 187-191.

[3*] В. Г. Микаелян, *Явление Гиббса для кусочно-линейного вейвлета Стромберга*, Изв., НАН Армении, математика, **54** (2019), н. 2, 65-81.

[4*] К. А. Навасардян, В. Г. Микаелян, *О сходимости частичных сумм рядов Франклина к* $+\infty$, Изв., НАН Армении, математика, **54** (2019), н. 6, 54-65.

[5*] V. G. Mikayelyan, *The Gibbs phenomenon for Stromberg wavelets*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **96** (2020), no. 3, 23-27.

[6*] В. Г. Микаелян, *Об одном свойстве системы Франклина в* $C\left[0,1\right]$ *и* $L^1\left[0,1\right]$, Матем. заметки, **107** (2020), н. 2, 241-245.

[7*] В. Г. Микаелян, *Об одном "мартингальном свойстве" ряда по общей системе Франклина*, Доклады академии наук Арм., **120** (2020), н. 2, 110-114.

Тезисы конференций

[8*] V. G. Mikayelyan, *The Gibbs phenomenon for Stromberg systems,* YSU SSS 5th international conference, April, 2018, Yerevan, Armenia.

[9*] V. G. Mikayelyan, *The Gibbs phenomenon for Stromberg systems,* Emil Artin international conference, June 2018, Yerevan, Armenia.

[10*] V. G. Mikayelyan, *The Gibbs phenomenon for Stromberg picewise linear wavelet,* Actual problems of mathematical modeling and information technology, June, 2018, Sochi, Russia

[11*] V. G. Mikayelyan, *Monotonically boundedly completeness of the Franklin system in* $C\left[0,1\right]$ *and* $L^1\left[0,1\right]$*,* Summer symposium in real analysis XLII, June, 2018, Saint-Petersburg, Russia.

[12*] V. G. Mikayelyan, *The Gibbs Phenomenon for Some Orthonormal Systems,* IX International Conference of the Georgian Mathematical Union, September, 2018, Batumi-Tbilisi, Georgia.

[13*] V. G. Mikayelyan, *The Gibbs phenomenon for general Franklin systems,* International conference in Harmonic Analysis and Approximations, September, 2018, Tsaghkadzor, Armenia.

[14*] V. G. Mikayelyan, *On one property of the Franklin system in* $C\left[0,1\right]$ *and* $L^1\left[0,1\right]$*,* Conference Dedicated to the Memory of Academician Mkhitar Djrbashyan, October, 2018, Yerevan, Armenia.

[15*] V. G. Mikayelyan, *On a "martingale property"of series by general Franklin systems,* First Analysis Mathematica International Conference, Semptember, 2019, Budapest, Hungary.

Ամփոփում

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

1. Ապացուցված է, որ եթե $\{n_k\}$-ն այնպիսի աճող բնական թվերի հաջորդականություն է, որ $\frac{n_{k+1}}{n_k}$-ն սահմանափակ հաջորդականություն է, ապա Ֆրանկլինի համակարգով շարքի n_k-րդ մասնակի գումարը չի կարող ձգտել $+\infty$-ի դրական չափի բազմության վրա: Ապացուցված է նաև, որ եթե $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, ապա գոյություն ունի շարք Ֆրանկլինի համակարգով, որի n_k-րդ մասնակի գումարը ձգտում է $+\infty$-ի համարյա ամենուրեք $[0,1]$-ում:

2. Ապացուցված է զուգամիտության հայտանիշ Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգով շարքերի համար:

3. Լուծված է Ջ. Հոլուբի կողմից դրված խնդիրը: Մասնավորապես ապացուցված է, որ եթե $\left\{\tilde{f}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ Ֆրանկլինի համակարգն է՝ նորմավորված $L^1[0,1]$-ում, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ մոնոտոն 0-ին ձգտող հաջորդականություն է և $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\tilde{f}_k\right\|_1 < +\infty$, ապա $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\tilde{f}_n$ շարքը զուգամետ է $L^1[0,1]$-ում: Նույնպիսի արդյունք ստացվել է նաև $C[0,1]$-ում:

4. Հետազոտվել է Գիբսի երևույթը Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի և Ստրոմբերգի համակարգերի համար:

Conclusion

1. It is proved that if $\{n_k\}$ is any increasing sequence of natural numbers and the ratio of n_{k+1} to n_k is bounded, then the n_k-th partial sum of the series with respect to the Franklin system can not tend to $+\infty$ on a set of positive measure. It is also proved that if that ratio is not bounded, then there exists a series with respect to Franklin system, such that the n_k-th partial sum of which tends to $+\infty$ almost everywhere in $[0,1]$.

2. For series with respect to general Franklin system, a convergence criterion is proved.

3. The problem posed by J. Holub has been solved. In particular, it is proved that if $\left\{\tilde{f}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ is the Franklin system normalized in $L^1[0,1]$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a sequence tending to zero monotonically and $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\tilde{f}_k\right\|_1 < +\infty$ then the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\tilde{f}_n$ converges in $L^1[0,1]$. A similar result is also obtained in $C[0,1]$.

4. The Gibbs phenomenon is investigated for the general Franklin system and for Stromberg systems.