24

"ՀԱՍՏԱՏՈՒՄ ԵՄ"

ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի

ինստիտուտի տնօրեն

Գ. Ա. Կարագուլյան

18-ը հունիսի, 2021թ.

Վազգեն Գագիկի Միքայելյանի
``*Զուգամիտության հարցեր Ֆրանկլինի համակարգով և նրա ընդհանրացումներով շարքերի համար*" վերնագրով

Ա.01.01 "Մաթեմատիկական անալիզ" մասնագիտությամբ ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության մասին

ԱՌԱՋԱՏԱՐ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԾԻՔ

Վ. Գ. Միքայելյանի աշխատանքը նվիրված է Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի և Սթրոմբերգի համակարգի որոշ արդիական խնդիրների ուսումնասիրմանը:

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երկու գլխից, ամփոփումից և գրականության ցանկից:

Ներածությունում ձևակերպվում են ատենախոսության հիմնական խնդիրները, նպատակները: Բերվում է աշխատանքի համառոտ բովանդակությունը: Այնուհետև նկարագրվում են ստացված արդյունքները:

Բերվում են նաև մի շարք դասական արդյունքներ Ֆրանկլինի համակարգի վերաբերյալ: Ձևակերպվում են Ֆրանկլինի համակարգի երկու կարևոր կիրառությունները $C^1(I^2)$ և $A(D)$ տարածություններում բազիսների կառուցման համար ($I = [0, 1]$; $D = \{z : |z| < 1\}$) : Այս տարածություններում բազիսների գոյության խնդիրը դրվել է Ս. Բանախի կողմից 1955թ.:

Նշվում է Հաարի և Ֆրանկլինի համակարգերի հատկությունների նմանությունը: Նշվում է նաև, որ ապացույցները Ֆրանկլինի համակարգի դեպքում որպես կանոն ավելի դժվար են: Այս է պատճառը, որ Հաարի համակարգի շատ հատկություններ դեռևս ոչ հաստատվել են և ոչ էլ ժխտվել Ֆրանկլինի համակարգի համար: Այդ թվում հայտնի չէ թե ինչպես կարելի է վերականգնել համարյա ամենուրեք զուգամիտող Ֆրանկլինի համակարգի գործակիցները: Այս խնդիրը Հաարի համակարգի համար լուծվել է Վ. Ա. Սկվորցովի կողմից ավելի քան կես դար առաջ:

Այնուհետև բերվում է Ֆրանկլինի համակարգի և դրա երկու ընդհանրացումների սահմանումները: Նշվում է, որ Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի սահմանումը տրվել է Զ. Չիսելսկիի ու Ա. Կամոնտի կողմից և երկրորդը Սթրոմբերգի կողմից:

Քննարկվում է օրթոգոնալ շարքերի դրական չափի բազմության վրա $+\infty$-ի զուգամիտության կամ գումարելիության հարցը, որը առաջին անգամ դրվել է Ն. Լուզինի կողմից եռանկյունաչափական շարքի համար:

Ներածության վերջում նկարագրվում է Գիրսի երևույթը:

Աշխատանքի առաջին գլխում բերվում են Ֆրանկլինի համակարգով և նրա ընդհանրացումներով շարքերի զուգամիտության վերաբերյալ արդյունքները:

2019թ. Գ. Գևորգյանը ապացուցել է, որ Ֆրանկլինի համակարգով շարքը չի կարող զուգամիտել $-\infty$-ի դրական չափի բազմության վրա, որը հետևում է հետևյալ արդյունքից.

$$\mu\left(\left\{x \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} S_{2^k}(x) = +\infty\right\}\right) = 0 :$$

Այստեղ հարց է առաջանում իսկ Ֆրանկլինի համակարգով շարքի մասնական գումարների էլ ինչ ենթահաջորդականություններ, բացի $n_k = 2^k$-ից, չեն կարող զուգամիտել $+\infty$-ի դրական չափի բազմության վրա:

Աշխատանքի 1.2 բաժնում այս հարցին տրվում է սպառիչ և գեղեցիկ պատասխան: Այն է.

Դիցուք $\{n_k\}$-ն բնական թվերի ցանկացած աճող հաջորդականություն է: Դիսերտացիայում ապացուցվում են հետևյալ երկու արդյունքները.

26

Թեորեմ 1 *Եթե* $\sup\limits_{k\in N}\frac{n_{k+1}}{n_k}<+\infty$, *ապա*

$$\mu\left(\left\{x\in[0,1]:\lim_{k\to\infty}S_{n_k}(x)=+\infty\right\}\right)=0:$$

Թեորեմ 2 *Եթե* $\sup\limits_{k\in N}\frac{n_{k+1}}{n_k}=+\infty$, *ապա գոյություն ունի Ֆրանկլինի համակարգով շարք այնպիսին որ* $\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}(x)=+\infty$ *համարյա ամենուրեք* $[0,1]$ *–ում:*

Աշխատանքի 1.3 բաժնում ապացուցվել է Կոնյագինի, Լուզինի պրոբլեմին առնչվող թեորեմի անալոգը համարյա երկուական և ուժեղ ռեգուլյար տրոհման համապատասխան Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի համար.

Թեորեմ 3 *Եթե* $\inf\limits_{n}\sigma_n(x)>-\infty$, $x\in E$ *ապա* $\sup\limits_{n}\sigma_n(x)<+\infty$ *համարյա ամենուրեք* E*–ի վրա:*

Նշենք, որ Ֆրանկլինի դասական համակարգի համար այս թեորեմը ապացուցել է Գ. Գևորգյանը 2019թ.:
Թեորեմ 3-ից և Գ. Գևորգյանի մի այլ արդյունքից դուրս են բերվում հետևյալ երկու թեորեմները.

Թեորեմ 4 *Եթե* $\inf\limits_{n}\sigma_n(x)>-\infty$, $x\in E$ *ապա* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nf_n(x)$ *շարքը զուգամիտում է համարյա ամենուրեք* E*–ի վրա:*

Թեորեմ 5 *Եթե* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2f_n^2(x)=+\infty$ E*–ի վրա, ապա* $\liminf\limits_{n}\sigma_n(x)=-\infty$ *և* $\limsup\limits_{n}\sigma_n(x)=+\infty$ *համարյա ամենուրեք* E*–ի վրա:*

Այնուհետև աշխատանքի 1.4 բաժնում ապացուցվել է, որ Ֆրանկլինի համակարգը (համապատասխան նորմավորումով) մոնոտոն սահմանափակորեն լրիվ է $L^1[0,1]$ –ում, և $C[0,1]$–ում: Այսպիսով դրական պատասխան է տրվել Հոլուբի 1986թ. առաջադրած հարցին:
Երկրորդ գլխում ուսումնասիրվում է Գիբսի երևույթը Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի և Ստրոմբերգի համակարգի համար:
Ապացուցվում է.

Թեորեմ 6 *Գիբսի երևույթը Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի համար տեղի ունի* $[0,1]$*–ի համարյա բոլոր կետերում:*

27

Նշենք որ Գիբսի ֆունկցիայի համար ստացված գնահատականը ներքևից ավելի մեծ է Ֆրանկլինի դասական համակարգի համար Օ. Սարգսյանի ավելի վաղ ստացած գնահատականից:

Այնուհետև ապացուցվում է.

Թեորեմ 7 *Գիբսի երևույթը Սթրոմբերգի համակարգի համար, $m = 0$ դեպքում տեղի ունի $[0,1]$–ի բոլոր կետերում և Գիբսի ֆունկցիան հավասար է հաստատունի համարյա ամենուրեք:*

Այստեղ m–ը Սթրոմբերգի համակարգի ֆունկցիաների հատվածային բազմանդամների աստիճանն է:

Ապացուցվում է նաև հետևյալը.

Թեորեմ 8 *Գիբսի երևույթը Սթրոմբերգի համակարգի համար, $\forall m$–ի դեպքում տեղի ունի $[0,1]$–ի համարյա բոլոր կետերում:*

Վերջում, ատենախոսությունում Գիբսի երևույթի վերաբերյալ ստացված արդյունքների հիման վրա Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի համար ձևակերպվում են երկու հետաքրքիր հարցադրումներ:

Աշխատանքում ուշադրության արժանի թերություններ չեն նկատվել:

Ներկա ատենախոսությունը ավարտուն գիտական հետազոտություն է Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի և Սթրոմբերգի համակարգի մի շարք արդիական խնդիրների բնագավառում: Հեղինակին հաջողվել է լուծել մի շարք կարևոր և դժվար խնդիրներ:

Ատենախոսությունում ստացված արդյունքները և հարցադրումները կարող են հիմք հանդիսանալ նոր հետազոտությունների համար և կարող են օգտագործվել Վարշավայի համալսարանի, Լեհաստանի Գիտությունների ակադեմիայի Մաթեմատիկայի ինստիտուտի, Մոսկվայի պետական համալսարանի, ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտի, Երևանի պետական համալսարանի գիտական խմբերի հետազոտություններում:

Աշխատանքում ստացված հիմնական արդյունքները հրապարակված են 7 հոդվածներում և 8 միջազգային գիտաժողովների թեզիսներում: Հոդվածներից հինգը տպագրված են ազդեցության գործակից ունեցող ամսագրերում: Սեղմագիրն ամբողջությամբ արտացոլում է ատենախոսության բովանդակությունը:

Աշխատանքը բավարարում է ՀՀ ԲՈԿ-ի կողմից թեկնածուական ատենախոսություններին ներկայացվող պահանջներին, իսկ դրա հեղինակը, Վազգեն Գագիկի Միքայելյանը, անկասկած

28

արժանի է Ա.01.01 "Մաթեմատիկական անալիզ" մասնագիտությամբ ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի շնորհմանը:

Աշխատանքի քննարկմանը ներկա են եղել բաժնի հետևյալ աշխատակիցները. ֆ.մ.գ.դ. Կարագուլյան Գ., ֆ.մ.գ.դ. Հակոբյան Հ., ֆ.մ.գ.դ. Գոգյան Ս., ֆ.մ.գ.թ. Վաղարշակյան Ա. և ֆ.մ.գ.թ. Խաչատրյան Լ.:

ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի
ինստիտուտի Իրական բաժնի
վարիչ Հ. Ա. Հակոբյան

18-ը հունիսի, 2021թ