29

ВНЕШНИЙ ОТЗЫВ

На диссертацию Тепояна Липарита Петросовича по теме „*Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*„ по специальности ?.01.02 „Дифференциальные уравнения, математическая физика„ представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Основным обьектом исследований настоящей диссертации является дифференциально-операторные уравнения следующего вида

$$Lu(t) \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)}(t) + A(t^{\alpha-1}u^{(m-1)})^{(m)}(t) + t^\beta Pu(t) = f(t), \qquad t \in V_t, \tag{0.1}$$

где V_t-конечный или бесконечный интервал $V_t = (0,b)$ или $V_t = (1,\infty)$, $\alpha \geq 0$, и

$$\|f\|^2_{\mathbb{H}_{-\beta}(V_t)} = \int_{V_t} t^{-\beta}\|f(t)\|^2_H \, dt < \infty.$$

A и P-линейные, вообще говоря, неограниченные операторы в *сепарабельном* гильбертовом пространстве $A, P : H \to H$. Предполагается, что операторы A и P обладают *общей полной* системой собственных функций $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \varphi_k \in H$

$$A\varphi_k = a_k\varphi_k, \qquad P\varphi_k = p_k\varphi_k, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{0.2}$$

Можно сказать, что исследуемая задача (1) является операторным аналогом самосопряжэнной задачи Штурма-Лювилля с вырождением в 0 (правда после добавления спектральной слагаемой $\lambda u(t)$).

Хорошо известна роль классической задач Штурма-Лювилля, которые продолжают интенсивно исследуваться, в фундаментальных и приладных исследованиях теории операторов, физики, механики, инжинерии. Не менее важная поль отводится и граничным задачам с выроедёнными дифференциальными уравнениями в области или на границе (классические работы Трикоми, Чаплыгина, Келдыша, Лаврентсьева-Бицадзе и других).

В настояшей диссертации ишутся граничнэ условия которые обеспечивают однозначную разрешимость задачи (1).

Диссертация состоит из введения и трёх глав.

Первая глава вспомогательная и в ней определяются нужнэ весовые пространства Соболева на конечном $[0,b]$ интервале $W^m_\alpha(0,b)$, $W^m_{\alpha,\beta}(0,b)$ с вырождением фуниций на левом и на обеих концах одновременно. Применяется степенные веса t^α и $t^\alpha(t-b)^\beta$. Автор изучает вопрос какие из условия $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 1,2,\ldots,m$ сохраняются после замыкания смножества $C^\infty_0(0,b)$ в весовых пространстваж Соболева $W^m_\alpha(0,b)$.

Исследуются также теоремы непрерывного и компактного вложения введённых весовых пространств.

Аналогичные результаты (сохранение условия $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 1,2,\ldots,m$ при замыкании смножества $C^\infty_0(0,b)$, теоремы о непрерывных и компактных вложениях) получены для весового пространства Соболева пространств $W^m_\rho(0,b)$ с обшей весовой функцией $\rho, \rho^{-1} \in L_1(\varepsilon, b)$. Например, как оказалось условие

$$\int_0^b \frac{\tau^{2m-1}}{\rho(\tau)}\, d\tau < \infty$$

обеспечивает компактное вложение

$$\dot{W}^m_\rho(0,b) \hookrightarrow L_2(0,b).$$

В последнем параграфе первой главы определяется весовое пространство Соболева на бесконечном интервале $\overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(1,\infty)$ и доказываются теоремы аналогичные приведянным выше.

Во второй главе исследуются так называемые одномерные уравнения, т.е. когда линейные операторы A и P являются умножением на числа a и p. В § 2.1.1 рассматривается задача Дирихле для вырождающегося самосопряженного дифференциального уравнения высокого порядка следующего вида

$$Pu \equiv (-1)^m(t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + pt^\beta u = f, \tag{0.3}$$

где $t \in (0,b)$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1,3,\cdots,2m-1, m \in \mathbb{N}$, p-постоянное число, $\beta \geq \alpha - 2m$, а $f \in L_{2,-\beta}(0,b)$. Автор ищет слабое (вариационное) решение этого уравнения $\{u,v\}_\alpha + p(t^\beta u,v) = (f,v)$ для $v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(0,b)$. Автор доказывает обратимость самосопряжённого оператора $\mathbb{P} := t^{-\alpha}(-1)^m(t^\alpha u^{(m)})^{(m)}$, находит что его спектр непрерывен и совпадает с лучом $[d(m,\alpha),\infty)$, где $d(m,\alpha) = \dfrac{(\alpha-1)^2\cdot(\alpha-3)^2\cdots(\alpha-(2m-1))^2}{4^m}$, в весовом пространстве Соболева, а потом решает спектральную задачу (1) со спектральным параметром p.

Далее автор рассматривает уравнение

$$Pu \equiv (-1)^m(t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + t^\alpha Au = f, \tag{0.4}$$

где $\alpha \geq 0$, $f \in L_{2,-\alpha}((0,b),H)$, линейный оператор $A : H \to H$ действует в гильбертовом пространстве H и обладает полной системой собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$,
$A\varphi_k = a_k\varphi_k, k \in \mathbb{N}$, образующих базис Рисса в H.

задачу Неймана для опредеуравнения (0.4) автор определяет как слабое (вариационное) решение этого уравнения $(u,v)_\alpha + p(t^\alpha u,v) = (f,v)$, где $(\cdot,\cdot)$- скалярное произведение в $L_2(0,b)$. Сперва доказывается однозначная разрешимость задачи Неймана для уравнения (0.4) в случае $p = 1$ для любого $f \in L_{2,-\alpha}(0,b)$. Затем доказывается что Оператор $\mathbb{B} = t^{-\alpha}B\ :\ D_{\mathbb{B}} \to L_{2,\alpha}(0,b)$, , где $D_{\mathbb{B}}$-области определения $\mathbb{B}$, является положительным и самосопряженным, а обратный оператор $\mathbb{B}^{-1}\ :\ L_{2,\alpha}(0,b) \to D_{\mathbb{B}}$ является компактным. Более того, доказывается, что Оператор $\mathbb{B}$ имеет дискретный спектр и система соответетствующих собственных функций плотна в $L_2(0,b)$ (Следствие 2.15).

В этой-же главе автор исслеет смешанную задачу двух типов для уравнений второго порядка, а также ряд задач для вырождающихся самосопряженных дифференциальных уравнений высокого порядка и произвольного веса. Б заключительных парагафах исследуютсз несаосапряжённые задачи вида

$$Su \equiv (-1)^m\left(t^\alpha u^{(m)}\right)^{(m)} + a\left(t^{\alpha-1}u^{(m)}\right)^{(m-1)} + pt^\beta u = f(t), \tag{0.5}$$

где $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1,3,\ldots,2m-1$, $\beta \geq \alpha - 2m$, $f \in L_{2,-\beta}(0,b)$, $a \neq 0$ и p - постоянные числа. Автор ищет слабое (вариационное) решение этого уравнения $\{u,v\}_\alpha + a(-1)^{m-1}\left(t^{\alpha-1}u^{(m)},v^{(m-1)}\right) + p(t^\beta u,v) = (f,v)$ для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(0,b)$.

Рассмотрены и нелинейнэ уравнения и уравнения на бесконечном интервале $[0,\infty)$.

В заключительной, третьей главе, диссертант изучает граничнэ задачи для уравнений вида (0.1) с неограниченные самосопряжэнными операторами A и P, обладающими общей полной системой собственных функций (0.2) и можем записать

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \quad u_k \in D(L_k). \tag{0.6}$$

С помощью представления (0.6) операторное уравнение (0.1) расщепляется на бесконечную систему уравнений

$$L_k u_k \equiv (-1)^m (t^\alpha u_k^{(m)})^{(m)} + A(t^{\alpha-1} u_k^{(m)})^{(m-1)} + Pt^\beta u_k = f_k(t), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{0.7}$$

и доказывается следующее (Теорема 3.6): операторное уравнение (0.1) однозначно разрешимо при любом $f \in \mathbb{H}_{-\beta}(0, b)$ тогда и только тогда, когда все уравнения (0.6) однозначно разрешимы при любых $f_k \in L_{2,-\beta}(0, b)$, $k \in \mathbb{N}$ и существует независимая от $k \in \mathbb{N}$ постоянная $c > 0$, такая что равномерно по $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\|u_k\|_{L_{2,\beta}(0,b)} \leq c\|f_k\|_{L_{2,-\beta}(0,b)}. \tag{0.8}$$

Далее рассматривается частный случай уравнения (0.1) когда $P = 0$,

$$Pu \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + t^\alpha Au = f, \tag{0.9}$$

на конечном интервале и задача Неймана для него. Указывается условие, обеспечивающие его однозначную разрешимость для любого $f \in L_{2,-\alpha}((0, b), H)$. Такой-же результат получен для смешанных задач первого и второгно типа (Теорема 3.13).

В § 3.4 рассматривается задача Дирихле для дифференциально-операторное уравнение для произвольного веса

$$Pu \equiv (-1)^m (\rho(t) u^{(m)})^{(m)} + Au = f \tag{0.10}$$

на конечном интервале, где $\alpha \geqslant 0$, $f \in L_2((0, b), H)$, A и H как в (0.1) и находится условие разрешимости (Теорема 3.17).

В последнем параграфе последней глави § 3.6 диссертант рассматрывает Задача Дирихле для вырождающихся самосопряженных i nesamosaprqxvonnyh дифференциально-операторных уравнений в бесконечном интервале.

Несколько опечаток замеченных во время чтения диссертации (сообщено прямо автору), абсолютно не влияют на результаты и не мешают чтению диссертации.

- На странице 37 автор вводит дуальное пространство $W_{-\alpha}^{-m}(0, b)$ к $W_\alpha^m(0, b)$. Это определение я рекомендовал бы написать короче, так как стандартное определение дуального пространства функционалов хорошо известна.

- Автор не обьясняете что означает билинейная форма (скалярное произведение?) $\{u, v\}_\alpha$, которое использует многократно, но впервые на стр. 49, формула 2.2.

- В Утверждении 2.15 автор пишет об ограниченности оператора $\mathbb{B} : L_{2,\alpha}(0, b) \to L_{2,\alpha}(0, b)$, что не совсем корректно, так как в этой постановке оператор не ограничен (это повторяется и в других местах, см В Теорему 2.7). Правильнее писать, повидимому, $\mathbb{B} : D_{\mathbb{B}} : \to L_{2,\alpha}(0, b)$, где $D_{\mathbb{B}}$-области определения $\mathbb{B}$. Тем более что в определении 2.3 вводится область определения.

В заключении я позволю себе высказать следующие пожелания диссертанту:

- Было бы интересно рассмотреть полностью спектралную операторную задачу Штурма-Лювилля (1) с добавлением спектрального слагаемого $\lambda u(t)$.

- Понятно, что из за отсутствия структуры Гильбертового пространства трудно получить аналогичнэ результаты для пространств $L_p(a, b)$, $W_{p,\alpha}^m(0, b)$ к $W_{p,\alpha,\beta}^m(0, b)$, $1 < p < \infty$, но может диссертант знает методы которые позволят такие исследования? было бы интересно.

- Автор рассматривает дифференциальнэ операторы A с вырождением с плотного множества $D_A \subset L_{2,\alpha}(0,b)$ в $L_{2,\alpha}(0,b)$. Будет интересно исследовать такие операторы между пространствами Соболева $W^n_\alpha(0,b) \to W^{n-2m}_\alpha(0,b) \to$, где $2m$-порядок дифференциального оператора A. В такой постановке оператор A ограничен и существует больше инструментов для его исследования.

Диссертационная работа, по нашему мнению, удовлетворяет требованиям, предявляемым ВАК Армении, а соискатель Липарит Петросович Тепоян достоин присвоения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности ?.01.02 „Дифференциальные уравнения, математическая физика.

Доктор физ.-мат. наук
Зав. отделом Математической Физики.
Математического Института
им. А. Размадзе, профессор Р. Дудучава

Подпись подтверждаю.
Доктор физ.-мат. наук
Директор Математического Института
им. А. Размадзе, Профессор Н. Парцвания