ОТЗЫВ

о диссертации Тепояна Липарита Петросовича „*Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*" по специальности Ա.01.02 „Дифференциальные уравнения, математическая физика, предстовленной, на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

В диссертационной работе исследуются различные граничные задачи для вырождающихся дифференциально-операторных уравнений

$$Lu :\equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + A\left(t^{\alpha-1} u^{(m-1)}\right)^{(m)} + t^\beta P u = f(t), \qquad (1)$$

где $u(t,\cdot) \in H, t \in (a,b), f \in L_{2,-\beta}\left((a,b),H\right) := \{ f, t^{-\frac{\beta}{2}} ||f||_H \in L_2(a,b)\}$, а также

$$Lu := (-1)^m (\rho(t) u^{(m)})^{(m)}, \quad f \in L_{2,-\beta}((a,b),H) \qquad (2)$$

где линейные операторы A и P (вообще говоря неограниченные) действуют в сепарабельном гильбертовом пространстве H, для которых системы собственных функций совпадают и образуют базис Рисса в H, а ρ произвольная весовая функция с интегральным свойством.

В работе исследован вопрос о добавлении таких граничных условий (при $t = 0$ и $t = b$) или (при $t = 1$ и $t = +\infty$), чтобы соответствующая граничная задача имела единственное обобщенное решение при любых правых частях.

Такие задачи возникают при исследовании уравнений Трикоми, Чаплигина, Келдыша, и других авторов. Очевидно, что исследование соответствующих задач актуально и они представляют научный и практический интерес.

Диссертационная работа состоит из введения и трех глав.

В первой главе определяются весовые пространства Соболева $\dot{W}_\alpha^m(a,b)$, $W_\alpha^m(a)$, $W_\alpha^m(b)$, $W_\alpha^m(a,b,)$, $W_{p,\alpha,\beta}^m(a,b)$ и $\dot{W}_\rho^m(a,b)$. Для функций из этих пространств доказываются оценки вблизи точки $t = 0$ ($t = +\infty$) (см. Утверждения 1.3, 1.7, 1.11, 1.13 и Теорему 1.6).

Во второй главе исследуются так называемые одномерные уравнения, т.е. когда линейные операторы A и P являются умножением на числа a и p. Основными результатами являются следующие результаты:

- доказывается, что дифференциальное выражение $(-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)}$ порождает ограниченный оператор $S: \dot{W}_\alpha^m(a,b) \to L_{2,-\beta}(0,b)$ и доказывается, что функции $u \in D(S)$ имеют следующие свойства: Значение $u(0)$ конечно при $\alpha \in]2m-1, 2m - \frac{1}{2}[$ и значения $u^{(j)}(0)$, $j = 0,1,\cdots,k$ конечны когда

$\alpha \in]2m-2k-1, 2m-2k[$, $k = 1,\cdots,m$ (см. теорему 2.4),

- определяется оператор $\boldsymbol{S} = t^{-\beta}S: L_{2,\beta}(0,b) \to L_{2,\beta}(0,b)$ и доказывается, что спектр оператора $\boldsymbol{S}$ дискретно при $\beta > 2m-\alpha$ а при $\beta = 2m-\alpha$ (см. теоремы 2.7 и 2.8) спектр непрерывен и совпадает с лучом $]d(m,\alpha), +\infty[$, где

$$d(m,\alpha) := \frac{1}{4^m}(\alpha-1)^2 \ldots (\alpha-(2m-1))^2.$$

- найдены необходимые и достаточные условия ортогональности на f для существования обобщенного решения уравнения

$$(-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} = f, \quad f \in L_{2,-\alpha}(0,b)$$

  в пространстве $W_\alpha^m(0,b)$.

- Доказано, что уравнение $(-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + t^\alpha u = f$, $f \in L_{2,-\alpha}(0,b)$ однозначно разрешимо в $W_\alpha^m(0)$ (см. утверждение 2.19) и найдены условия ортогональности на функцию f, чтобы уравнение $(-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} = f$ было разрешимо в $W_\alpha^m(0)$ (см. утверждение 2.22).

- Найдены условия, при выполнении которых одномерное уравнение (1) однозначно разрешимо в $\dot{W}_\alpha^m(0,b)$ для любого $f \in L_{2,-\alpha}(0,b)$ (см. теорему 2.32).

- Аналогичные результаты были получены также для бесконечного промежутка $]1;+\infty[$ (см. теоремы 2.65, 2.66, 2.67, 2.69 и 2.71):

Основными результатами Главы 3 являются:

- Найдены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости уравнения (1) для $f \in L_{2,-\beta}((0,b),H)$ (см. теорему 3.6).
- при некотором ограничении на спектр оператора P доказывается, что для любого $f \in L_{2,-\beta}((0,b),H)$,

$$(-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + t^\alpha P u = f \qquad (3)$$

  задача Неймана для уравнения (3) однозначно разрешима в пространстве $W_\alpha^m((0,b),H)$ (см. теорему 3.10).

- при некотором ограничении на спектр оператора P доказано, что смешанная задача для операторного уравнения (3) однозначно разрешима (см. теорему 3.13).

- аналогичные результаты получены для бесонечного промежутка $]1;+\infty[$ (см. теоремы 3.24 и 3.27).

Диссертация написана на высоком, научном уровне. Автореферат соответствует диссертации.

Результаты работы имеют несомненное теоретическое и прикладное значение. Новизна и обоснованность полученных результатов не вызывает сомнения. Все результаты опубликованы в авторитетных изиданиях и доложены на международных конференциях и на семинаре математического института Подстамского Университета.

Считаю, что диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям, предявляемым ВАК к докторским диссертациям, а Липарит Петросович Тепоян достоен присвоения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности Ա.01.02 „Дифференциальные уравнения, математическая физика".

Директор Института Прикладной Математики
имени Академика И.Н.Векуа
Тбилисского Государственного Университета
им. И. Джавахишвили
Член (академик) Европейской Академии Наук (EurAsc)
Доктор физ.-мат. наук
Профессор Г.В. Джаиани

12.06.2021