ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դավիթ Սահակի Ոսկանյան

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՐԵՐԻ ԵՎ n-ԱՆԿԱԽ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա 01.07 «Հաշվողական մաթեմատիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2021

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Восканян Давид Саакович

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И n-НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности А 01.07 “Вычислительная математика”

Ереван - 2021

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր	Հ. Ա. Հակոբյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր	Մ. Գ. Գրիգորյան
	ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու	Վ. Կ. Վարդանյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2021թ. դեկտեմբերի 16-ին, ժամը 15:00-ին, ԵՊՀ-ում գործող ՀՀ ԲՈԿ-ի 050 "Հաշվողական մաթեմատիկա" մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ա. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրը առաքված է 2021թ. նոյեմբերի 5-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար Տ.Ն.Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском гасударственном университете

Научный руководитель:	доктор физ.–мат. наук	А. А. Акопян
Официальные оппоненты:	доктор физ.–мат. наук	М. Г. Григорян
	кандидат физ.–мат. наук	В. К. Варданян

Ведущая организация: Институт математики НАН Армении

Защита состоится 16 декабря 2021 г. в 15:00–часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 050 "Вычислительная математика", по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета. Автореферат разослан 5 ноября 2021 г.

Ученый секретарь специализированного совета Т.Н. Арутюнян

Թեմայի արդիականությունը. Հաշվողական մաթեմատիկայի շատ խնդիրներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում խնդրի ձևակերպման մեջ մտնող ֆունկցիաները փոխարինել իրենց ինչ-որ իմաստով մոտ և ավելի պարզ ֆունկցիաներով: Հայտնի են ֆունկցիաների փոխարինման տարբեր եղանակներ, որոնցից առավել տարածված և պատմականորեն ավելի շուտ առաջացած մեթոդներից է *բազմանդամային միջարկումը* կամ ինտերպոլացիան: Միջարկումը իրենից ներկայացնում է որևէ ֆունկցիայի՝ որոշ կետերում ընդունած արժեքների միջոցով այդ ֆունկցիայի մոտավոր արժեքների հաշվումը միջանկյալ կետերում: Բազմանդամային միջարկման դեպքում որպես միջարկիչ ֆունկցիաներ օգտագործվում են բազմանդամներ: Միաչափ բազմանդամային միջարկման հիմնարար արդյունքները ստացել են դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը, ընդ որում սկզբունքորեն տարբեր մոտեցումներով: Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկումով հիմնավորապես սկսել են զբաղվել շատ ավելի ուշ՝ միայն վերջին չորս-հինգ տասնամյակների ընթացքում: Ըստ էության, մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման առաջին կարևոր արդյունքները ստացել են Բերզոլարին, Ռադոնը, ինչպես նաև Չանգը և Յաոն: Այս ուղղությունը հանդիսանում է նաև հանրահաշվական երկրաչափության արդիական բաժիններից մեկը: Բազմանդամային միջարկման և հանրահաշվական երկրաչափության միջև կապն այն է, որ միջարկման խնդրի լուծելիությունը բերվում է տրված հանգույցներով անցնող հանրահաշվական կորի գոյությանը:

Ատենախոսության նպատակը և խնդիրները. Երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետերի ուսումնասիրություն, n-կախյալ բազմությունների ընդհանուր բնութագրում, n-անկախ հանգույցներով անցնող հանրահաշվական կորերի չափողականության ուսումնասիրություն:

Հետազոտման օբյեկտը. Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, հարթ հանրահաշվական կորեր, n-անկախ բազմություններ, մաքսիմալ ուղիղներ և մաքսիմալ կորեր:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են նաև գծային հանրահաշվի, հանրահաշվական երկրաչափության, ինչպես նաև մաթեմատիկական անալիզի մեթոդներ:

Գիտական Նորությունը.

- Տրվել է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որպեսզի տրված mn կետերը լինեն երկու՝ m և n աստիճանի կորերի հատման կետերի բազմություն,
- ստացվել է n-կախյալ հանգույցների բնութագրումների մի շարք, որը ներառում է որոշ հայտնի արդյունքներ,
- գնահատվել է տրված n-անկախ հանգույցներով անցնող կորերի տարածության չափողականությունը և բնութագրվել է մաքսիմալ չափողականության դեպքը:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքներն ունեն և տեսական, և կիրառական նշանակություն: Այդ արդյունքները վերաբերում են n-անկախ և n-ճշգրիտ բազմությունների բնութագրմանը, որոնք կարևոր դեր են կատարում բազմաչափ միջարկումների տեսության մեջ: Այդ արդյունքները կարող են կիրառվել բոլոր այն խնդիրներում, որոնց լուծման մեջ օգտագործվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկումը:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

- mn կետերի՝ համապատասխանաբար m և n աստիճանի կորերի հատման կետեր լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը,
- n-կախյալ հանգույցների բնութագրումների մի շարք,
- n-անկախ հանգույցներով անցնող հարթ հանրահաշվական կորերի չափողականության գնահատումը, մաքսիմալ չափողականության դեպքի բնութագրումը:

Հրապարակումները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են երեք գիտական հոդվածներում և Constructive Theory of Functions (CTF-2019) միջազգային կոնֆերանսի թեզիսում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլխից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 18 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 101 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Աշխատանքը սկսվում է բազմանդամային միջարկման հայտնի արդյունքների շարադրմամբ:

Պարագրաֆ 1.1-ում ներկայացվում ենք մեկ փոփոխականի միջարկման դասական խնդիրը և դրա լուծման Լագրանժի մեթոդը: Միաչափ միջարկման խնդրի լուծման միակության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը այն է, որ հանգույցների քանակը հավասար լինի բամանդամային տարածության չափողականությանը:

Պարագրաֆ 1.2-ում դիտարկում ենք Լագրանժի երկչափ միջարկման խնդիրը:

Դիցուք Π_n-ը երկու փոփոխականի՝ n-ը չգերազանցող գումարային աստիճանի բազմանդամների տարածությունն է՝

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{i+j\leq n} a_{ij}x^iy^j \right\} :$$

Դրա չափողականությունը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$N := N_n := \dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}:$$

Հարթ հանրհաշվական կորը երկու փոփոխականի $\geq\ 1$ աստիճանի բազմանդամի զրոների բազմությունն է: Պարզության համար տրված p բազմանդամը, ինչպես նաև $p(x,y) = 0$ հավասարումով բնութագրվող հանրահաշվական կորը կնշանակենք միևնույն p տառով:

Գծային հանրահաշվից հայտնի է հետևյալը՝

Լեմմա 1.2.1. *Հարթության մեջ $N_k - 1 = (1/2)k(k+3)$ քանակի կետերի ցանկացած բազմության համար գոյություն ունի k աստիճանի կոր, որն անցնում է այդ կետերով:*

Դիցուք հարթության վրա տրված է k հատ իրարից տարբեր հանգույցների բազմություն՝

$$\mathcal{X}_k = \{(x_i, y_i) : i = 1, 2, \ldots, k\} \subset \mathbb{C}^2$$

և կամայական $c_1, c_2, ..., c_k$ արժեքներ: Անհրաժեշտ է գտնել $p \in \Pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$p(x_i, y_i) = c_i, \quad i = 1, \ldots, k: \tag{1.3}$$

Այս խնդիրը կոչվում է *երկչափ միջարկման խնդիր*:

Սահմանում 1.2.2. *Հանգույցների $\mathcal{X}_k$ բազմությունը կոչվում է n-ճշգրիտ բազմություն, եթե կամայական $(c_1, \ldots, c_k)$ արժեքների դեպքում* (1.3)*-ին բավարարող $p \in \Pi_n$ բազմանդամ գոյություն ունի և միակն է:*

Նկատենք, որ (1.3) առընչություններից ունենք N անհայտներով k հավասարումների համակարգ: Հետևաբար միակորեն լուծելիության համար ստանում ենք հետևյալ անհրաժեշտ պայմանը՝

$$k = \#\mathcal{X}_k = \dim \Pi_n = N: \tag{1.4}$$

Այսուհետ, երբ դիտարկենք n-ճշգրիտ բազմություն, կենթադրենք, որ (1.4) պայմանը բավարարված է: Սակայն, ի տարբերություն միաչափ դեպքի, բազմաչափ միջարկման խնդրի միակորեն լուծելիության համար (1.4) պայմանը բավարար չէ և հանգույցների բազմության վրա անհրաժեշտ են այլ սահմանափակումներ ևս:

Ինչպես հայտնի է, գծային հավասարումների համակարգն ունի միակ լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ համապատասխան համասեռ համակարգն ունի միակ՝ զրոյական լուծում: Այսպիսով տեղի ունի հետևյալը՝

Պնդում 1.2.3. *Որպեսզի միջարկման խնդիրը $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ հանգույցներով լինի ճշգրիտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա հետևյալը՝*

$$p \in \Pi_n,\ p(x_i, y_i) = 0,\ \ i = 1, 2, ..., N \Rightarrow p = 0 :$$

Այսուհետ $p\big|_{\mathcal{X}}$-ով կնշանակենք p բազմանդամի սահմանափակումը $\mathcal{X}$ բազմության վրա:

Սահմանում 1.3.1. $A \in \mathcal{X}$ *հանգույցի համար $p \in \Pi_n$ բազմանդամը կոչվում է n-ֆունդամենտալ բազմանդամ, եթե*

$$p(A) = 1 \qquad \text{և} \qquad p\big|_{\mathcal{X}\setminus\{A\}} = 0:$$

Ֆունդամենտալ բազմանդամը կնշանակենք $p^\star_{A,\mathcal{X}} = p^\star_A$:

Գծային հանրահաշվի մեթոդներով հեշտությամբ ապացուցվում է հետևյալ պնդումը՝

Պնդում 1.3.2. *Որպեսզի միջարկման խնդիրը $\mathcal{X} = \{A_i\}_{i=1}^N$ հանգույցներով լինի ճշգրիտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ բազմության յուրաքանչյուր հանգույց ունենա n-ֆունդամենտալ բազմանդամ: Ավելին, այդ դեպքում միջարկիչ բազմանդամի համար կունենանք հետևյալ բանաձևը՝*

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i p^\star_{A_i}$$

Ձևակերպենք ճշգրիտ բազմության մեջ ֆունդամենտալ բազմանդամների մի կարևոր հատկություն:

Լեմմա 1.3.3. *Եթե միջարկման խնդիրը $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցներով n-ճշգրիտ է, ապա ցանկացած $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը միակն է, ճիշտ n աստիճանի բազմանդամ է և չի կարող պարունակել պատիկ արտադրիչներ:*

Ֆունդամենտալ բազմանդամները կարող են լինել բերվող, այսինքն իրենցից ներկայացնեն մի քանի (ավելի ցածր աստիճանի) բազմանդամների արտադրյալ: Այդ դեպքում օգտագործում ենք հետևյալը՝

Սահմանում 1.3.4. *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը n-ճշգրիտ բազմություն է: Այդ դեպքում կասենք, որ $A \in \mathcal{X}$ հանգույցն օգտագործում է $q \in \Pi_k, k \leq n$ կորը, եթե q-ն հանդիսանում է A հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամի արտադրիչ:*

Այժմ քննարկենք հանգույցների բազմության ևս մեկ կարևոր հատկություն:

Սահմանում 1.3.5. *Հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է n-անկախ, եթե նրա ցանկացած հանգույց ունի n-ֆունդամենտալ բազմանդամ: Հակառակ դեպքում այն կոչվում է n-կախյալ:*

Քանի որ ֆունդամենտալ բազմանդամները գծորեն անկախ են, ստանում ենք, որ n-անկախության համար անհրաժեշտ պայման է՝

$$\#\mathcal{X} \leq \dim \Pi_n = N:$$

Այն դեպքում, երբ $k = N$ n-անկախությունը համարժեք է n-ճշգրտությանը:

Նշանակենք $\rho(A, B)$-ով հեռավորությունը A և B հանգույցների միջև: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալը՝

Լեմմա 1.3.6. *Ենթադրենք $\mathcal{X}_s = \{A_i\}_{i=1}^s$ բազմությունը n-անկախ է: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $\epsilon > 0$ թիվ, որ ցանկացած $\mathcal{X}'_s = \{A'_i\}_{i=1}^s$, բազմություն, որը բավարարում է $\rho(A_i, A'_i) < \epsilon,\ i = 1, \ldots, s$ պայմանին նույնպես n-անկախ է:*

Հաջորդ արդյունքը վերաբերում է n-անկախ բազմությունների ընդլայնմանը:

Լեմմա 1.3.7 ([7], Լեմմա 2.1)**.** *Ցանկացած n-անկախ $\mathcal{X}$ բազմություն, որտեղ $\#\mathcal{X} < N$ կարելի է ընդլայնել մինչև n-ճշգրիտ բազմություն:*

Սահմանում 1.3.8. *Կասենք, որ միջարկման խնդիրը $\mathcal{X}_k = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^k$ հանգույցներով լուծելի է, եթե ցանկացած $c_1, c_2, ..., c_k$ արժեքների դեպքում գոյություն ունի $p \in \Pi_n$ բազմանդամ (ոչ պարտադիր միակը), որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

$$p(x_i, y_i) = c_i,\ \ i = 1, 2, ..., k :$$

Հայտնի է հետևյալը՝

Պնդում 1.3.9. *Միջարկման խնդիրը $\mathcal{X}_k = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^k$ հանգույցներով լուծելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}_k$ բազմությունը n-անկախ է:*

Եթե հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը n-կախյալ է, ապա գոյություն ունի $A \in \mathcal{X}$ հանգույց, որը չունի n-ֆունդամենտալ բազմանդամ: Այսինքն ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար

$$p\big|_{\mathcal{X}\setminus\{A\}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p(A) = 0:$$

Հետևյալ հայտնի լեմման և դրա հետևանքը նույնպես ունեն մեծ կիրառություն:

Լեմմա 1.3.10 ([10], Լեմմա 2.2). *Ենթադրենք հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը n-անկախ է և $\mathcal{Y}$ բազմության ցանկացած հանգույց ունի n-ֆունդամենտալ բազմանդամ $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ բազմության նկատմամբ: Այդ դեպքում $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ բազմությունը նույնպես n-անկախ է:*

Հետևանք 1.3.11 ([10], Պնդում 2.3). *Ենթադրենք k աստիճանի σ_k կորը պարունակում է n-անկախ հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը: Ենթադրենք նաև, որ $\mathcal{Y}$ բազմությունը ընկած չէ σ_k-ի վրա և $(n-k)$-անկախ է: Այդ դեպքում $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ բազմությունը կլինի n-անկախ:*

Հաջորդիվ բերենք n-անկախության և n-կախյալության վերաբերյալ հայտնի արդյունքների մի շարք:

Թեորեմ 1.3.12 ([17], Սևերի). *Ամենաշատը $n+1$ հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը n-անկախ է:*

Հաջորդ արդյունքը վերաբերվում է ամենաշատը $2n+1$ հանգույց պարունակող բազմություններին:

Թեորեմ 1.3.13 ([4], Պնդում 1). *Ամենաշատը $2n+1$ հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը n-կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ բազմության որևէ $n+2$ հանգույց համագիծ են:*

Այս շարքի երրորդ արդյունքը հետևյալն է՝

Թեորեմ 1.3.14 ([10], Թեորեմ. 5.1). *Ամենաշատը $3n$ հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը n-կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևը մեկը.*

ա) $n+2$ հանգույցներ ընկած են միևնույն ուղղի վրա,

բ) $2n+2$ հանգույցներ ընկած են կոնիկի վրա,

գ) $\#\mathcal{X} = 3n,$ և գոյություն ունեն այնպիսի $\sigma_3 \in \Pi_3$ կուբիկ և $\sigma_n \in \Pi_n$ կոր, որ $\mathcal{X} = \sigma_3 \cap \sigma_n$:

Աշխատության մեջ հաճախ գործ ենք ունենանում նաև n–կախյալ բազմությունների ավելի խիստ տարբերակի հետ, որը կներկայացնենք ստորև:

Սահմանում 1.3.15. *Հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է* էապես n-կախյալ, *եթե նրա ոչ մի հանգույց չունի n-ֆունդամենտալ բազմանդամ:*

Այսպիսով $\mathcal{X}$-ի էապես k-կախյալությունը նշանակում է, որ k աստիճանի ցանկացած հարթ կոր, որը պարունակում է $\mathcal{X}$-ի բոլոր հանգույցները, բացի մեկից, պարունակում է նաև այդ հանգույցը:

Ներկայացնենք որոշ պնդումներ էապես n-կախյալ բազմությունների վերաբերյալ:

Պնդում 1.3.16 ([12], Հետևանք 2.2). *Ենթադրենք տրված է n-կախյալ $\mathcal{X}$ բազմությունը: $\mathcal{Y}$-ով նշանակենք $\mathcal{X}$-ի այն հանգույցների ենթաբազմությունը, որոնք ունեն n-ֆունդամենտալ բազմանդամներ $\mathcal{X}$ բազմության նկատմամբ: Այդ դեպքում $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ բազմությունը էապես n-կախյալ է:*

Հետևանք 1.3.17. *Ցանկացած n-կախյալ բազմություն ունի էապես n-կախյալ ենթաբազմություն:*

Լեմմա 1.3.18. *Ենթադրենք $\mathcal{X}$ բազմությունը էապես n-կախյալ է, իսկ σ_k-ն k աստիճանի կոր է: Ենթադրենք նաև, որ հանգույցների $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \setminus \sigma_k$ բազմությունը դատարկ չէ: Այդ դեպքում $\mathcal{Y}$-ը էապես $(n-k)$-կախյալ է:*

Ենթադրենք σ_n-ը n աստիճանի բերվող կոր է, այսինքն.

$$\sigma_n = \sigma_{n_1} \cdots \sigma_{n_s}, \tag{1.5}$$

որտեղ σ_{n_i}-ն ունի n_i աստիճան և $n = n_1 + \cdots + n_s$: $\mathcal{X}_i$-ով նշանակենք այն հանգույցների բազմությունը, որոնք ընկած են σ_{n_i} կոմպոնենտի վրա և չեն պատկանում մյուս $\sigma_{n_j},\ j \neq i$ կոմպոնենտներին, $i = 1, \ldots, s$, այսինքն

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{X} \setminus \Big(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} \sigma_{n_j} \Big) : \tag{1.6}$$

σ_{n_i}-ն կանվանենք *ոչ դատարկ* $\mathcal{X}$ բազմության նկատմամբ, եթե $\mathcal{X}_i \neq \emptyset$:

Լեմմա 1.3.19. *Ենթադրենք $\mathcal{X} \subset \sigma_n$ բազմությունը էապես k-կախյալ է, որտեղ σ_n-ը n աստիճանի բերվող կոր է, տրված* (1.5) *տեսքով: Ենթադրենք նաև, որ σ_n-ի ոչ մի կոմպոնենտ դատարկ չէ $\mathcal{X}$-ի նկատմամբ: Այդ դեպքում* (1.6)-*ով տրված ցանկացած $\mathcal{X}_i$ բազմություն էապես $(k - n + n_i)$-կախյալ է:*

Այնուհետև ուսումնասիրում ենք հանգույցների բազմության n-լրիվություն կորի վրա և մաքսիմալ կորերի գաղափարները:

Սահմանում 1.4.1. *Դիցուք σ_k-ն k աստիճանի հարթ կոր է, առանց պատիկ կոմպոնենտների: Այդ դեպքում հանգույցների $\mathcal{X} \subset \sigma_k$ բազմությունը կոչվում է n-լրիվ σ_k-ի վրա, եթե*

$$p \in \Pi_n,\ p\big|_{\mathcal{X}} = 0 \ \Rightarrow \ p = q\sigma_k,\ q \in \Pi_{n-k}.$$

Նկատենք, որ այն դեպքում, երբ $k > n$, n-լրիվություն նշանակում է, որ $p \in \Pi_n,\ p\big|_{\mathcal{X}} = 0 \ \Rightarrow$ $p = 0$: Հետևաբար կունենանք

Լեմմա 1.4.2. *Դիցուք $k > n$: $\mathcal{X} \subset \sigma_k$ բազմությունը n-լրիվ է σ_k-ի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$-ը պարունակում է n-ճշգրիտ $\mathcal{X}_0$ ենթաբազմություն:*

Դիտարկենք բազմանդամների հետևյալ երկու տարածությունները.

$$\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} := \left\{ p \in \Pi_n : p\big|_{\mathcal{X}} = 0 \right\}, \quad \mathcal{P}_{n,\sigma_k} := \left\{ p\sigma_k : p \in \Pi_{n-k} \right\} :$$

Նշենք, որ $\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} \supset \mathcal{P}_{n,\sigma_k}$, եթե $\mathcal{X} \subset \sigma_k$:

Պնդում 1.4.4 ([10], Պնդում 1.10)**.** *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը հանգույցների բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = \{0\}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$-ը պարունակում է n-ճշգրիտ ենթաբազմություն:*

Նշանակենք

$$d(n,k) := \dim \Pi_n - \dim \Pi_{n-k}:$$

Հետագայում օգտագործում ենք նաև հետևյալ հայտնի պնդումը (տես օրինակ [16], Պնդում 3.1):

Պնդում 1.4.5. *Դիցուք q-ն k աստիճանի կոր է, առանց պատիկ կոմպոնենտների, որտեղ $k \leq n$: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալը՝*

1. *q կորի վրա ընկած, ավելի քան $d(n,k)$ հանգույց պարունակող ցանկացած բազմություն n-կախյալ է;*
2. *q կորի վրա ընկած, $d(n,k)$ հանգույց պարունակող ցանկացած $\mathcal{X}$ բազմություն n-անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$p \in \Pi_n,\ p\big|_{\mathcal{X}} = 0 \Rightarrow p = rq, \text{ որտեղ } r \in \Pi_{n-k} :$$

Հետևանք 1.4.6. *Տեղի ունի հետևյալը՝*

1. *Ուղղին պատկանող, առնվազն $n+2$ հանգույցների բազմությունը n-կախյալ է;*
2. *Կոնիկին պատկանող, առնվազն $2n+2$ հանգույցների բազմությունը n-կախյալ է;*
3. *Կուբիկին պատկանող, առնվազն $3n+1$ հանգույցների բազմությունը n-կախյալ է:*

Այսպիսով, համաձայն Պնդում 1.4.5, $1)$-ի, $k \le n$ աստիճանի q կորը կարող է պարունակել ամենաշատը $d(n,k)$ քանակի n-անկախ հանգույցներ: Այստեղից գալիս ենք հետևյալ սահմանմանը:

Սահմանում 1.4.7 ([16], Սահմ. 3.1). *Տրված է n-անկախ հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը, որտեղ $\#\mathcal{X} \ge d(n,k)$: Այդ դեպքում $k \le n$ աստիճանի կորը, որն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության $d(n,k)$ հանգույցներով կոչվում է մաքսիմալ:*

Բերենք մի պնդում, որը բնութագրում է մաքսիմալ կորերը:

Պնդում 1.4.8 ([16], Պնդում 3.3). *Տրված է n-անկախ հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը, որտեղ $\#\mathcal{X} \ge d(n,k)$: Այդ դեպքում k աստիճանի μ կորը, որտեղ $k \le n$, կլինի մաքսիմալ կոր այն և միայն այն դեպքում, երբ $p \in \Pi_n,\ p|_{\mathcal{X}\cap\mu} = 0 \Rightarrow p = \mu s,\ s \in \Pi_{n-k}$:*

Հաջորդ արդյունքը վերաբերում է կորերի վրա մաքսիմալ n-անկախ բազմություններին:

Պնդում 1.4.9 ([14], Պնդում 3.5). *Ենթադրենք σ-ն k աստիճանի հանրահաշվական կոր է, առանց պատիկ կոմպոնենտների, իսկ $\mathcal{X}_s \subset \sigma$ բազմությունը s հզորությամբ որևէ n-անկախ բազմություն է, որտեղ $s < d(n,k)$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}_s$-ը կարելի է ընդլայնել մինչև մաքսիմալ n-անկախ $\mathcal{X}_d \subset \sigma$ բազմություն, որի հզորությունը՝ $d = d(n,k)$:*

Հաջորդ արդյունքը վերաբերում է n-անկախ բազմության հանգույցների փոխարինմանը այնպես, որ ստացված բազմությունը պահպանում է n-անկախությունը:

Լեմմա 1.4.10 ([9], Լեմմա 6). *Ենթադրենք $\mathcal{X}$-ը հանգույցների n-անկախ բազմություն է, իսկ $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի n-ֆունդամենտալ $p_A^\star$ բազմանդամն այնպիսին է, որ $p_A^\star(A') \ne 0$: Այդ դեպքում A հանգույցը կարող ենք փոխարինել A'-ով և ստացված $\mathcal{X}' := \mathcal{X} \cup \{A'\} \setminus \{A\}$ բազմությունը նույնպես կլինի n-անկախ: Այսպիսի փոխարինում կարող ենք կատարել մասնավորապես հետևյալ երկու դեպքերում՝*

$i)$ եթե $A \in \mathcal{X}$ հանգույցը միաժամանակ պատկանում է σ-ի մի քանի կոմպոնենտի, այդ դեպքում այն կարող ենք փոխարինել A' հանգույցով, որը պատկանում է կոմպոնենտներից որևէ (ցանկացի) մեկին,

$ii)$ եթե q կորը n-ֆունդամենտալ $p_A^\star$ բազմանդամի կոմպոնենտ չէ, ապա կարող ենք A հանգույցը փոխարինել A' հանգույցով, որն ընկած է q կորի վրա:

Աշխատության մեջ օգտագործում ենք հանրահաշվական երկրաչափությունից հայտնի հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 1.4.11 ([18], Թեորեմ 2.2). *Եթե $\mathcal{C}$-ն n աստիճանի կոր է առանց պատիկ կոմպոնենտների, ապա $\mathcal{C}$-ին չպատկանող ցանկացած O կետով անցնում են ուղիղներ, որոնք հատում են $\mathcal{C}$-ն իրարից տարբեր n կետերում:*

Հետագայում օգտագործում ենք նաև հետևյալ հայտնի լեմման՝

Լեմմա 1.4.12. *Ենթադրենք գծորեն անկախ m բազմանդամներ անցնում են $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով: Այդ դեպքում ցանկացած $A \notin \mathcal{X}$ հանգույցի համար այդ բազմանդամների գծային թաղանթում գոյություն ունեն գծորեն անկախ $m-1$ բազմանդամներ, որոնք անցնում են նաև A հանգույցով:*

Վերջում ներկայացնենք Քեյլի-Բախարախի և Նյոթերի հայտնի թեորեմները, որոնք վերաբերում են m և n աստիճանի կորերի հատման կետերին:

Թեորեմ 1.4.13 (Քեյլի-Բախարախ). *Ենթադրենք $\mathcal{X}$ բազմությունը, որտեղ $\#\mathcal{X} = mn$, հանդիսանում է համապատասխանաբար m և n աստիճանի σ_m և σ_n կորերի հատման կետերի բազմություն՝ $\mathcal{X} = \sigma_m \cap \sigma_n$: Նշանակենք $\kappa := m+n-3$, այդ դեպքում*

ա) $\mathcal{X}$ բազմությունը էապես κ-կախյալ է;

բ) $\mathcal{X}$ բազմությունը $(\kappa+1)$-անկախ է;

գ) ցանկացած $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի համար $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմությունը κ-անկախ է:

Թեորեմ 1.4.14 (Նյոթեր). *Ենթադրենք $\mathcal{X}$ բազմությունը, որտեղ $\#\mathcal{X} = mn$, հանդիսանում է համապատասխանաբար m և n աստիճանի σ_m և σ_n կորերի հատման կետերի բազմություն՝ $\mathcal{X} = \sigma_m \cap \sigma_n$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ի վրա զրոյացող ցանկացած $p_k \in \Pi_k$ բազմանդամի համար ճիշտ է*

$$p_k = A_{k-m}\sigma_m + B_{k-n}\sigma_n, \tag{1.12}$$

որտեղ $A_{k-m} \in \Pi_{k-m}$, իսկ $B_{k-n} \in \Pi_{k-n}$.

Հետևանք 1.4.15. *Ենթադրենք $\mathcal{X}$ բազմությունը, որտեղ $\#\mathcal{X} = mn, m \leq n$, հանդիսանում է համապատասխանաբար m և n աստիճանի σ_m և σ_n կորերի հատման կետերի բազմություն՝ $\mathcal{X} = \sigma_m \cap \sigma_n$: Այդ դեպքում m-ից ցածր աստիճանի ոչ մի կոր չի պարունակում ամբողջ $\mathcal{X}$ բազմությունը:*

Ինչպես արդեն նշել ենք, բազմանդամային միջարկման խնդրի ճշգրտությունը կախված է ոչ միայն միջարկման հանգույցների քանակից, այլ նաև նրանց երկրաչափական փոխդասավորությունից: Գլուխ 2-ում ուսումնասիրում ենք ճշգրիտ բազմությունների կառուցման որոշ մեթոդներ: Նախ սահմանենում ենք Բերզոլարի [1] և Ռադոնի [15] կողմից ներմուծված կոնստրուկցիան:

Սահմանում 2.1.1. *Կասենք, որ $N = 1 + 2 + ... + (n+1)$ հանգույցներ պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է Բեկոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիային, կամ BR_n բազմություն է, եթե գոյություն ունեն $n+1$ ուղիղներ՝ $l_0, l_1, ..., l_n$ այնպես, որ՝*

$n+1$ հանգույցներ պատկանում են l_0-ին,
n հանգույցներ պատկանում են $l_1 \setminus l_0$-ին,
$\vdots$
1 հանգույց պատկանում է $l_n \setminus \{l_0 \cup l_1 \cup ... \cup l_{n-1}\}$-ին:

Թեորեմ 2.1.2. *Բեկոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայով կառուցված բազմությունը n–ճշգրիտ է:*

Ճշգրիտ հանգույցների բազմության հաջորդ կոնստրուկցիան ներկայացնելու համար նախ դիտարկենք Չանգի և Յաոյի կողմից ներկայացված երկրաչափական բնութագրի պայմանը՝ GC_n բազմությունը (Geometrical Characterization):

Սահմանում 2.2.1 ([3], Չանգ, Յաո). *n-ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է GC_n բազմություն, եթե յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի n-ֆունդամենտալ բազմանդամ կայմված է n գծային արտադրիչներից՝*

$$p_A^* = l_1^A \dots l_n^A:$$

Այլ խոսքով GC_n բազմությունը այն բազմությունն է, որի յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է ճիշտ n ուղիղ: Այսպիսով, համաձայն Պնդում 1.3.2-ի ստանում ենք՝

Թեորեմ 2.2.2. *GC_n բազմությունը n-ճշգրիտ բազմություն է:*

GC_n բազմության համար տեղի ունի հետևյալ լեմման:

Լեմմա 2.2.3. *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը GC_n բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ի յուրաքանչյուր հանգույցի համար գոյություն ունի n ուղիղների միակ բազմություն, որը պարունակում է $\mathcal{X}$-ի մնացած հանգույցները: Մասնավորապես, նշված ուղիղներից յուրաքանչյուրն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության առնվազն երկու հանգույցներով, որոնք չեն գտնվում մնացած ուղիղների վրա:*

Այժմ կարող ենք ներկայացնել GC_n բազմությունների վերաբերյալ Գասքա–Մաեզթուի վարկածը որը կարճ անվանում են GM վարկած:

Վարկած 2.2.4 ([5], Գասքա, Մաեզթու). *Ցանկացած GC_n բազմություն պարունակում է $n+1$ համագիծ հանգույցներ:*

Այսինքն, ցանկացած GC_n բազմություն պարունակում է մաքսիմալ ուղիղ: GM վարկածին է առընչվում նաև հետևյալ կարևոր արդյունքը:

Թեորեմ 2.2.5 ([2], Քարնիսեր, Գասքա). *Եթե Գասքա–Մաեկթուի վարկածը ճիշտ է, ապա ցանկացած GC_n բազմություն պարունակում է ամենաքիչը երեք մաքսիմալ ուղիղ:*

Այս թեորեմից հետևում է, որ GC_n բազմության յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է գոնե մեկ մաքսիմալ ուղիղ:

Նյուտոնի ցանցը կամ այսպես կոչված գլխավոր ցանցը (principal lattice) հանդիսանում է GC_n պայմանին բավարարող ցանցի օրինակ: Այն ներկայացնելու համար սահմանենք

$$\mathcal{X} = \{(j,k) \in \mathbb{Z}_+^2 : j+k \le n\}$$

հանգույցների բազմությունը: Դիտարկենք ուղիղների երեք բազմություն՝ $\ell_k^{(1)}$, $\ell_k^{(2)}$ և $\ell_k^{(3)}$, $k = 0,1,...,n$, որտեղ $\ell_k^{(1)}$ ուղիղը տրվում է $x = k$ հավասարումով, $\ell_k^{(2)}$ ուղիղը՝ $y = k$

հավասարումով, իսկ $\ell_k^{(3)}$ ուղիղը՝ $x+y=k$ հավասարումով: Այսպիսով $\mathcal{X}$ բազմությունը կլինի ուղիղների երեք ընտանիքների հատման կետերի բազմություն՝

$$(j,k) = \ell_j^{(1)} \cap \ell_k^{(2)} \cap \ell_{j+k}^{(3)},\ j+k \le n :$$

Յուրաքանչյուր հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$p^*_{(j,k)} = \prod_{i=0}^{j-1} \ell_i^{(1)} \prod_{i=0}^{k-1} \ell_i^{(2)} \prod_{i=j+k+1}^{n} \ell_i^{(3)} :$$

Բերենք մի սահմանում.

Սահմանում 2.4.1. *Կասենք, որ իրարից տարբեր ուղիղները գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, եթե նրանք զույգ առ զույգ հատվում են և ոչ մի երեքը չեն անցնում միևնույն կետով:*

Այժմ կարող ենք սահմանել Չանգ-Յաոյի կոնստրուկցիան:

Սահմանում 2.4.2. *Կասենք, որ $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^2$ հանգույցների բազմությունը, որտեղ $\#\mathcal{X} = \binom{n+2}{2}$, հանդիսանում է Չանգ-Յաոյի բնական ցանց, եթե գոյություն ունեն ընդհանուր դրության մեջ գտնվող այնպիսի $n+2$ ուղիղներ, որոնց բոլոր զույգերի հատման կետերը կազմում են $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցները:*

Թեորեմ 2.4.3 ([3]). *Չանգ-Յաոյի բնական ցանցը հանդիսանում է GC_n բազմություն:*

Այստեղից սկսած կներկայացնենք ատենախոսության գիտական նորությունները: Սկսենք երկու հարթ հանրահաշվական կորերի հատման կետերի վերաբերյալ արդյունքից:

Այսուհետ սահմանենք $\kappa := \kappa(m,n) := m+n-3$: Այս բաժնի հիմնական արդյունքը հետևյալն է՝

Թեորեմ 3.1.1. *$\mathcal{X}$ բազմությունը, որտեղ $\#\mathcal{X} = mn$, $m \le n$, հանդիսանում է համապատասխանաբար m և n աստիճանի կորերի հատման կետերի բազմություն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝*
ա) κ աստիճանի ցանկացած հարթ կոր, որը պարունակում է $\mathcal{X}$-ի բոլոր հանգույցները, բացի մեկից, պարունակում է ամբողջ $\mathcal{X}$-ը,
բ) m-ից ցածր աստիճանի ոչ մի կոր չի պարունակում ամբողջ $\mathcal{X}$-ը:

Նշենք, որ ա) և բ) պայմանների անհրաժեշտությունը անմիջապես հետևում է համապատասխանաբար Քելի-Բախարախի թեորեմից (Թեորեմ 1.4.13) և Նյոթերի թեորեմի հետևանքից (Հետևանք 1.4.15): Նշենք նաև, որ ա) պայմանը նշանակում է $\mathcal{X}$ բազմության էապես κ-կախյալություն, իսկ բ)-ն՝ ըստ Պնդում 1.4.4-ի նշանկում է, որ $\mathcal{X}$ բազմությունը պարունակում է $(m-1)$-ճշգրիտ ենթաբազմություն:

Սկսենք քննարկումները հետևյալ թեորեմից՝

Թեորեմ 3.3.1. *Դիցուք σ_m-ը m աստիճանի չբերվող կոր է, իսկ mn հանգույցներ պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը ընկած է այդ կորի վրա: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝*
(ա) Եթե $\mathcal{X}$ բազմությունը κ-անկախ է, ապա այն n-լրիվ է σ_m-ի վրա,
(բ) Ենթադրենք $3 \le m \le n+2$: Եթե $\mathcal{X}$ բազմությունը n-լրիվ է σ_m-ի վրա, ապա այն κ-անկախ է:

Թեորեմ 3.3.1-ից ստանում ենք հետևյալ երկու արդյունքները՝

Հետևանք 3.3.2. *Դիցուք σ_m-ը m աստիճանի չբերվող կոր է, իսկ mn հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը ընկած է այդ կորի վրա և n-լրիվ չէ: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ բազմությունը էապես κ-կախյալ է և ցանկացած $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի համար $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմությունը κ-անկախ է:*

Պնդում 3.3.3. *Դիցուք σ_m-ը m աստիճանի կոր է, որտեղ $3 \leq m \leq n+2$, իսկ mn հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը ընկած է այդ կորի վրա և n-լրիվ չէ: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ բազմությունը էապես κ-կախյալ չէ:*

Հաջորդ երկու արդյունքները վերաբերում են m աստիճանի կորի վրա ընկած $\mathcal{X}$ բազմությանը:

Թեորեմ 3.3.4. *Դիցուք $m \leq n+2$: Այդ դեպքում ցանկացած $\mathcal{X}$ բազմություն, որն ընկած է m աստիճանի չբերվող կորի վրա և $\#\mathcal{X} \leq mn-1$, կլինի κ-անկախ:*

Հիշենք, որ σ կորը անվանում ենք ոչ դատարկ $\mathcal{X}$ բազմության նկատմամբ, եթե $\sigma \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$:

Թեորեմ 3.3.5. *Ենթադրենք σ_m-ը m աստիճանի կոր է, որը կամ բերվող չէ, կամ բերվող է այնպես, որ նրա չբերվող կոմպոնենտները դատարկ չեն $\mathcal{X} \subset \sigma_m$ բազմության նկատմամբ: Ենթադրենք նաև, որ $\#\mathcal{X} \leq mn-1$, որտեղ $m \leq n+2$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ բազմությունը էապես κ-կախյալ չէ:*

Մինչ այս բաժնի հիմնական թեորեմի ապացույցին անցնելը ապացուցում ենք ևս մի քանի պնդում $\leq mn$ հանգույց պարունակող բազմությունների վերաբերյալ:

Պնդում 3.3.6. *Դիցուք $m \leq n$: Եթե հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը էապես κ-կախյալ է և $\#\mathcal{X} \leq mn$, ապա $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները ընկած են կամ m, կամ $n-3$ աստիճանի կորի վրա:*

Պնդում 3.3.7. *Դիցուք $m \leq n$: Եթե ոչ ավել, քան mn հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը էապես κ-կախյալ է, ապա այդ բազմության բոլոր հանգույցները ընկած են m աստիճանի կորի վրա:*

Դիտողություն 3.3.8. *Ենթադրենք $m \leq n$ և mn հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունն էապես κ-կախյալ է: Ենթադրենք նաև, որ m-ից ցածր աստիճանի ոչ մի կոր չի պարունակում ամբողջ $\mathcal{X}$-ը: Դիցուք σ_m-ը Պնդում 3.3.7-ից ստացվող m աստիճանի կորն է, որը պարունակում է ամբողջ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Այդ դեպքում, եթե σ_m կորը բերվող է՝ $\sigma_m = \sigma_{m_1} \cdots \sigma_{m_s}$, որտեղ յուրաքանչյուր σ_{m_i} կոմպոնենտ ունի m_i աստիճան և բերվող չէ, ապա $\mathcal{X}$-ի ոչ մի հանգույց չի հանդիսանում σ_m-ի կոմպոնենտների հատման կետ և յուրաքանչյուր σ_{m_i} կոմպոնենտ պարունակում է $\mathcal{X}$ բազմության ճիշտ $m_i(\kappa - m + 3)$ հանգույց, որոնք էապես $(\kappa - m + m_i)$-կախյալ են:*

Վերջապես, ներկայացնենք այս բաժնի հիմնական թեորեմը:

Թեորեմ 3.3.9. *Դիցուք տրված $\mathcal{X}$ բազմությունը, որտեղ $\#\mathcal{X} = mn,\ m \leq n,$ բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*
ա) $\kappa = m+n-3$ աստիճանի ցանկացած հարթ կոր, որը պարունակում է $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները, բացի մեկից, պարունակում է ամբողջ $\mathcal{X}$-ը,
բ) m-ից ցածր աստիճանի ոչ մի կոր չի պարունակում ամբողջ $\mathcal{X}$ բազմությունը:
Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ բազմությունը հանդիսանում է համապատասխանաբար m և n աստիճանի σ_m և σ_n կորերի հատման կետերի բազմություն՝

$$\mathcal{X} = \sigma_m \cap \sigma_n: \tag{3.3}$$

Թեորեմ 3.1.1-ից և Թեորեմ 1.4.13-ից ստանում ենք՝

Հետևանք 3.4.1. *Դիցուք տրված $\mathcal{X}$ բազմությունը, որտեղ $\#\mathcal{X} = mn,\ m \leq n,$ բավարարում է հետևյալ պայմաններին:*
ա) $\mathcal{X}$ բազմությունը էապես κ-կախյալ է,
բ) $\mathcal{X}$ բազմությունը պարունակում է $(m-1)$-ճշգրիտ ենթաբազմություն:
Այդ դեպքում ցանկացած $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի համար $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմությունը κ-անկախ է:

Հաջորդ գլխում ուսումնասիրում ենք n-կախյալ բազմությունների բնութագրումը սանդղակով, որի առաջին երեք դեպքերը հանդիսանում են Թեորեմ 1.3.12-ը, Թեորեմ 1.3.13-ը և Թեորեմ 1.3.14-ը:

Համադրելով նախորդ գլխում ձևակերպած Թեորեմ 3.3.5-ը և Պնդում 3.3.7-ը ստանում ենք հետևյալը՝

Պնդում 4.1.1. *Ենթադրենք $\mathcal{X}$-ը էապես κ-կախյալ բազմություն է և $\#\mathcal{X} \leq m(\kappa - m + 3) - 1,$ որտեղ $m \leq \frac{\kappa+3}{2}$: Այդ դեպքում գոյություն ունի r թիվ, $1 \leq r \leq m-1$ և r աստիճանի σ_r կոր այնպես, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝*

1. *$\#\mathcal{X} \geq r(\kappa - r + 3),$*
2. *σ_r-ը պարունակում է ամբողջ $\mathcal{X}$-ը,*
3. *Գոյություն չունի $\mathcal{X}$-ը պարունակող r-ից ցածր աստիճանի կոր:*

Այժմ ներկայացնենք այս բաժնի գլխավոր արդյունքը:

Թեորեմ 4.1.2. *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը հանգույցների բազմություն է և $\#\mathcal{X} \leq m(\kappa - m + 3) - 1,$ որտեղ $m \leq \frac{\kappa+3}{2}$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ը κ-կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի r թիվ, որտեղ $1 \leq r \leq m-1,$ էապես κ-կախյալ ենթաբազմություն $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X},\ \#\mathcal{Y} \geq r(\kappa - r + 3),$ այնպես, որ $\mathcal{Y}$ բազմությունն ընկած է r աստիճանի կորի վրա և ընկած չէ որևէ այլ, r-ից փոքր աստիճան ունեցող կորի վրա:*
Ավելին, եթե $\#\mathcal{Y} = r(\kappa - r + 3),$ ապա ունենք, որ $\mathcal{Y}$ բազմությունը համընկնում է որևէ երկու, համապատասխանաբար r և $\kappa - r + 3$ աստիճան ունեցող կորերի հատման կետերի հետ:

Ձևակերպենք Թեորեմ 4.1.2-ը մասնավոր դեպքերում՝ $m = 1, 2, 3, 4$:
Դեպք $m = 1$:
Ոչ ավել քան $\kappa + 1$ հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը κ-կախյալ չէ:
Սա համարժեք է Թեորեմ 1.3.12-ին:

Դեպք $m = 2$:
Ոչ ավել, քան $2\kappa + 1$ հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը κ-կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$ բազմության $\kappa + 2$ հանգույց համագիծ են:
Այս դեպքը համարժեք է Թեորեմ 1.3.13-ին:

Դեպք $m = 3$:
Ոչ ավել, քան $3\kappa - 1$ հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը κ-կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից գոնե մեկը.

1. *$\mathcal{X}$ բազմության $\kappa + 2$ հանգույց ընկած են ուղղի վրա,*
2. *$\mathcal{X}$ բազմության $2\kappa + 2$ հանգույց ընկած են կոնիկի վրա:*

Դեպք $m = 4$:
Ոչ ավել, քան $4\kappa - 5$ հանգույց պարունակող $\mathcal{X}$ բազմությունը κ-կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից գոնե մեկը.

1. *$\mathcal{X}$ բազմության $\kappa + 2$ հանգույց ընկած են ուղղի վրա,*
2. *$\mathcal{X}$ բազմության $2\kappa + 2$ հանգույց ընկած են կոնիկի վրա,*
3. *$\#\mathcal{X} = 3\kappa$ և $\mathcal{X}$ բազմությունը համընկնում է երկու, համապատասխանաբար 3 և κ աստիճանի կորերի հատման կետերի հետ,*
4. *$\mathcal{X}$ բազմության ավելի քան 3κ հանգույց ընկած են կուբիկի վրա:*

Վերջապես, այս պնդումը ընդհանրացնում է Թեորեմ 1.3.14-ը:

Վերջին գլխում ուսումնասիրում ենք n-անկախ հանգույցներով անցնող հարթ հանրահաշվական կորերը: Նախ բերենք հայտնի արդյունքների մի շարք, որի տրամաբանական շարունակությունը այս գլխի հիմնական արդյունքն է:

Թեորեմ 5.1.1 ([13], Թեորեմ 1). *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը $d(n, k-1) + 2$ հանգույցների n-անկախ բազմություն է ընկած k աստիճանի կորի վրա, որտեղ $k \le n$: Այդ դեպքում կորը միարժեքորեն որոշվում է այդ հանգույցներով:*

Այս շարքի երկրորդ արդյունքը հետևյալն է՝

Թեորեմ 5.1.2 ([14], Թեորեմ 4.2). *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը $d(n, k-1) + 1$ հանգույցների n-անկախ բազմություն է, որտեղ $2 \le k \le n - 1$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ով կարող են անցնել ամենաշատը երկու հատ $\le k$ աստիճանի գծորեն անկախ կորեր: Ավելին՝ $\mathcal{X}$ բազմության համար գոյություն ունեն երկու այդպիսի կորեր այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները բացի մեկից ընկած են $k-1$ աստիճանի մաքսիմալ կորի վրա:*

Հաջորդ արդյունքը հետևյալն է՝

Թեորեմ 5.1.3 ([9], Թեորեմ 3). *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը $d(n, k-2) + 2$ հանգույցների n-անկախ բազմություն է, որտեղ $3 \le k \le n - 1$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ով կարող են անցնել ամենաշատը չորս հատ $\le k$ աստիճանի գծորեն անկախ կորեր: Ավելին՝ $\mathcal{X}$ բազմության համար գոյություն ունեն չորս այդպիսի կորեր այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները բացի երկուսից ընկած են k–2 աստիճանի մաքսիմալ կորի վրա:*

Այժմ ներկայացնենք այս բաժնի գլխավոր արդյունքը:

Թեորեմ 5.2.1. *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը $d(n, k-3)+3$ հանգույցների n-անկախ բազմություն է, որտեղ $4 \leq k \leq n-1$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ով կարող են անցնել ամենաշատը յոթ հատ $\leq k$ աստիճանի գծորեն անկախ կորեր: Ավելին՝ $\mathcal{X}$ բազմության համար գոյություն ունեն յոթ այդպիսի կորեր այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները բացի երեքից ընկած են $k-3$ աստիճանի մաքսիմալ կորի վրա:*

Արժե նշել, որ Թեորեմ 5.2.1-ի ապացույցի ընթացքում ապացուցվում է նաև Թեորեմ 5.1.3-ի հետևյալ հետաքրքիր տարբերակը, որտեղ հանգույցների քանակը ավելացվում է մեկով, իսկ կորերի քանակը՝ պակասեցվում մեկով:

Թեորեմ 5.2.2. *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը $d(n, k-2)+3$ հանգույցների n-անկախ բազմություն է, որտեղ $3 \leq k \leq n-2$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ով կարող են անցնել ամենաշատը երեք հատ $\leq k$ աստիճանի գծորեն անկախ կորեր: Ավելին՝ $\mathcal{X}$ բազմության համար գոյություն ունեն երեք այդպիսի կորեր այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները ընկած են k–1 աստիճանի կորի վրա, կամ բոլոր հանգույցները բացի երեքից ընկած են k–2 աստիճանի մաքսիմալ կորի վրա:*

Մինչ Թեորեմ 5.2.1-ի ապացույցը, կատարում ենք մեծ քանակի նախնական աշխատանք:

Լեմմա 5.3.1. *Ենթադրենք Թեորեմ 5.2.1-ի պայմանները տեղի ունեն և ենթադրենք նաև, որ գոյություն ունի $\sigma_0 \in \Pi_{k-2}$ կոր, որն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները բացի երեքից (որոնք համագիծ են) ընկած են $k-3$ աստիճանի մաքսիմալ կորի վրա:*

Հաջորդ արդյունքը ապացուցում ենք մաթեմատիկական անալիզի մեթոդներով:

Պնդում 5.3.2. *Ենթադրենք $p_1, p_2 \in \Pi$, $\deg p_2 \leq \deg p_1 + 1$ և p_1 բազմանդամը չունի պատիկ կոմպոնենտներ: Այդ դեպքում բավականաչափ փոքր ϵ-ի համար $p_1 + \epsilon p_2$ բազմանդամը նույնպես չունի պատիկ կոմպոնենտներ:*

Հաջորդ երկու արդյունքները հնարավորություն են տալիս Թեորեմ 5.2.1-ի պայմանները դարձնել ավելի ճշգրիտ:

Պնդում 5.3.4. *Ենթադրենք գոյություն ունեն յոթ գծորեն անկախ բազմանդամներ Π_k-ից, որոնք պրո են Թեորեմ 5.2.1-ում տրված $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներում: Այդ դեպքում կամ գոյություն ունեն յոթ գծորեն անկախ բազմանդամներ, որոնք պրո են $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներում, ճիշտ k աստիճանի են և չունեն պատիկ կոմպոնենտներ, կամ գոյություն ունեն երեք գծորեն անկախ բազմանդամներ Π_{k-1}-ից, որոնք պրո են $\mathcal{X}$-ի բոլոր հանգույցներում:*

Պնդում 5.3.5. *Ենթադրենք $\sigma_i,\ i = 0, \ldots, 6,$ ճիշտ k աստիճանի գծորեն անկախ բազմանդամներ են և չունեն պատիկ կոմպոնենտներ: Այդ դեպքում σ_i-երի գծային թաղանթում, $i = 1, \ldots, 6$, գոյություն ունի բազմանդամ, որը չունի պատիկ կոմպոնենտներ և σ_0-ից տարբերվում է ամենաքիչը երրորդ աստիճանի արտադրիչով:*

Այս բաժնի հիմնական թեորեմի ապացույցից առաջ ցույց ենք տալիս, որ Թեորեմ 5.2.1-ի պայմանների դեպքում գոյություն ունեն $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցներով անցնող երեք հատ $k-1$ աստիճանի կորեր:

Պնդում 5.4.1. *Ենթադրենք տեղի ունի Թեորեմ 5.2.1-ի պայմանները: Այդ դեպքում գոյություն ունեն գծորեն անկախ $k-1$ աստիճանի երեք կոր, որոնք անցնում են $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով:*

Վերջապես ներկայացնենք Թեորեմ 5.2.1-ի կիրառությունը երկու փոփոխականի միջարկման մեջ:

Հետևանք 5.7.1. *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը հանգույցների n-ճշգրիտ բազմություն է, իսկ ℓ-ն ուղիղ է, որն անցնում է այդ բազմության ճիշտ 5 հանգույցներով: Այդ դեպքում ℓ-ը կարող է օգտագործվել $\mathcal{X}$ բազմության ամենաշատը տասը հանգույցների կողմից: Ավելին, եթե ℓ-ն օգտագործվում է $\mathcal{X}$ բազմության գոնե յոթ հանգույցների կողմից, ապա այն օգտագործվում է ճիշտ տասը հանգույցների կողմից: Բացի այդ, եթե այն օգտագործվում է տասը հանգույցների կողմից, ապա այդ հանգույցները կազմում են 3-ճշգրիտ բազմություն: Վերջին դեպքում եթե $\mathcal{X}$-ը GC_n բազմություն է, ապա տասը հանգույցները նույնպես կազմում են GC_3 բազմություն:*

Նշենք, որ $2, 3, 4$ հանգույցներով անցնող ուղիղների դեպքում համանման արդյունքները ապացուցվել են Խ. Քարնիսերի և Մ. Գասքայի, Հ. Հակոբյանի և Ս. Թորոյանի, Հ. Հակոբյանի և Հ. Քլոյանի կողմից, համապատասխանաբար:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՏԱՐԱԿԱԾ ԱՇԽԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

[1*] Hakopian H., Voskanyan D., On the Intersection Points of Two Plane Algebraic Curves. J. Contemp. Mathemat. Anal. 54, 90–97 (2019).

[2*] Hakopian H., Voskanyan D., On the Set of Solutions of Polynomial Systems. International Conference Constructive Theory of Functions - 2019, Abstracts, 34 (2019).

[3*] Voskanyan D., On a Scale of Criteria on n-dependence. J. Contemp. Mathemat. Anal. 56, 5–8 (2021).

[4*] Hakopian H., Kloyan H., Voskanyan D., On Plane Algebraic Curves Passing Through n-independent Nodes. J. Contemp. Mathemat. Anal. 56, 280–294 (2021).

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] L. Berzolari, Sulla determinazione di una curva o di una superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione, Rendiconti del R. Inst. Lombardo, Series (2), 47 (1914), 24.

[2] Carnicer J.M., Gasca M., On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation. In: *Curve and Surface Design* (2002), 21–30.

[3] K. C. Chung, T. H. Yao, On lattices admitting unique Lagrange representations, SIAM J. Numer. Anal., 14, (1977), 735–743.

[4] D. Eisenbud, M. Green, and J. Harris, Cayley-Bacharach theorems and conjectures, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 33(3) (1996) 295–324.

[5] M. Gasca and J. I. Maeztu, On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$, Numer. Math. 39 (1982) 1–14.

[6] Hakopian H., On the regularity of multivariate Hermite interpolation. *J. Approx. Theory*, 105 (2000), 1-18.

[7] H. Hakopian, K. Jetter, and G. Zimmermann, Vandermonde matrices for intersection points of curves, Jaén J. Approx. 1 (2009) 67–81.

[8] H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann, The Gasca-Maeztu conjecture for $n = 5$, Numer. Math. 127 (2014) 685–713.

[9] Hakopian H., Kloyan H., On the dimension of spaces of algebraic curves passing through n-indepent nodes. *Proceedings of YSU. Physical and Mathematical Sciences*, no. 2 (2019), 3–13.

[10] H. Hakopian and A. Malinyan, Characterization of n-independent sets with no more than $3n$ points, Jaén J. Approx. 4 (2012) 119–134.

[11] H. Hakopian and A. Malinyan, On n-independent sets located on quartics Proceedings of YSU, Phys. and Math. Sci. 1 (2013) 6–12.

[12] H. Hakopian and G. Mushyan, On Multivariate Segmental Interpolation Problem, J. Comp. Sci. Appl. Math. 1 (2015) 19–29.

[13] Hakopian H., Toroyan S., On the minimal number of nodes determining uniquelly algebraic curves. *Proceedings of YSU. Physical and Mathematical Sciences*, no. 3 (2015), 17–22.

[14] Hakopian H., Toroyan S., On the Uniqueness of algebraic curves passing through n-independent nodes. *New York J. Math.*, 22 (2016), 441–452.

[15] J. Radon, Zur mechanischen Kubatur, Monatsh. Math. 52 (1948), 286–300.

[16] L. Rafayelyan, Poised nodes set constructions on algebraic curves, East J. Approx. 17(3) (2011) 285–-298.

[17] Severi, F.: Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Teubner, Berlin (1921). (Translation into German - E. Löffler)

[18] Walker R. J., *Algebraic Curves,* Princeton, New Jersey, 1950.

Заключение

Многомерная полиномиальная интерполяция является одним из основных предметов теории приближений и численного анализа. В отличие от одномерного случая, в многомерной интерполяции существование и единственность интерполяционного многочлена Лагранжа зависят не только от количества узлов, но и от геометрического распределения узлов интерполяции. В настоящей диссертации доказываются некоторые важные результаты, касающиеся плоских алгебраических кривых и разрешимости интерполяционной задачи.

Пусть Π_n есть пространство многочленов двух переменных суммарной степени, не превышающей n, а $\mathcal{X}$ есть множество узлов интерполяции. Назовем многочлен $p \in \Pi_n$ фундаментальным для узла $A \in \mathcal{X}$, если он обращается в ноль во всех узлах $\mathcal{X}$, кроме A. Скажем, что узел $A \in \mathcal{X}$ использует прямую ℓ, если ℓ является множителем фундаментального многочлена для A.

Множество узлов $\mathcal{X}$ называется n–корректным, если существует единственный многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям интерполяции. Множество узлов $\mathcal{X}$ называется n-независимым, если существуют все его фундаментальные многочлены, что эквивалентно разрешимости интерполяционной задачи. В противном случае множество называется n-зависимым. Множество точек $\mathcal{X}$ называется существенно n-зависимым, если ни одна из его точек не имеет n-фундаментального многочлена.

Рассматриваются специальные n–корректные множества, называемые GC_n множествами, для которых n–фундаментальный многочлен каждого узла является произведением n линейных множителей. Другими словами, каждый узел GC_n множества использует ровно n прямых.

Обозначим $\kappa = \kappa(m, n) = m + n - 3$.

Сначала мы, совместно с А. Акопяном, характеризуем точки пересечения двух плоских алгебраических кривых. Мы доказываем следующую теорему.

<u>*Теорема.*</u> Множество $\mathcal{X}$, где $\#\mathcal{X} = mn$, $m \leq n$, является множеством точек пересечения некоторых двух плоских алгебраических кривых степеней m и n соответственно, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

a) любая кривая степени κ содержащая все, кроме одной, точки из $\mathcal{X}$, содержит все точки множества $\mathcal{X}$;

b) ни одна кривая степени меньше, чем m, не содержит все точки множества $\mathcal{X}$.

Отметим, что необходимость условий a) и b) следует из теорем Кэли-Бахараха и Нётера соответственно. Отметим также, что приведенное выше условие a) означает, что множество точек $\mathcal{X}$ существенно κ-зависимо, а условие b) означает, что множество $\mathcal{X}$ содержит $(m - 1)$-корректное подмножество.

В следующей главе мы обобщаем некоторые известные результаты о n-зависимых множествах. Мы доказываем следующее утверждение.

<u>*Теорема.*</u> Множество $\mathcal{X}$, содержащее не более, чем $mn - 1$ точек, где $m \leq n$, является n-зависимым тогда и только тогда, когда существует число r, $1 \leq r \leq m - 1$ и

существенно κ-зависимое подмножество $\mathcal{Y} \in \mathcal{X}$ где $\#\mathcal{Y} \geq \mathrm{rs}$ и $\mathrm{r}+\mathrm{s}-3=\kappa$, которое принадлежит некоторой алгебраической кривой степени r и не принадлежит ни одной кривой степени меньше r. Более того, если $\#\mathcal{Y}=rs$, то множество $\mathcal{Y}$ является множеством точек пересечения некоторых двух кривых степеней r и s соответственно.

Отметим, что случаи $m = 1,3$ и 4 являются известными результатами.

В случае $m = 1$ получаем теорему Севери, согласно которой любое множество $\mathcal{X}$, состоящее из $\leq \kappa+1$ точек, является κ-независимым.

При $m=3$ получаем теорему Эйзенбада, Грина и Харриса, утверждающую, что множество $\mathcal{X}$, состоящее из $\leq 2\kappa+2$ точек, κ-зависимо тогда и только тогда, когда либо $\kappa+2$ точки $\mathcal{X}$ коллинеарны, либо $2\kappa+2$ точки принадлежат некоторой конике.

Наконец, если $m=4$, мы получаем теорему А. Акопяна и А. Малиняна, согласно которой множество $\mathcal{X}$, состоящее из $\leq 3\kappa$ точек, κ-зависимо тогда и только тогда, когда либо $\kappa+2$ точки $\mathcal{X}$ коллинеарны, либо $2\kappa+2$ точки принадлежат некоторой конике, либо $\#\mathcal{X}=3\kappa$ и $\mathcal{X}$ совпадает с точками пересечения некоторых двух алгебраических кривых степеней 3 и κ.

В последней главе мы, совместно с А. Акопяном и А. Клояном, характеризуем размерность кривых, проходящих через данные n-независимые узлы.

Пусть $d(n,k) = (\mathrm{n}+1)+\mathrm{n}+\ldots+(\mathrm{n}-\mathrm{k}+2)$. Кривая степени $k<n$, проходящая через $d(n,k)$ n-независимых точек, называется максимальной.

Теорема. Пусть множество точек $\mathcal{X}$ n-независимо. Предположим, что $\#\mathcal{X} = \mathrm{d}(\mathrm{n},\mathrm{k}-3)+3$ и $4 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}-1$. Тогда существуют не более семи линейно независимых кривых степени $\leq k$, которые проходят через все узлы $\mathcal{X}$. Более того, существуют точно семь таких кривых тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ имеет очень специальную конструкцию: все его узлы, кроме трех, принадлежат максимальной кривой степени $k-3$.

Отметим, что в серии таких результатов это третий. Первый результат принадлежит А. Акопяну и С. Тороян, а второй результат А. Акопяну и А. Клояну.

В конце дается следующее важное приложение к теории двумерной полиномиальной интерполяции, которое также важно и для изучения гипотезы Гаски-Маэзту.

Следствие. Пусть $\mathcal{X}$ есть n–корректное множество узлов, а ℓ - прямая, которая проходит через ровно пять узлов множества $\mathcal{X}$. Тогда ℓ может использоваться не более чем десятью узлами из $\mathcal{X}$. Более того, если прямая ℓ используется по крайней мере семью узлами из $\mathcal{X}$, то она используется ровно десятью узлами из $\mathcal{X}$. Более того, если имеет место последний случай, то эти узлы образуют 3-корректное множество. Далее, если $\mathcal{X}$ является множеством GC_n, то эти десять узлов образуют множество GC_3.

Отметим, что аналогичные результаты в случае прямых, проходящих через 2,3 и 4 точки, принадлежат Х. Карнисеру и М. Гаска, А. Акопяну и С. Тороян, А. Акопяну и А. Клояну, соответственно.

Summary

Multivariate polynomial interpolation is one of the basic subjects of Numerical Analysis and Approximation Theory. In contrast to the univariate case, in multivariate interpolation the existence and uniqueness of the Lagrange interpolation polynomial depend not only on the number of nodes but also on the geometrical distribution of the interpolation nodes. In this thesis we show some important results regarding plane algebraic curves and solvability of interpolation problem.

Let Π_n be the space of bivariate polynomials of total degree at most n and $\mathcal{X}$ be a planar set of interpolation nodes. A polynomial $p \in \Pi_n$ is called n-fundamental for the node $A \in \mathcal{X}$, if it vanishes at all the nodes of $\mathcal{X}$ but A. A node $A \in \mathcal{X}$ uses a line ℓ means that ℓ is a factor of the fundamental polynomial of A.

A set of nodes $\mathcal{X}$ is called n–poised, if there exists a unique polynomial $p \in \Pi_n$, satisfying the interpolation conditions. A set $\mathcal{X}$ is called n-independent if all its fundamental polynomials exist, or equivalently the interpolation problem is solvable. Otherwise, it is called n-dependent. A set of points $\mathcal{X}$ is called essentially n-dependent, if none of its points has an n-fundamental polynomial.

A special type of n-poised sets are GC_n sets for which the n-fundamental polynomial of each node is a product of n linear factors. In other words, GC_n sets are the sets each node of which uses exactly n lines.

Let us denote $\kappa = \kappa(m, n) = m + n - 3$.

First, together with H. Hakopian, we characterize the intersection points of two plane algebraic curves. We prove the following

Theorem. A set $\mathcal{X}$, with $\#\mathcal{X} = mn$, $m \leq n$, is the set of intersection points of some two plane algebraic curves of degrees m and n, respectively, if and only if the following conditions are satisfied:

a) Any curve of degree κ containing all but one point of $\mathcal{X}$, contains all of $\mathcal{X}$;

b) No curve of degree less than m contains all of $\mathcal{X}$.

Let us mention that the necessity of the conditions a) and b) follow from the Ceyley-Bacharach and Noether theorems, respectively. Note also that the condition a) above means that the point set $\mathcal{X}$ is essentially κ-dependent, while the condition b) means that the set $\mathcal{X}$ contains an $(m - 1)$-poised subset.

In the next chapter we generalize some well-known results on n-dependence of point sets. We prove the following

Theorem. A set $\mathcal{X}$ of at most $mn - 1$ points, where $m \leq n$, is κ-dependent, if and only if there exists a number r, $1 \leq r \leq m - 1$, and an essentially κ-dependent subset $\mathcal{Y} \in \mathcal{X}$, where

$\#\mathcal{Y} \geq \mathrm{rs}$ and $\mathrm{r}+\mathrm{s}-3=\kappa$, which belongs to an algebraic curve of degree r, and does not belong to any curve of degree less than r. Moreover, if $\#\mathcal{Y}=\mathrm{rs}$ then the set $\mathcal{Y}$ coincides with the set of intersection points of some two curves of degrees r and s, respectively.

Let us mention that the cases $\mathrm{m}=1,3,4$ are well-known results.

In the case $\mathrm{m}=1$ we obtain the Severi Theorem, according to which any set $\mathcal{X}$ consisting of $\leq \kappa+1$ points is κ-independent.

In the case of $\mathrm{m}=3$, we obtain the Eisenbud, Green, and Harris Theorem, stating that a set $\mathcal{X}$ of $\leq 2\kappa+1$ points is κ-dependent if and only if either $\kappa+2$ points of $\mathcal{X}$ are collinear, or $2\kappa+2$ points belong to a conic.

Finally, in the case of $\mathrm{m}=4$ we get the Hakopian and Malinyan Theorem, according to which a set $\mathcal{X}$ of $\leq 3\kappa$ points is κ-dependent if and only if either $\kappa+2$ points of $\mathcal{X}$ are collinear, or $2\kappa+2$ points belong to a conic, or $\#\mathcal{X}=3\kappa$ and $\mathcal{X}$ coincides with the set of intersection points of some two algebraic curves of degrees 3 and κ, respectively.

In the last chapter, together with H. Hakopian and H. Kloyan, we characterize the dimension of algebraic curves passing through n-independent nodes.

Let $d(n,k)=(\mathrm{n}+1)+\mathrm{n}+\ldots+(\mathrm{n}-\mathrm{k}+2)$. A curve of degree $k<n$ passing through $d(n,k)$ n-independent nodes is called maximal.

__Theorem.__ Assume that $\mathcal{X}$ is an n-independent set of $d(n,k-3)+3$ nodes with $4 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}-1$. Then at most seven linearly independent curves of degree $\leq \mathrm{k}$ may pass through all the nodes of $\mathcal{X}$. Moreover, there are seven such curves for the set $\mathcal{X}$ if and only if all the nodes of $\mathcal{X}$ but three lie in a maximal curve of degree $\mathrm{k}-3$.

Let us mention that in a series of similar results this is the third one. The first result belongs to H. Hakopian and S. Toroyan, and the second one to H. Hakopian and H. Kloyan.

At the end, the following important application to the theory of bivariate polynomial interpolation is provided, which is important also for the study of the Gasca-Maeztu conjecture.

__Corollary.__ Let $\mathcal{X}$ be an n-poised set of nodes and ℓ be a line which passes through exactly five nodes. Then ℓ can be used at most by ten nodes from $\mathcal{X}$. Moreover, if ℓ is used by at least seven nodes from $\mathcal{X}$ then it is used by exactly ten nodes. Furthermore, if it is used by ten nodes, then they form a 3-poised set. In the latter case, if $\mathcal{X}$ is a GC_n set then the ten nodes form a GC_3 set.

Note that similar results in the case of lines passing through $2,3,4$ nodes belong to J. Carnicer and M. Gasca, H. Hakopian and S. Toroyan, H. Hakopian and H. Kloyan, respectively.