ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԿՌՈՅԱՆ ԱՐՓԵՆԻԿ ԿՈԼՅԱՅԻ

# ՈՐՈՇ ԴԱՍԵՐԻ ՓԱԹԵԹԱՅԻՆ ՏԻՊԻ ՈՉ ԿՈՄՊԱԿՏ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐՈՎ ԾՆՎՈՂ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

Ա.01.02 - «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, Մաթեմատիկական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

**Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր**

ԵՐԵՎԱՆ 2022

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

КРОЯН АРПЕНИК КОЛЯЕВНА

# ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЕРТОЧНОГО ТИПА, ПОРОЖДАЕМЫЕ НЕКОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.02 - "Дифференциальные уравнения и Математическая физика"

Ереван 2022

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հ Ա Պ Հ -ի գիտական խորհրդի հ. 24 նիստում (28.11.2019թ):

Գիտական ղեկավար՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Խ. Խաչատրյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Տ. Ն. Հարությունյան

- գիտության դոկտոր (PhD) Ա. Ժ. Նարիմանյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ - Հայ - Ռուսական Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2022թ. հունվարի 19-ին ժամը 15:00-ին, Հայաստանի Ազգային Պոլիտեխնիկական Համալսարանում գործող 053 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե՝ ք.Երևան, 0009, փ. Տերյան 105, 12 մասնաշենք:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Հ Ա Պ Հ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2021թ. դեկտեմբերի 8-ին:

053 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր՝ Ա. Հ. Բաբայան

---

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета НПУА (№24, 28.11.2019г).

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук, профессор А.Х. Хачатрян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук, профессор Т.Н. Арутюнян

- доктор наук (PhD) А.Ж. Нариманян

Ведущая организация - Российско – Армянский Университет

Защита диссертации состоится 19-го января 2022г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 053, действующего в Национальном политехническом университете Армении

Адрес: г. Ереван, 0009, ул. Теряна 105, 12-й корпус.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НПУА.

Автореферат разослан 8-го декабря 2021г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор А.О. Бабаян

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В настоящее время одним из бурно развивающихся направлений современной теоретической физики является теория $p-$адических струн, которая изучает взаимодействие растянутых объектов, так называемых квантовых струн длиной $10^{-35}$ м. Эта теория претендует создать единую теорию поля. Физические задачи, описывающие взаимодействие $p-$адических струн, сводятся к исследованию некоторых классов нелинейных псевдо-дифференциальных уравнений сверточного типа, интегральный оператор которых не обладает свойством компактности. Как правило, эти уравнения обладают тривиальными решениями и возникает необходимость в построении нетривиальных решений. Существенный вклад в вопросы разрешимости этих уравнений внесли В.С. Владимиров, И.Я. Арефьева, И.В. Волович, Л.В. Жуковская, П.Г. Фрамптон, Н.Б. Енгибарян, Х.А. Хачатрян, Л.Г. Арабаджян, А.Х. Хачатрян и др.

Н.Б. Енгибаряном был сформулирован общий принцип построения неподвижной точки для некомпактных операторов (см. [6]). Л.Г. Арабаджяном доказано существование решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна (см. [2]).

В.С. Владимировым были изучены вопросы существования непрерывных знакопеременных и ограниченных решений однородных нелинейных интегральных уравнений с гауссовским ядром и со степенной нелинейностью (см. [3]). Однако вопрос единственности таких решений, а также исследование соответствующих уравнений с общими ядрами и общей монотонной нелинейностью долгое время оставались открытыми (см. [3]–[5], [7]).

Х.А. Хачатряном были доказаны теоремы существования и единственности граничных задач для нелинейных интегральных уравнений со степенной нелинейностью и с общим суммируемым на $\mathbb{R}$ ядром, тем самым были обобщены результаты работ В.С. Владимирова (см. [8]).

А.Х. Хачатряном и Х.А. Хачатряном исследованы также более общие интегральные уравнения с монотонной и выпуклой нелинейностью, обобщающие результаты работ Л.В. Жуковской (см. [9]).

Итак, вопросы существования и единственности решения, а также изучение свойств построенных решений для вышеуказанных нелинейных интегральных уравнений и их дискретных аналогов являются весьма актуальными.

**Цель работы.** Целью настоящей диссертационной работы является доказательство теорем существования решений, а также изучение качественных свойств (монотонность, непрерывность, ограниченность, асимптотическое поведение и.т.д.) построенных решений для некоторых нелинейных интегральных уравнений и их дискретных аналогов.

**Методы исследования.** В работе использовались методы теории интегральных уравнений типа свертки, специальные итерационные методы, методы построения инвариантных конусных отрезков для соответствующих нелинейных операторов, методы теории функций вещественной переменной, методы нелинейного анализа, методы теории матриц.

**Научная новизна.** Все результаты, полученные в диссертации являются новыми, обоснованы строгими математическими доказательствами.

**Практическая значимость.** Результаты, полученные в диссертации имеют теоретический и практический интерес, и могут быть использованы в задачах динамической теории $p-$адических струн, в математической теории географического распространения эпидемии, в космологии.

**Основные положения, выносимые на защиту.** Автором выносятся на защиту следующие положения:

- доказано существование нетривиального, непрерывного, нечетного и ограниченного решения для одного класса интегральных уравнений на всей прямой со степенной нелинейностью, получены интегральные оценки решения рассматриваемого уравнения, установлена единственность построенного решения в определенном классе непрерывных функций, построены примеры ядер интегральных уравнений, удовлетворяющих условиям сформулированных теорем,

- доказана теорема существования нечетного решения для граничной задачи с сингулярным интегральным уравнением типа свертки на всей числовой оси со степенной нелинейностью, изучена асимптотика построенного решения,

- доказана теорема существования положительного решения в пространстве $l_1$ для одного класса нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами Теплица,

- доказана теорема существования покомпонентно неотрицательных и ограниченных решений для одной системы интегральных уравнений с монотонной и выпуклой нелинейностью на положительной части числовой прямой, изучено асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности, приведены конкретные примеры систем для иллюстрации полученных результатов.

**Апробация полученных результатов.** Результаты диссертации докладывались на международных конференциях математического института имени В.А. Стеклова, на научных семинарах кафедры дифференциальных уравнении ЕрГУ, на научных семинарах отдела методов математической физики Института Математики НАН Армении, на семинарах кафедры высшей математики и физики Армянского Национального Аграрного университета.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 4 научных статьях, список которых приведен в конце автореферата. Работы опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в базу ВАК, два из которых входят в базу данных *Scopus*.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация изложена на 75 страницах, состоит из введения, двух глав, содержания, 13 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 95 наименований.

# Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов и изложено краткое содержание диссертации.

**Первая глава** диссертации посвящена изучению двух классов интегральных уравнений на всей прямой со степенной нелинейностью. Эти уравнения имеют непосредственное применение в теории $p-$адических открыто-замкнутых струн.

В §1 первой главы рассматривается следующее нелинейное интегральное уравнение на всей прямой:

$$\varphi^p(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(|x|,|t|)\, K(x-t)\, \varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

относительно искомой нечетной и непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(x)$. Здесь $p > 2$ — произвольное нечетное число, а функции $\lambda$ и $K$ обладают следующими свойствами:

$$\lambda \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+), \quad K \in C(\mathbb{R}), \qquad \mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty), \tag{2}$$

$$K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}), \quad K(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1, \tag{3}$$

$$K(-x) = K(x),\ x \in \mathbb{R}^+, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt < +\infty,\ K(x) \downarrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

$$0 \leq \lambda(x,t) \leq 1,\ (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (1 - \lambda(x,t))dt < +\infty. \tag{5}$$

Наряду с уравнением (1) рассматривается следующее вспомогательное линейное однородное уравнение Вольтерра:

$$\mathscr{B}(x) = \int\limits_{x}^{\infty} \lambda(x,t)(V(t-x) - V(x+t))\, \mathscr{B}(t)\, dt,\ \ x \in \mathbb{R}^+ \tag{6}$$

относительно функции $\mathscr{B}(x)$, где

$$V(\tau) = 2K(\tau),\ \ \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Имеет место следующая лемма

**Лемма 1.1.** *При выполнении условий* (2)–(5) *уравнение* (6) *обладает неотрицательным нетривиальным непрерывным и ограниченным на полуоси* $\mathbb{R}^+$ *решением* $\mathscr{B}(x)$ *с асимптотикой в бесконечности* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathscr{B}(x) = 1$.

С использованием Леммы 1.1 доказывается следующая теорема существования неотрицательного решения уравнения (1).

**Теорема 1.1.** *Если выполнены условия* (2)–(5)*, то уравнение* (1) *обладает нетривиальным нечетным непрерывным и ограниченным решением на всей числовой оси* $\mathbb{R}$*, причем*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \pm 1.$$

Более того, если для функции $K$ имеет место строгое неравенство: $K(\tau) > 0,\ \tau \in \mathbb{R}$, то

$$1 - \varphi \in L_1(0, +\infty),\ \ 1 + \varphi \in L_1(-\infty, 0).$$

Прямой проверкой можно убедиться, что если $f(x)$ — непрерывное на $\mathbb{R}^+$ решение следующего нелинейного интегрального уравнения:

$$f^p(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda(x,t)\,(K(x-t) - K(x+t))\, f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{7}$$

то

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{если } x \geq 0, \\ -f(-x), & \textit{если } x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

— нечетное и непрерывное решения уравнения (1).

Далее рассматривается следующее интегральное уравнение Гаммерштейна–Вольтерра со степенной нелинейностью:

$$h(x) = \int_x^\infty \lambda(x,t)(K(t-x) - K(t+x))\, h^\alpha(t)\, dt, \ \ x \in \mathbb{R}^+ \tag{9}$$

относительно искомой функции $h(x)$. Имеют место следующие леммы

**Лемма 1.2.** *При выполнении условий теоремы 1.1 уравнение* (9) *обладает неотрицательным непрерывным и ограниченным решением* $h(x)$.

**Лемма 1.3.** *Если выполнены условия леммы 1.2, и функция* $\lambda$ *— монотонно неубывающая по совокупности переменных, то для уравнения* (9) *построенное решение* $h(x)$ *— также монотонно неубывающее, причем имеет место следующее неравенство снизу*:

$$h^{\frac{p-1}{p}}(x) \geq \lambda(x,x)\left(\frac{1}{2} - Q(2x)\right), \ \ x \in \mathbb{R}^+, \tag{10}$$

где

$$Q(\tau) \equiv \int_\tau^\infty K(u)\, du, \ \ \tau \in \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

**Лемма 1.4.** *При условиях леммы 1.3 для решения* $S(x)$ *уравнения*

$$S(x) = \int_0^\infty \lambda(x,t)(K(x-t) - K(x+t))\, S^\alpha(t)\, dt, \ \ x \in \mathbb{R}^+ \tag{12}$$

$$\alpha = \frac{1}{p} \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

*построенного при помощи итераций*

$$S_{n+1}(x) = \int_0^\infty \lambda(x,t)(K(x-t) - K(x+t))\, S_n^\alpha(t)\, dt, \tag{13}$$

$$S_0(x) \equiv 1, \ \ \ n = 0, 1, 2, ..., \ \ \ \ x \in \mathbb{R}^+ \tag{14}$$

*имеет место оценка*

$$S(x) \geq \left(\lambda(x,x)\left(\frac{1}{2} - Q(2x)\right)\right)^{\frac{p}{p-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{15}$$

С использованием результатов лемм 1.2 – 1.4 доказывается один из основных результатов первой главы.

**Теорема 1.2.** *Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда, если*

$$\lambda(x,x)(1 - 2Q(2x)) > 1 - 2Q(x), \;\; x > 0,$$

*то решение уравнения* (7) *единственно в следующем классе непрерывных на* $\mathbb{R}^+$ *функций*:

$$\mathfrak{M} \equiv \left\{ f(x) \;\middle|\; \left(\lambda(x,x)\;\left(\frac{1}{2} - Q(2x)\right)\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq f(x) \leq 1, \right.$$

$$\left. x \in \mathbb{R}^+; \quad 1 - f \in L_1(\mathbb{R}^+) \right\}.$$

Приведены также примеры функций $\lambda(x,t)$ и $K(x)$, для которых выполняются все условия сформулированных теорем

$$\lambda(x,t) = 1 - \varepsilon e^{-x} e^{-t}, \;\; \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \;\; (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{16}$$

$$K(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Во второй части первой главы рассматривается следующая граничная задача для сингулярного нелинейного интегрального уравнения на всей оси:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi^m(x) = & (\mu(x) - 1)\, \varphi^n(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\, \varphi(t)\, dt, \;\; x \in \mathbb{R}, \qquad (17) \\ \varphi(\pm\infty) : & = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = \pm 1 \qquad (18) \end{array} \right.$$

относительно искомой измеримой и нечетной на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(x)$. Здесь $m$ и $n$ — заданные нечетные числа, причем

$$m > 2n, \tag{19}$$

а функции $\mu$ и $K$ — определенные на $\mathbb{R}$ четные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\mu(0) = +\infty, \quad \mu(x) \geq 1, \; x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} \mu(x) = 1, \tag{20}$$

$$\mu - 1 \in L_1(0,+\infty) \cap L_2(0,+\infty), \tag{21}$$

$$K(x) > 0,\ x \in \mathbb{R},\ \ K(x) \downarrow \ \text{по}\, x \ \text{ на } \mathbb{R}^+ \equiv [0,+\infty), \tag{22}$$

$$K \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R}),\ \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1,\ \ \int\limits_{0}^{\infty} xK(x)dx < +\infty, \tag{23}$$

где $C_M(R)$ — пространство непрерывных и существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

Пусть $f(x)$ — измеримое решение следующего интегрального уравнения на полуоси $(0,+\infty)$:

$$f^m(x) = (\mu(x) - 1)\, f^n(x) + \int\limits_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t))\, f(t)\, dt, \quad x > 0 \tag{24}$$

с граничным условием

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1, \tag{25}$$

тогда нечетное продолжение этой функции на $(-\infty,0)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{если } x > 0, \\ -f(-x), & \textit{если } x < 0 \end{cases} \tag{26}$$

будет почти всюду на $\mathbb{R}$ удовлетворять граничной задаче (17)–(18).

Наряду с задачей (24)–(25) рассматривается следующая граничная задача на $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} \psi^m(x) = \int\limits_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t))\, \psi(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, & (27) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 1. & (28) \end{cases}$$

В работе Х.А. Хачатряна (см. [8]) доказано, что задача (27)–(28) имеет неотрицательное нетривиальное монотонно возрастающее ограниченное решение $\psi(x)$ такое, что

$$\psi(0) = 0, \quad 1 - \psi \in L_1(0,+\infty). \tag{29}$$

Имеет место

**Лемма 1.5.** *При условиях* (19)–(23)*, если $m$ и $n$ — нечетные числа, то уравнение* (24) *обладает нетривиальным измеримым решением $f(x)$, удовлетворяющим двусторонней оценке*

$$\psi(x) \le f(x) \le (1+M)^{\frac{1}{m-1}}\, \mu^{\frac{1}{n}}(x), \quad x > 0. \tag{30}$$

Решение уравнения (24) строится с помощью следующих последовательных приближений:

$$\begin{cases} f_{s+1}^{m}(x) = (\mu(x) - 1)\, f_s^n(x) + \int\limits_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\, f_s(t)\, dt, \\ f_0(x) = \psi(x), \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \quad x > 0. \end{cases} \tag{31}$$

Справедлива

**Лемма 1.6.** *При условиях леммы 1.5 для построенного посредством итераций* (31) *решения* $f(x)$ *уравнения* (24) *имеет место следующее включение* $(f - \psi) \in L_1(0, +\infty)$, *где* $\psi(x)$*— решение граничной задачи (27) и (28) со свойствами* (29).

**Следствие.** Из леммы 1.6 и включения (29) следует, что $(1 - f) \in L_1(0, +\infty)$.

Имеет место следующая

**Теорема 1.3.** *При условиях* (19) – (23) *граничная задача (17), (18) имеет нетривиальное нечетное решение* $\varphi(x)$ *на всей оси. Более того, это решение обладает следующими свойствами:*

**1**. $\psi(x) \leq \varphi(x) \leq (1 + M)^{\frac{1}{m-1}}\, \mu^{\frac{1}{n}}(x)$ при $x > 0$,
$-(1 + M)^{\frac{1}{m-1}}\, \mu^{\frac{1}{n}}(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(-x)$ при $x < 0$,

**2**. $1 - \varphi \in L_1(0, +\infty), \quad 1 + \varphi \in L_1(-\infty, 0)$.

Приводятся частные примеры функций $\mu$ и $K$, удовлетворяющих условиям (20)–(23):

- $\mu(x) = 1 + \frac{1}{|x|^\alpha}\, e^{-x^2}, \qquad \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad x \in \mathbb{R}$,
- $\mu(x) = 1 + \frac{1}{|x|^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$,
- $K(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta}}\, e^{\frac{-x^2}{4\delta}}, \qquad \delta > 0$,
- $K(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$,
- $K(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|s}\, G(s)\, ds, \quad x \in \mathbb{R}$, где $a > 0, \quad b \geq +\infty$

  $G(s) > 0, \quad s \in [a, b], \quad \int\limits_a^b \frac{G(s)}{s}\, ds = \frac{1}{2}, \quad G \in L_1(a, b)$.

**Вторая глава** диссертации состоит из двух частей.

**Первая часть** второй главы диссертации посвящена вопросам разрешимости одного класса нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами Теплица.

Исследуется следующий класс нелинейных бесконечных алгебраических уравнений:

$$x_n = \sum_{j=o}^{\infty} a_{n-j}\, h_j\,(x_j), \;\; n = 0, 1, 2, ... \tag{32}$$

относительно искомого бесконечного вектора $x = (x_o, x_1, x_2, ..., x_n, ...)^T$.

Предполагается, что $A = (a_{n-j})_{n,j=0}^{\infty}$ — бесконечная теплицевая матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

- $a_i \geqslant 0,\; i \in \mathbb{Z},\; a_0 = 0,\; \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 1,\; a_{-j} > a_j,\; j \in \mathbb{N},$ (33)
- $\alpha \equiv \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i > o, \quad \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} |i|\, a_i < +\infty.$ (34)

Последовательность вещественных, измеримых и непрерывных в нуле функций $\{h_j(u)\}_{j=o}^{\infty}$ удовлетворяет условию «критичности»:

$$h_j(0) = 0, \;\; j \in \mathbb{N}_0, \tag{35}$$

и некоторым другим условиям (см. ниже).

Заметим, что из (35) следует, что нулевой вектор $x \equiv (0, 0, 0, ..., 0, ...)^T$ удовлетворяет системе (32).

Наряду с (32) рассматривается следующее неоднородное линейное дискретное уравнение Винера-Хопфа:

$$y_n = \tau_n + \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\, y_j, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{36}$$

относительно искомого бесконечного вектора $y = (y_0, y_1, ..., y_n, ...)^T$.

Здесь

$$\tau_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\, \beta_j, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{37}$$

$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\beta_n \geq \frac{p_\varepsilon^n}{\alpha\varepsilon},,\; n \in N_0,\; \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < +\infty,\; \sum_{n=0}^{\infty} n\, \beta_n < +\infty. \tag{38}$$

Ниже будет пояснен смысл обозначений $p_\varepsilon$, $\alpha$ и $\varepsilon$.

Рассмотрим следующее преобразование матрицы A:

$$\chi(p) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, p^j, \quad 0 \le p \le 1. \tag{39}$$

Заметим

$$\chi(0) = 0, \quad \chi(1) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \equiv \alpha > 0, \quad \alpha \le 1,$$

$$\chi(p) \in C[0,1], \quad \chi(p) \uparrow \text{по } p \text{ на } [0,1].$$

По теореме Больцано–Коши для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ существует число $p_\varepsilon \in (0,1)$ такое, что

$$\chi(p_\varepsilon) = \alpha\varepsilon. \tag{40}$$

В работе [1] доказано, что система (36) имеет положительное ограниченное решение в пространстве $l_1$. Обозначим

$$\eta_0 \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}_0} y_n.$$

Имеет место следующая

**Лемма 2.1.** *Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство $\tau_n \ge p_\varepsilon^n$ .*

Теперь рассмотрим следующую вспомогательную нелинейную систему:

$$z_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\,(z_j - \omega_j(z_j)), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{41}$$

относительно искомого вектора $z = (z_0, z_1, ..., z_n, ...)^T$. Здесь

$$\omega_j \in C_0(\mathbb{R}^+) \equiv \{\nu \in C(\mathbb{R}^+),\ \lim_{t\to\infty} \nu(t) = 0\}, \quad j = 0,1,2,... \tag{42}$$

— функции, для которых

- существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\omega_j(u) \downarrow \text{ по } u \text{ на } [\delta, +\infty),\ j = 0,1,2,..., \tag{43}$$

- существует функция

$$\omega_0 \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0\,(\mathbb{R}^+),\ \omega_0 \downarrow [\delta, +\infty),\ m_1(\omega_0) \equiv \int_0^\infty x\,\omega_0(x)dx < +\infty, \tag{44}$$

  такая, что

$$\omega_j(u) \le \omega_0\,(j + 1 + u),\ \ u \ge \delta, \quad j = 0,1,2,\dots .$$

В работе [10] доказано, что система уравнений (41) имеет однопараметрическое семейство положительных решений

$$z_\gamma = (z_0^\gamma, z_1^\gamma, ..., z_n^\gamma ...)^T, \quad \gamma \in \Delta,$$

причем справедливы следующие утверждения:

1. $z_n^\gamma \geq 0,\ n \in \mathbb{N}_0,\ \gamma \in \Delta,$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^\gamma = \frac{2\gamma}{1-\gamma_+},\ \gamma_+ \in (0,1),\ \gamma \in \Delta,$
3. $S_n^\gamma \leq 2S_n^\gamma - r_n \leq z_n^\gamma \leq 2S_n^\gamma,\ n \in \mathbb{N}_0,\ \gamma \in \Delta,$

где $S_n^\gamma = \gamma\, S_n$, а $S_n$ — единственное решение следующей начальной задачи для дискретного однородного уравнения Винера-Хопфа:

$$\begin{cases} S_n = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\, S_j,\ \ n \in \mathbb{N}_0, \\ S_0 = 1, \end{cases} \tag{45}$$

$\Delta \equiv [\max(æ, \gamma_0), +\infty)$, $\gamma_0 > \delta$ — некоторое число, для которого $\omega_0(\gamma_0) < \gamma_0$, $æ = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} r_n$, где $r_n = (r_0, r_1, ..., r_n, ...)^T \in l_1$ — положительное решение следующего неоднородного дискретного уравнения Винера-Хопфа:

$$r_n = 2\omega_0\,(n+1+\delta) + \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}\, r_j,\ \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{46}$$

4. если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Delta$ и $\gamma_1 > \gamma_2$, то

$$z_n^{\gamma_1} - z_n^{\gamma_2} \geq 2\,(\gamma_1 - \gamma_2).$$

При условиях (33), (34) задача (45) имеет положительное монотонно возрастающее решение (см. [1]) $S = (S_0, S_1, ..., S_n, ...)^T$, причем

$$S_n > 0, \quad S_n \uparrow \frac{1}{1-\gamma_+},\ \text{ когда } n \to \infty, \tag{47}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1-\gamma_+} - S_n \right) < +\infty. \tag{48}$$

Теперь сформулируем основной результат первой части второй главы.

**Теорема 2.1.** *Пусть, последовательность* $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям (33), (34), а* $æ, \alpha, \gamma_0, \eta_o, p_\varepsilon$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ *определены выше,* $\gamma^* = \max(æ, \gamma_0)$. *Если для некоторого числа* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $\eta \geq \eta_0 + \frac{2\gamma^*}{1-\gamma_+}$, $\gamma_+ \in (0,1)$, *функции* $h_j \in C[0,\eta]$, $j \in \mathbb{N}_0$ *удовлетворяют следующим условиям:*

- *при каждом фиксированном* $j$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ функция $h_j(u) \uparrow$ по $u$ на отрезке $[p_\varepsilon^j, \eta]$,

- *имеют место неравенства*

$$h_j(p_\varepsilon) \geq \frac{1}{\alpha\varepsilon} p_\varepsilon^j, \;\; j \in \mathbb{N}_0, \tag{49}$$

$$h_j(u) \leq u + \omega_j \left(\eta - u\right) + \beta_j, \;\; j \in \mathbb{N}_0, \;\; p_\varepsilon^j \leq u \leq \eta, \tag{50}$$

*то система* (32) *имеет положительное решение в пространстве* $l_1$.

**Замечание.** Отметим, что результаты теоремы 2.1 остаются в силе, если вместо условий (33), (34) потребовать следующие более слабые условия:

$$a_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad a_0 = 0, \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 1, \quad a_{-j} \geq a_j, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{51}$$

$$\alpha \equiv \sum_{i=0}^{\infty} a_i > 0, \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |i| \, a_i < +\infty, \tag{52}$$

$$\nu(A) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} j \, a_j < 0. \tag{53}$$

Ниже приводятся примеры функций $h_j(u)$ и последовательностей $\{\beta_j\}_{j=0}^{\infty}$ :

- $$h_j(u) = \frac{1}{\alpha\varepsilon}\sqrt{u p_\varepsilon^j}, \qquad p_\varepsilon^j \leq u \leq \eta, \qquad j \in \mathbb{N}_0,$$

$$\beta_j \equiv max\left(\frac{1}{\alpha\varepsilon}, \frac{1}{2\alpha^2\varepsilon^2}\right) \cdot p_\varepsilon^j, \;\; j \in \mathbb{N}_0.$$

- $$h_j(u) = \frac{u^r}{\eta^{r-1}} + \frac{2p_\varepsilon^j u}{\alpha\varepsilon(u + p_\varepsilon^j)}, \;\; r > 1, \;\; p_\varepsilon^j \leq u \leq \eta, \;\; j \in \mathbb{N}_0$$

$$\beta_j = \frac{2}{\alpha\varepsilon} \cdot p_\varepsilon^j, \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

**Во второй части** второй главы рассматривается следующая система нелинейных интегральных уравнений:

$$Q_i(f_i(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{ij}(x,t) f_j(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{54}$$

относительно искомой измеримой вектор функции $f(x) := (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T$. Матричное ядро $K(x,t) := (K_{ij}(x,t))_{i,j=1}^{n \times n}$ — определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ существенно ограниченная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- $r(A)=1$, $r(A)$ — спектральный радиус матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ :

$$0<a_{ij}:=\sup_{x\geq 0}\int_0^\infty K_{ij}\,(x,t)\,dt,\quad i,j=1,2,...,n, \tag{55}$$

- существуют функции $\{\tilde K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, $\{\lambda_j(t)\}_{j=1}^{n}$ и число $\varepsilon_0>0$, удовлетворяющие следующим условиям:

**i)** $\tilde K_{ij}(-x)=\tilde K_{ij}(x),\quad x\geq 0,\quad 0<\tilde K_{ij}\in L_1(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde K_{ij}\,(x)\,dx=a_{ij},\quad i,j=1,2,...,n, \tag{56}$$

**ii)** $\tilde K_{ij}(x)\downarrow$ по $x$ на $\mathbb{R}^+$,

$$\int_0^\infty x\tilde K_{ij}(x)\,dx<+\infty,\quad i,j=1,2,...,n, \tag{57}$$

**iii)** $\varepsilon_0\leq\lambda_j(t)\leq 1,\quad 1-\lambda_j\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad \lambda_j(t)\uparrow$ по $t$,

$$\lim_{t\to+\infty}\lambda_j(t)=1,\quad j=1,2,...,n, \tag{58}$$

такие, что

$$K_{i,j}(x,t)\geq\Big(\tilde K_{ij}(x-t)-\tilde K_{ij}(x+t)\Big)\,\lambda_j(t),$$
$$(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\qquad i,j=1,2,...,n.$$

Из условия (55) в силу теоремы Перрона следует, что существует вектор $\eta=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n,)^T$ с положительными координатами $\{\eta_i\}_{i=1}^n$, для которого

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\eta_j=\eta_i,\quad i=1,2,...,n. \tag{59}$$

Обозначим

$$\eta_i^*:=\frac{\eta_i}{\min\limits_{1\leq i\leq n}\eta_i}\quad i=1,2,...,n. \tag{60}$$

Относительно функции $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ будем предполагать выполнение следующих условий:

- $Q_i\in C[0,\eta_i^*],\ \ Q_i(u)\uparrow$ по $u$ на $[0,\eta_i^*],\quad i=1,2,...,n,$ (61)

- $Q_i(u)$ — выпуклые вниз функции на отрезке $[0,\eta_i^*]$, $i=1,2,...,n,$ (62)
- $Q_i(\eta_i)^*=\eta_i^*$, $Q_i(0)=0$ и функциональные уравнения $Q_i(u)=\varepsilon_0 u$ имеют положительные решения $\xi_i$, причем $0<\xi_i<\eta_i^*$, $i=1,2,...,n.$ (63)

Имеет место следующая

**Теорема 2.2.** *При условиях* (55)–(58), *(61)–(63) система* (54) *имеет покомпонентно неотрицательное нетривиальное и существенно ограниченное решение* $f(x):=(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))^T$, *причем*

$$0\le f_i(x)\le\eta_i^*,\quad x\in\mathbb{R}^+,$$

$$\lim_{x\to\infty}f_i(x)=\eta_i^*,\quad \eta_i^*-f_i\in L_1(\mathbb{R}^+),\qquad i=1,2,...,n.$$

Приводятся несколько частных примеров указанных систем нелинейных интегральных уравнений, имеющих приложения в динамической теории $p-$адических открыто-замкнутых струн:

- $Q_i(u)=\frac{u^p}{(\eta_i^*)^{p-1}}$, $i=1,2,...,n,$

  где $p>2$ — нечетное число, а числа $(\eta_i^*)_{i=1}^n$ определяются из (59),(60),
- $Q_i(u)=c_i\frac{u^p}{(\eta_i^*)^{p-1}}+(1-c_i)u,$

  где $c_i\in(0,1)$ — числовые параметры, $i=1,2,...,n.$

В качестве функций $\{\tilde{K}_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и $\{\lambda_j(t)\}_{j=1}^n$ можно взять следующие функции:

- $\tilde{K}_{i,j}(x)=\frac{a_{ij}}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $\;a_{ij}>0,\; i,j=1,2,...,n$

  и спектральный радиус матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ равен 1,
- $\tilde{K}_{ij}(x)=\int\limits_a^b e^{-|x|s}G_{ij}(s)ds,\;\; x\in\mathbb{R},\;\; i,j=1,2,...,n,$

  где $G_{ij}(s)>0$, $G_{ij}\in C[a,b)$, $\;0<a<b\le+\infty$, спектральный радиус матрицы $A=\left(2\int\limits_a^b\frac{G_{ij}(s)}{s}\,ds\right)_{i,j=1}^{n\times n}$ равен 1.
- $\lambda_j(t)=1-\delta_j e^{-t}$, $t\ge0$, где $\delta_j\in(0,1)$, $j=1,2,...,n$ — числовые параметры,
- $\lambda_j(t)=1-(1-\varepsilon_0)e^{-q_j t^2}$, $q_j>0$, $j=1,2,...,n$, где число $\varepsilon_0$ определяется по iii).

Приводятся также примеры матричного ядра $\{K_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, удовлетворяющего условиям теоремы 2.2:

- $K_{ij}(x,t) = \left(\tilde{K}_{ij}(x-t) - \tilde{K}_{ij}(x+t\right)\lambda_j(t), \quad i,j=1,2,...,n,$ $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,$
- $K_{ij}(x,t) = \tilde{K}_{ij}(x-t), \quad i,j=1,2,...,n, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,$
- $K_{ij}(x,t) = \tilde{K}_{ij}(x-t) - \tilde{K}_{ij}(x+t), \quad i,j=1,2,...,n, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+.$

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[4].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.м. наук, профессору А.Х. Хачатряну за постановку задач, а также д.ф.м. наук, профессору Х.А. Хачатряну за постоянную помощь и полезные советы при выполнении настоящей работы.

## Литература

[1] Л.Г. Арабаджян. О дискретных уравнениях Винера-Хопфа в консервативном случае, Мат.анализ и его приложения (Арм. пед. институт ). 1980 г.,№ 1, стр. 26–36.

[2] Л.Г. Арабаджян. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, Известия НАН Армении, Математика, 1997 г., том 32, № 1, стр. 21–28.

[3] В.С. Владимиров, Я.И. Волович. О нелинейном уравнении динамики в теории $p$-адической струны, ТМФ, 2004 г., том 138, № 3, стр. 355–368.

[4] В.С. Владимиров. О нелинейном уравнении $p$-адической открытой струны для скалярного поля, УМН, 2005 г., 60:6(366), стр. 73–88.

[5] В.С. Владимиров. Об уравнении $p$-адической открытой струны для скалярного поля тахионов, Известия РАН Сер. Математическая, 2005 г., том 69, № 3, стр. 55–80.

[6] Н.Б. Енгибарян. О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае, Известия РАН Сер. Математическая, 2006 г., том 70, № 5, стр. 79–96.

[7] Л.В. Жуковская. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн, ТМФ, 2006 г., том 146, № 3, стр. 402–409.

[8] Х.А. Хачатрян. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории $p$-адической струны, Известия РАН Сер. Математическая, 2018 г., том 82, № 2, стр. 172–193.

[9] A.Kh. Khachatryan , Kh.A. Khachatryan. Solvability of a class of nonlinear pseudo-differential equations in $\mathbb{R}^n$, $p$-adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 2018, vol. 10, № 2, pp. 90–99.

[10] Kh.A. Khachatryan, M.F. Broyan. One-parameter family of positive solutions for a class of nonlinear infinite algebraic systems with Teoplitz-Hankel type Matrices. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2013 vol. 48, № 5, pp. 189–200.

## Список опубликованных работ по теме диссертации

[1] Х.А. Хачатрян, А.К. Кроян. О положительной разрешимости в $l_1$ одной бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица, Вестник РАУ, 2015 г., № 1, стр. 16–25.

[2] С.М. Андриян, А.К. Кроян, Х.А. Хачатрян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в $p$-адической теории струн, Уфимск. матем. журн., 2018 г.,том 10, выпуск 4, стр.12–23.

[3] А.К. Кроян. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений на полуоси, Вестник РАУ, 2021 г.,№ 1, стр. 23–32.

[4] Kh.A. Khachatryan, A.K. Kroyan. Existence of odd solutions to boundary value problems with power nonlinearity, Journal of Mathematical Sciences, 2021, vol.253, № 3, pp. 383–390.

# ԱՄՓՈՓՈՒՄ

## Ա.Կ. Կոռյան

## ՈՐՈՇ ԴԱՍԵՐԻ ՓԱԹԵԹԱՅԻՆ ՏԻՊԻ ՈՉ ԿՈՄՊԱԿՏ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐՈՎ ԾՆՎՈՂ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

Ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է $p$-ադիկ լարերի տեսությունում ծագող որոշ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների և դրանց դիսկրետ հանգույնների ուսումնասիրությանը: Նշված հավասարումները ուղղակիորեն կիրառվում են $p$-ադիկ բաց և փակ լարերի տեսության մեջ, համաճարակի տարածա-ժամանակային տարածման մաթեմատիկական տեսությունում, ճառագայթման տեղափոխման տեսությունում, գազերի կինետիկ տեսությունում և այլն:

Այդ հավասարումների համար ապացուցվել են լուծման գոյության և միակության թեորեմներ, ինչպես նաև ուսումնասիրվել են կառուցված լուծումների որակական հատկությունները:

Ատենախոսության մեջ ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

- Ամբողջ առանցքի վրա աստիճանային ոչ գծայնությամբ ինտեգրալ հավասարումների մի դասի համար ապացուցվել է ոչ տրիվիալ, կենտ, անընդհատ և սահմանափակ լուծման գոյությունը: Որոշ լրացուցիչ սահմանափակումների դեպքում, անընդհատ ֆունկցիաների որոշակի դասում ապացուցվել է կառուցված լուծման միակությունը:

- Ուսումնասիրվել է լուծման ասիմպտոտիկ վարքը անվերջությունում: Ստացվել են դիտարկվող հավասարումների լուծման ինտեգրալ գնահատականներ և մի քանի այլ հատկություններ: Բերված են ինտեգրալ հավասարումների կորիզների և ոչ գծայնությունը նկարագրող ֆունկցիաների օրինակներ, որոնք բավարարում են ձևակերպված թեորեմի բոլոր պայմաններին:

- Ամբողջ առանցքի վրա աստիճանային ոչ գծայնությամբ փաթեթի տիպի, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման համար ապացուցված է կենտ լուծման գոյությունը: Որոշված է կառուցված լուծման ինտեգրալ ասիմպտոտիկան:

Բերված են դիփարկվող հավասարումների մասնակի օրինակներ, որոնք ունեն կիրառական հետաքրքրություն:

- Ուսումնասիրվել է Տյոպլիցյան մատրիցներով անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգի մի դաս: Ապացուցված է դրական լուծման գոյությունը $l_1$ տարածությունում:

- Դրական կիսաառանցքի վրա մոնոտոն և ուռուցիկ ոչ գծայնությամբ մի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի համար ապացուցված է կոմպոնենտ առ կոմպոնենտ, ոչ բացասական, ոչ տրիվիալ, սահմանափակ լուծման գոյությունը: Ուսումնասիրվել է կառուցված լուծման ասիմպտոտիկ վարքը անվերջությունում: Բերված են ուսումնասիրվող համակարգերի կոնկրետ օրինակներ՝ ստացված արդյունքները լուսաբանելու համար:

# R E S U M E

## Arpenik Kroyan

## The issues of solvability of some classes of convolution type integral equations generated by non compact operators


The work is devoted to the study of some nonlinear integral equations and their discrete analogous arising in the $p$-adic theory of strings. Mentioned equations have direct applications in $p$-adic theory of open-closed strings, mathematical theory of spatial-temporal spread of epidemics, in radiative transfer theory, in kinetic theory of gases and etc.

The exitance and uniqueness theorems of solvability for these equations are proved,as well as qualitative properties of constructed solutions are studied.

In the thesis the following results are obtained:

- For one class of integral equations on the whole line with power nonlinearity the existence of a nontrivial continuous odd bounded solution is proved. Under some additional restrictions, in a certain class of continuous functions, the uniqueness of the constructed solution is proved.

- The asymptotic behavior of the solution at infinity is studied. Integral estimations and number of properties of the solution of the considered equation are obtained. Examples of integral kernels and functions describing nonlinearity of equations, that satisfy all conditions of formuld theorems are constructed.

- The existence of an odd rolling solution for a singular convolution type integral equation on the whole line with power nonlinearity is proved. The integral asymptotic of the constructed solution is established. Particular examples of the considered equations, representing applied interest are given.

- A class of nonlinear infinite system of algebraic equations with the Toeplitz matrix is investigated. The existence of a positive solution in the space $l_1$ is proved.

- For one system of integral equations with monotone and convex nonlinearity on the positive half line an existence theorem for componentwise nonnegative nontrivial and bounded solutions is proved. The asymptotic behavior of the constructed solution at infinity is studied. To illustrate the obtained results the specific examples of these systems of integral equations are represented.