

ОТЗЫВ

Официального оппонента Кононова А. В.
о диссертационной работе Саакяна А. Х.

**«Интервальные раскраски графов с заданными ограничениями»,
представленной к защите на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 – «Математическая кибернетика и математическая логика»**

Актуальность темы. Диссертационная работа А. Х. Саакяна «Interval colorings of graphs with predefined restrictions» совмещает два направления исследований в задачах о раскраске графов. Первое направление, сравнительно молодое, продолжает и развивает исследования по интервальным раскраскам графов. Второе, более старое, представляет исследования по предписанным раскраскам, то есть к раскраскам, в которых для раскрашиваемого объекта задано ограниченное множество допустимых цветов. Предписанные раскраски, по-видимому, впервые независимо были введены в 70х годах прошлого столетия в работах Визинга и Эрдёша, Рубина, Тейлора. Как известно, интервальные рёберные раскраски двудольных графов являются удобной математической моделью для задач построения расписаний в многостадийной задаче с нефиксированными маршрутами, известной в англоязычной литературе, как open shop scheduling problem. Другое важное практическое приложение предписанных раскрасок — это проблема составления расписаний занятий в школах или университетах (timetabling) и составления графика работ вахтовых бригад и экипажей (crew scheduling). Поскольку наличие в реальных расписаниях немало количества дополнительных ограничений таких как времена поступления, директивные сроки, интервалы доступности машин, пожелания участников рабочего процесса и многое другое, существенно осложняет задачи составления расписаний, то стремление автора глубже исследовать математические задачи, порождаемые дополнительными ограничениями, делает представленную научную работу актуальной.

Научная новизна. Научная новизна диссертации состоит в подробном и разностороннем исследовании комбинаторной сложности рассматриваемых задач и установление границ между нетривиальными полиномиально разрешимыми и NP-трудными классами примеров. Все основные результаты диссертации являются новыми. Для их установления автор использовал известные методы комбинаторного анализа, теории графов, полиномиальной сводимости и динамического программирования. Отметим, что все основные результаты работы имеют конструктивное доказательство, то есть для каждого частного случая задачи либо приведен алгоритм ее решения полиномиальной трудоемкости, либо построено полиномиальное сведение к ней эталонной NP-трудной задачи.

В *первой* главе рассмотрены задачи о существовании и построении интервальных рёберных раскрасок графов с ограничениями на спектры вершин (далее задача E3), что означает предварительное задание для каждой вершины графа того конкретного интервала цветов, из которого могут быть взяты цвета рёбер, инцидентных данной вершине. Эти задачи связаны с задачами теории

расписаний, в которых для работ заданы моменты их поступления и директивные сроки на их завершение. Теорема 1.1.12 и следствие 1.1.13 (стр. 26) говорят об NP-полноте данной задачи как в случае произвольных графов, так и в случае кубических графов, что можно считать вполне ожидаемым в свете известной теоремы Хольера об NP-полноте задачи о хроматическом классе кубических графов (Holyer I. (1981). The NP-completeness of edge-coloring. SIAM Journal on computing, 10(4), 718-720.).

Заслуживает быть отмеченной теорема 1.2.1, утверждающая, что для деревьев задача E3 решается линейным алгоритмом, так как она является обобщением задачи, рассмотренной в известной работе Каро и Шёнхейма (Caro Y., Schönheim J. (1981). Generalized 1-factorization of trees. Discrete Mathematics, 33(3), 319-321.).

Очень примечательно, и хотел бы это особо подчеркнуть, что переход к рассмотрению более сложной задачи с ограничениями на цвета ребер (далее задача E5) приводит уже в случае деревьев к существенному повышению временной сложности алгоритма (вместо линейной – пятая степень от длины входа задачи). Тем не менее, сам результат (теорема 1.3.1, стр. 32) считаю интересным и достойным внимания по двум причинам. Во первых, автор предложил оригинальный алгоритм, основанный на принципе динамического программирования и использующий в качестве внутренней процедуры алгоритм построения максимального паросочетания в двудольном графе. Кроме того, необходимо отметить, что задача E5 представляет несомненный интерес для составителей университетских расписаний, так как преподаватель-совместители могут вести занятия только в определенные дни или часы.

Во *второй* главе рассмотрены задачи на графах, имеющих сильные ограничения на структуру циклов. Автор продемонстрировал изобретательность и большую целеустремленность, сумев преодолеть немалые трудности при построении алгоритмов. Хочу отметить последовательность, с которой автор развивает свой подход к построению точных эффективных алгоритмов, переходя от относительно “простых” задач к все более и более сложным. Нельзя, например, не отметить теорему 2.2.2 (стр. 45), касающуюся, по существу, разработке полиномиального алгоритма для некоторого частного подкласса внешнепланарных графов. Этот результат и сам по себе интересен, но, что более важно – и будем надеяться, что так оно и будет – позволяет предположить, что автор не остановится и постарается продолжить исследования внешнепланарных графов с точки зрения предложенной иерархии задач.

Важные результаты представлены в параграфе 2.5 (стр. 55), в котором рассмотренные задачи исследованы для кактусов. Даже для сравнительно простого подкласса двудольных кактусов задача E5 является NP-полной. Автор предложил оригинальное полиномиальное сведение задачи о нахождении трансверсали заданного размера дуплекса к задаче E5. NP-полнота задачи о трансверсали дуплекса установлена в работе Зейкера 2007 года (Zaker M. (2007). Maximum transversal in partial Latin squares and rainbow matchings. Discrete Applied Mathematics, 155(4), 558-565). Важность этого результата в том, что в свете теоремы

1.3.1 видно, сколь близко с точки зрения задачи E5 подходит к деревьям «нижняя граница NP-полноты».

Также в этом параграфе установлена NP-полнота задачи E4 для узких подклассов кактусов – теоремы 2.5.10 (стр. 63, недвудольные кактусы) и 2.5.15 (стр. 65, двудольные кактусы). В завершение обзора второй главы отмечу, что более простая задача E3 для кактусов решается полиномиальным алгоритмом (теорема 2.3.5, стр. 50) с временной сложностью $O(N^2)$.

Из результатов *третьей* главы, на мой взгляд, заслуживает внимания теорема 3.2.1 (стр. 78), утверждающая, что задача L (list coloring) решается для блочных графов алгоритмом со временной сложностью $O(N^2k^2)$, где k – максимальный допустимый цвет. Формально такой алгоритм не может считаться полиномиальным алгоритмом, но поскольку в приложениях разумно считать k величиной, линейно ограниченной по отношению к числу вершин графа, то, соответственно, в этих случаях временная сложность алгоритма будет не выше чем $O(N^4)$.

Из результатов об NP-полноте в обсуждаемой главе наиболее ценными считаю теоремы 3.3.1 (стр. 78) и 3.5.1 (стр. 85), усиливающие известные результаты Хайтера-Тузы (Hujter M., Tuza, Z. (1993). Precoloring extension. II. Graph classes related to bipartite graphs. Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 62(1), 1-11.) и Колборна (Colbourn C. J. (1983). Embedding partial Steiner triple systems is NP-complete. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 35(1), 100-105.), соответственно.

Завершая обзор работы, отмечаю, что в ней получены новые научные результаты, имеющие теоретическое и практическое значение.

Достоверность результатов и апробация работы. Диссертация изложена на строгом математическом языке, её результаты докладывались на международных конференциях в Армении, Молдове, на семинарах факультета информатики и прикладной математики ЕГУ, лаборатории теории графов института информатики и проблем автоматизации НАН РА, кафедры математической кибернетики Российско-Армянского (Славянского) университета. Все основные результаты работы являются новыми, они строго доказаны и отражены в 8 опубликованных научных статьях, четыре из которых имеют единоличное авторство диссертанта.

Стиль и оформление работы. Работа оформлена в соответствии с требованиями ВАК РА. Стиль изложения полуформальный, доказательства основных результатов написаны достаточно подробно. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Недостатки работы. Хотя представленная диссертация изложена в целом на высоком уровне, она имеет некоторые недостатки, о которых следует сказать.

1) Результат работы Зейкера (Zaker M. (2007). Maximum transversal in partial Latin squares and rainbow matchings) сформулирован не точно, поэтому приведенное в диссертации доказательство теоремы 2.5.3 требует дополнительного уточнения.

2) Автор используют заглавную букву S для обозначения совершенно разных объектов. Например, $S(v)$ – поддерево с корнем v (стр 14), $S(v)$ – спектр вершины v (стр 16).

3) Определение для ориентированного графа соответствующего неориентированного графа (underlying graph) допускает двоякое толкование. Действительно, из определения не ясно, если в ориентированном графе для двух вершин есть прямая и обратная дуга, сколько ребер (одно или два) присутствует в неориентированном графе.

4) В символике, отражающей временные сложности алгоритмов, автор пользуется как заглавной буквой *N* латинского алфавита (страницы 27, 28, 32, 39, 45, 49, 50, 54, 77, 82), так и соответствующей маленькой буквой латинского алфавита (стр. 82) - в таких случаях более естественно и более принято употребление маленькой буквы;

5) В списке литературы отсутствует работа (Caro Y., Schönheim J. (1981). Generalized 1-factorization of trees. Discrete Mathematics, 33(3), 319-321.), что есть, предполагаю, чисто техническая оплошность автора, поскольку в литературном списке статьи (Sahakyan A. K., Kamalian R. R. (2021) Interval edge-colorings of trees with restrictions on the edges. Proceedings of the YSU A: Physical and Mathematical Sciences, 55(2 (255)), 113-122.) эта работа упомянута.

6) думаю, что при употреблении словосочетания "latin square" нет необходимости использования заглавной буквы *L* латинского алфавита.

Заключение. Несмотря на отмеченные недостатки, представленная диссертация А. Х. Саакяна производит впечатление цельного, интересного и актуального научного исследования, полностью соответствующего требованиям, предъявляемым ВАК РА к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.09 - «Математическая кибернетика и математическая логика», а её автор, несомненно, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент:
Ведущий научный сотрудник лаборатории
математических моделей принятия решений
Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Доктор физ.-мат. наук, доцент

А. В. Кононов

Подпись в.н.с. Кононова Александра Вениаминовича подтверждаю.

Учёный секретарь ИМ СО РАН,
Кандидат физ.-мат. наук

Я.А. Копылов



Почтовый адрес: Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
Телефон: +7 (383) 329 75 80
Адрес электронной почты: alvenko@math.nsc.ru

21.12.2021