ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ղազարյան Աղասի Բագրատի

Գրաֆների կողային ներկումներ նվազագույն քանակությամբ պալիտրաներով

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Երևան - 2022

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Казарян Агаси Багратович

Реберные раскраски графов с минимальным количеством палитр

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван - 2022

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Պ.Ա. Պետրոսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ռ.Ռ. Քամալյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Գ.Վ. Սարգսյան
Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայ-ռուսական (սլավոնական) համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2022թ. հունիսի 22-ին, ժ. 15^{00}-ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈԿ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2022թ. մայիսի 13-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր՝ Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель: кандидат физ.-мат. наук П.А. Петросян
Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук Р.Р. Камалян
кандидат физ.-мат. наук Г.В. Саргсян
Ведущая организация: Российско-Армянский (Славянский) университет

Защита состоится 22-го июня 2022г. в 15^{00} часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 050 “Математика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 13-го мая 2022г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук Т.Н. Арутюнян

Աշխատանքի ընդհանուր նկարագիրը

Թեմայի արդիականությունը: Գրաֆների ներկումների խնդիրները հանդիսանում են դիսկրետ մաթեմատիկայի հայտնի, արդի և արագ զարգացող հետազոտման ուղղություններից մեկը: Առաջին անգամ գրաֆների ներկման հետ կապված հիշատակումը պայմանավորված էր «Չորս գույների հիպոթեզ» հանրահայտ խնդրով, համաձայն որի ամեն մի աշխարհագրական քարտեզ հնարավոր է ներկել չորս գույների միջոցով այնպես, որ յուրաքանչյուր երկրի տարածք ներկված լինի մեկ գույնով, իսկ ընդհանուր սահման ունեցող երկրները ներկված լինեն տարբեր գույներով: Այդ խնդրի լուծմանը ուղղված տարբեր գիտնականների քայլերը հանգեցրին գրաֆների տեսության մեթոդների և գործիքների զարգացմանը, ինչպես նաև նպաստեցին այդ խնդիրների հանդեպ գիտնականների կողմից դրսևորվող հետաքրքրության աճին: Հետագայում պարզ դարձավ, որ այդ խնդիրների կարևորությունը պայմանավորված է ինչպես մաթեմատիկայում առկա բազմաթիվ խնդիրներով, որոնք կարելի է ձևակերպել որպես ներկումների խնդիրներ (Վան դեր Վարդենի թեորեմը թվաբանական պրոգրեսիաների մասին, Ռամսեյի տեսության խնդիրներ, ֆակտորիզացիայի խնդիրներ), այնպես էլ առկա սերտ կապով մի շարք կարևոր կիրառական խնդիրների հետ: Մասնավորապես, նշանակալի փոխադարձ կապ կա կարգացուցակների տեսության խնդիրների և գրաֆների ներկումների խնդիրների միջև: Օրինակ, քննաշրջանի օպտիմալ կարգացուցակ կառուցելու խնդիրը բերվում է գրաֆի քրոմատիկ թվի որոշմանը: Գրաֆի քրոմատիկ ինդեքսը գտնելու խնդրին բերվում է սպորտային մրցումների կարգացուցակ կազմելու խնդիրը, իսկ երկկողմանի գրաֆների հատուկ տիպի կողային ներկումների խնդիրները բազմաթիվ աշխատանքներում ծառայել են որպես ուսումնական դասացուցակների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման հարցերի հետազոտման մոդելներ:

Մի շարք աշխատանքներում[1,2,3,4] հետազոտվել են գրաֆների ճիշտ կողային ներկումներն, որտեղ ճիշտ կողային ներկում համարվում է այնպիսի կողային ներկումն, երբ ցանկացած գագաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր գույներով:

G գրաֆի $\chi'(G)$ քրոմատիկ ինդեքսի տակ հասկանում են գույների այն նվազագույն քանակը, որն անհրաժեշտ է G գրաֆի ճիշտ կողային ներկման համար: Պարզ է, որ $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, որտեղ $\Delta(G)$-ն G գրաֆի գագաթների առավելագույն աստիճանն է: Մյուս կողմից, Վ. Վիզինգը ցույց է տվել, որ ցանկացած G գրաֆի համար $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$: Դժվար խնդիր է հանդիսանում տրված G գրաֆի համար գտնել այդ գրաֆի քրոմատիկ ինդեքսը: Մի շարք աշխատանքներում գտնվել են երկկողմանի գրաֆների, լրիվ գրաֆների, լրիվ բազմակողմանի գրաֆների, տրոհվող գրաֆների, որոնց առավելագույն աստիճանը կենտ թիվ է, հարթ գրաֆների, որոնց առավելագույն աստիճանը մեծ է վեցից և արտաքին հարթ գրաֆների քրոմատիկ ինդեքսները:

Գրաֆների ճիշտ կողային ներկումները, որոնց գագաթների պալիտրաների քանակի վրա տրվում են սահմանափակումներ, առաջին անգամ դիտարկվել են դեռևս 90-ական թվականներին: Այսպես, օրինակ, գրաֆների գագաթներ տարբերակող կողային

[1] G. Chartrand and P. Zhang, *Chromatic graph theory* (Chapman and Hall/CRC, 2008).

[2] T. R. Jensen and B. Toft, *Graph coloring problems*, Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization, A Wiley-Interscience publication (1995).

[3] M. Kubale, *Graph colorings* (American Mathematical Soc., 2004).

[4] M. Stiebitz et al., *Graph edge coloring: vizing's theorem and goldberg's conjecture*, Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization (John Wiley & Sons, 2012).

ներկումները ներմուծվել են Ա. Բերիսի և Ռ. Շելպի[5] կողմից 1997 թվականին: G գրաֆի գագաթներ տարբերակող կողային ներկումը այնպիսի ճիշտ կողային ներկում է, որի դեպքում տարբեր գագաթների պալիտրաները զույգ առ զույգ տարբեր են, այսինքն գագաթների պալիտրաների քանակը պետք է հավասար լինի գագաթների քանակին: G գրաֆի $\chi'_{vd}(G)$ գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի տակ հասկանում են այն նվազագույն գույների քանակը, որն անհրաժեշտ է G գրաֆի գագաթներ տարբերակող կողային ներկման համար: Հեշտ է տեսնել, որ ցանկացած G գրաֆի համար $\chi'(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq |V(G)| + \Delta(G) - 1$: Մյուս կողմից հայտնի է, որ գոյություն ունեն գրաֆներ, որոնց համար $\chi'_{vd}(G) > \chi'(G)$: Ա. Բերիսի և Ռ. Շելպի կողմից գտնվել են պարզ ցիկլերի, լրիվ գրաֆների և լրիվ երկկողմանի գրաֆների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսները: Այլ աշխատանքներում[6,7,8] հետազոտվել են գրաֆների որոշ դասերի գագաթներ տարբերակող կողային ներկումները: Գրաֆների հարևան գագաթներ տարբերակող կողային ներկումները ներմուծվել են Ժ. Ժանգի, Լ. Լիուի և Ջ. Վանգի[9] կողմից 2002 թվականին: G գրաֆի հարևան գագաթներ տարբերակող կողային ներկումը այնպիսի ճիշտ կողային ներկում է, որի դեպքում հարևան գագաթների պալիտրաները զույգ առ զույգ տարբեր են: G գրաֆի $\chi'_{avd}(G)$ հարևան գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի տակ հասկանում են այն նվազագույն գույների քանակը, որն անհրաժեշտ է G գրաֆի հարևան գագաթներ տարբերակող կողային ներկման համար: Գրաֆների հարևան գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների հետ է կապված գրաֆների տեսության հայտնի և բաց հիպոթեզներից մեկը, որի համաձայն $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 2$ ցանկացած G մեկուսացված գագաթներ և կողեր չպարունակող և հինգ գագաթանի պարզ ցիկլից տարբեր գրաֆի համար: Հայտնի է, որ այն ճիշտ է լրիվ գրաֆների, ցանցերի[10], երկկողմանի գրաֆների[11] և որոշ հարթ գրաֆների[12] համար: Նաև հայտնի[13] են գրաֆների հարևան գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի տարբեր գնահատականներ:

Ի տարբերություն գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների, վերջին տասնամյակում տարբեր հեղինակների կողմից դիտարկվում են այնպիսի կողային ներկումներ, որոնց իրարից տարբեր պալիտրաների քանակը հավասար է նվազագույն հնարավոր արժեքին: Այպես, օրինակ, նվազագույն քանակությամբ տարբեր պալիտրաներով ճիշտ կողային ներկումներ դիտարկել են Մ. Հորնակը, Ռ. Կալինովսկին, Մ. Մեշկան և Մ. Վոզնյակը[14] 2014 թվականին, որտեղ հեղինակները սահմանել են գրաֆի պալիտրայի ինդեքսը: G գրաֆի $\check{s}(G)$ պալիտրայի ինդեքսը պալիտրաների նվազագույն քանակն է ըստ G-ի բոլոր ճիշտ կողային ներկումների:

Այս պարամետրը ուսումնասիրվել է հիմնականում համասեռ գրաֆների համար:

---

[5] A. C. Burris and R. H. Schelp, “Vertex-distinguishing proper edge-colorings”, Journal of Graph Theory **26**, 73–82 (1997).

[6] P. N. Balister et al., “Vertex-distinguishing edge colorings of graphs”, Journal of Graph Theory **42**, 95–109 (2003).

[7] C. Bazgan et al., “On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs”, Journal of Combinatorial Theory, Series B **75**, 288–301 (1999).

[8] O. Favaron et al., “Strong edge colorings of graphs”, Discrete Mathematics **159**, 103–109 (1996).

[9] Z. Zhang et al., “Adjacent strong edge coloring of graphs”, Applied Mathematics Letters **15**, 623–626 (2002).

[10] J.-L. Baril et al., “Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of meshes”, Australasian Journal of Combinatorics **35**, 89–102 (2006).

[11] P. N. Balister et al., “Adjacent vertex distinguishing edge-colorings”, SIAM Journal on Discrete Mathematics **21**, 237–250 (2007).

[12] K. J. Edwards et al., “On the neighbour-distinguishing index of a graph”, Graphs and Combinatorics **22**, 341–350 (2006).

[13] H. Hatami, “$\Delta + 300$ Is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number”, Journal of Combinatorial Theory, Series B **95**, 246–256 (2005).

[14] M. Horňák et al., “Minimum number of palettes in edge colorings”, Graphs and Combinatorics **30**, 619–626 (2014).

Մ. Հորնակը, Ռ. Կալինովսկին, Մ. Մեշկան և Մ. Վոզնյակը ուսումնասիրել են որոշ համասեռ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը: Մասնավորապես, նրանք որոշել են լրիվ գրաֆի պալիտրայի ինդեքսը: Նրանք նաև նկատել են, որ համասեռ գրաֆի պալիտրայի ինդեքսը մեկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գրաֆը դաս 1-ից է: Ավելին, համասեռ գրաֆի պալիտրայի ինդեքսը տարբեր է երկուսից: Բացի այդ, նրանց կողմից գտնվել է խորանարդ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի ճշգրիտ արժեքը: Նշենք, որ դաս 2-ի d-համասեռ գրաֆի պալիտրայի ինդեքսը կարող է ընդունել $3, \ldots, d+1$ արժեքները: Ս. Բոնվիչինին և Ջ. Մացուոկոլոն[15] ուսումնասիրել են դաս 2-ի 4-համասեռ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը և ցույց են տվել, որ այն կարող է ընդունել 3, 4 կամ 5 արժեքներից յուրաքանչյուրը:

Քիչ է հետազոտված ոչ համասեռ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը: Մ. Հորնակը և Յ. Հուդակը[16] ուսումնասիրել են լրիվ երկկողմանի $K_{a,b}$ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը: Նրանք ամբողջությամբ որոշել են $K_{a,b}$ գրաֆի պալիտրայի ինդեքսը, երբ $\min(a,b) \leq 5$: Կ. Կասսելգրենը և Պ. Պետրոսյանը[17] հետազոտել են երկկողմանի գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը: Մասնավորապես, որոշել են ցանցային գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը և նկարագրել են բոլոր այն գրաֆները, որոնց պալիտրայի ինդեքսը հավասար է գագաթների քանակին: Ա. Բոնիսոլին, Ս. Բոնվիչինին և Ջ. Մացուոկոլոն[18] տվել են ծառերի պալիտրայի ինդեքսի հասանելի վերին գնահատական: Պետք է նշել, որ հայտնի են ԴՆԹ-ի կառուցվածքի մոդելավորման հետ կապված խնդիրներում պալիտրայի ինդեքսի կիրառություններ[19]:

Վիզինգի թեորեմի համաձայն[20], G գրաֆի ճիշտ կողային ներկման համար առավելագույնը անհրաժեշտ է $\Delta+1$ հատ գույն, հետևաբար $\check{s}(G) \leq 2^{\Delta+1}-1$: Մյուս կողմից, Մ. Ավեսանին, Ա. Բոնիսոլին և Ջ. Մացուոկոլոն[21] կառուցել են մուլտիգրաֆների ընտանիք, որոնց պալիտրայի ինդեքսը աճում է ասիմպտոտիկորեն ինչպես Δ^2: Վերջերս, Դ. Մատիոլոն, Ջ. Մացուոկոլոն և Գ. Տաբարելին[22] ապացուցել են, որ եթե G գրաֆի համար $\Delta(G) \geq 2$ և այն չունի կմախքային զույգ ենթագրաֆ առանց մեկուսացված գագաթների, ապա $\check{s}(G) > \delta(G)$, որտեղ $\delta(G)$-ն G-ի նվազագույն աստիճանն է: Այնուհետև այս արդյունքը օգտագործելով, նրանք կառուցել են առաջին հայտնի գրաֆների ընտանիքը (առանց պատիկ կողերի), որոնց պալիտրայի ինդեքսը ասիմպտոտիկորեն համարժեք է նրանց առավելագույն աստիճանի քառակուսուն: Ընդհանուր առմամբ, պալիտրայի ինդեքսի որոշման խնդիրը NP-լրիվ է: Այդ փաստը հետևում է Յ. Հոլյերի արդյունքից[23]:

Գրաֆների պալիտրայի ինդեքսին նվիրված հետազոտությունները հիմնականում նվիրված էին համասեռ գրաֆներին, մինչդեռ ոչ համասեռ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը մնում էր քիչ հետազոտված: Մյուս կողմից՝ գրաֆների պալիտրայի

[15] S. Bonvicini and G. Mazzuoccolo, “Edge-colorings of 4-regular graphs with the minimum number of palettes”, Graphs and Combinatorics **32**, 1293–1311 (2016).

[16] M. Horňák and J. Hudák, “On the palette index of complete bipartite graphs”, Discussiones Mathematicae Graph Theory **38**, 463–476 (2017).

[17] C. J. Casselgren and P. A. Petrosyan, “Some results on the palette index of graphs”, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science **Vol. 21 no. 3**, `10.23638/DMTCS-21-3-11` (2019).

[18] A. Bonisoli et al., “On the palette index of a graph: the case of trees”, Lecture notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica **14**, 49–55 (2017).

[19] S. Bonvicini and M. M. Ferrari, “On the minimum number of bond-edge types and tile types: an approach by edge-colorings of graphs”, Discrete Applied Mathematics **277**, 1–13 (2020).

[20] В. Г. Визинг, “Об оценке хроматического класса p-графа”, Дискретный анализ **3**, 25–30 (1964).

[21] M. Avesani et al., “A family of multigraphs with large palette index”, Ars Mathematica Contemporanea **17**, 115–124 (2019).

[22] D. Mattiolo et al., “Graphs with large palette index”, Discrete Mathematics **345**, 112814 (2022).

[23] I. Holyer, “The NP-completeness of edge-coloring”, SIAM Journal on Computing **10**, 718–720 (1981).

ինդեքսին նվիրված աշխատանքներում որպես կանոն դիտարկվում էին նվազագույն քանակությամբ պալիտրաներով ճիշտ կողային ներկումների կառուցման խնդիրներ և պալիտրայի ինդեքսի ճիշգրիտ որոշման խնդիրներ, սակայն հայտնի չէին ընդհանուր ստորին կամ վերին գնահատականներ այդ պարամետրի համար: Գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի հետ կապված հետազոտություններում անբավարար ուշադրություն է հատկացվել տարբեր գրաֆային գործողությունների (գրաֆների դեկարտյան արտադրյալ, գրաֆների գումարում, գրաֆից գագաթների կամ կողերի հեռացում, և այլն) ազդեցությանը պալիտրայի ինդեքսի վրա: Քիչ հետազոտված էին մնում նաև գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի որոշման խնդրի բարդության հետ կապված հարցերը:

Աշխատանքի հիմնական նպատակը և նրանում դիտարկված խնդիրները: Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների նվազագույն քանակությամբ պալիտրաներ պարունակող ճիշտ կողային ներկումների կառուցման և պալիտրայի ինդեքսի գնահատման հետ կապված խնդիրներ, ինչպես նաև դիտարկվել են այդ պարամետրի որոշման խնդրի բարդության հետ կապված հարցեր: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է վերոհիշյալ խնդիրների հետազոտումը գրաֆների տարբեր դասերի համար, ինչպես նաև արդյունավետ ալգորիթմների մշակումը, որոնք կառուցում են նվազագույն քանակությամբ պալիտրաներով ճիշտ կողային ներկումներ:

Հետազոտության օբյեկտները: Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում գրաֆների տարբեր դասեր, գրաֆների ճիշտ կողային ներկումներ, այդպիսի ներկումներում մասնակցող պալիտրաների քանակներ, ինչպես նաև գրաֆների տարբեր արտադրյալներ:

Հետազոտության մեթոդները: Հետազոտությունն իրականացվել է դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և դիսկրետ օպտիմիզացիայի մեթոդների օգնությամբ:

Գիտական նորույթը: Աշխատանքում առաջին անգամ տրվում են ընդհանուր ստորին և վերին գնահատականներ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի համար, ինչպես նաև ուսումնասիրվում են այդ գնահատականների հասանելիության հետ կապված հարցեր: Ոչ համասեռ գրաֆների որոշ դասերի համար տրվել է պալիտրայի ինդեքսի ճշգրիտ արժեքը: Աշխատանքում առաջին անգամ դիտարկվում են ֆրակտալային տիպի և տարբեր արտադրյալ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի որոշման խնդիրներ:

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը: Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները և նրանում ստացված արդյունքները ներկայացնում են ոչ միայն տեսական նշանակություն գրաֆների քրոմատիկ հատկությունների հետազոտման համար, այլև կարող են ունենալ գործնական կիրառություններ: Մասնավորապես, գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը կիրառվում է ԴՆԹ-ի կառուցվածքի հետ կապված որոշ խնդիրներում:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները: Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները.

1. Գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի ընդհանուր հասանելի ստորին և վերին գնահատականներ,
2. Գրաֆների որոշ դասերի համար պալիտրայի ինդեքսի ինչպես հասանելի գնահատականները, այնպես էլ ճշգրիտ արժեքը, որոնցից են կմախքային ասղով գրաֆները, մեկ և երկու ցիկլ պարունակող գրաֆները, θ-գրաֆները, բլոկների գրաֆները, 3-չափանի ցանցերը և որոշ Հալին գրաֆները,
3. Ֆրակտալային տիպի և տարբեր արտադրյալ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի հասանելի վերին գնահատակններ և որոշ դեպքերում այդ պարամետրի ճշգրիտ արժեքը,
4. Երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի որոշման խնդրի բարդության հետ կապված որոշ արդյունքներ, մասնավորապես, $(r, 2r)$-երկհամասեռ ($r > 2$) երկկողմանի G գրաֆներում $\check{s}(G) = 3$ խնդիրների NP-լրիվությունը:

Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փորձարկումը: Աշխատանքում ստացված արդյունքները պարբերաբար ներկայացվել և քննարկվել են ԵՊՀ-ում անցկացվող գրաֆների տեսության գիտական սեմինարների ժամանակ, ԵՊՀ ՈՒԳԸ-ի կողմից կազմակերպված տարեկան գիտաժողովների ժամանակ, ինչպես նաև զեկուցվել են մի շարք գիտաժողովներում Հայաստանում և արտերկրներում.

1. YSU SSS 4th International Scientific Conference, Yerevan, Armenia, October 2-6, 2017,
2. YSU SSS 5th International Scientific Conference, Yerevan, Armenia, April 16-20, 2018,
3. Modern Methods, Problems And Applications Of Operator Theory And Harmonic Analysis - IX, Rostov-on-Don, Russia, April 21-26, 2019,
4. ԵՊՀ հիմնադրման 100-ամյակին նվիրված գիտաժողով, Երևան, Հայաստան, Մայսի 14-15, 2019,
5. 8th Polish Combinatorial Conference, Poland, September 14-18, 2020,
6. Mathematics & It: Research And Education (MITRE-2021), Chişinău, Moldova, July 01-03, 2021,
7. XV Годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 6-10 декабря, 2021:
8. ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ ԵՎ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ «ԻԿՄ 50», Երևան, Հայաստան, Մարտի 23-25, 2022:

Հրապարակումները: Հետազոտության թեմայի վերաբերյալ տպագրվել են 9 գիտական աշխատանքներ:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը: Աշխատանքի ծավալը կազմում է 107 էջ: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից (57 անուն): Աշխատանքը ներառում է 45 նկար:

Աշխատանքի պարունակությունը

Աշխատանքում դիտարկվում են ոչ կողմնորոշված հասարակ գրաֆներ՝ առանց պատիկ կողերի և օղակների: $V(G)$-ով և $E(G)$-ով նշանակենք G գրաֆի, համապատասխանաբար, գագաթների և կողերի բազմությունները: Ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթի համար $d_G(v)$-ով նշանակենք v գագաթի աստիճանը G գրաֆում, իսկ $\delta(G)$-ով և $\Delta(G)$-ով՝ G գրաֆի, համապատասխանաբար, նվազագույն և առավելագույն աստիճանները: Դիցուք G-ն գրաֆ է և $S \subseteq V(G)$: $N_G(S)$-ով նշանակենք

$$N_G(S) = \{v \mid v \in V(G) \setminus S, \text{ գոյություն ունի } u \in S, \text{ որ } uv \in E(G)\}$$

գագաթների բազմությունը:

Դիցուք G-ն գրաֆ է և $v \in V(G)$: Կասենք v գագաթը *դոմինանտ* է, եթե $d_G(v) = |V(G)| - 1$:

Նշանակենք $D_G(v)$-ով v գագաթի հարևանների աստիճանների բազմությունը՝

$$D_G(v) = \{d \mid u \in N_G(\{v\}), d_G(u) = d\}:$$

Նշանակենք $N_G(v, d)$-ով v գագաթի d աստիճանի հարևանների քանակը՝

$$N_G(v, d) = |\{u \mid u \in N_G(\{v\}), d_G(u) = d\}|:$$

Նշանակենք $D(G)$-ով G գրաֆի բոլոր գագաթների աստիճանների բազմությունը՝

$$D(G) = \bigcup_{v \in V(G)} D_G(v) :$$

Իրական, ամբողջ և ոչ բացասական ամբողջ թվերի բազմությունները նշանակենք, համապատասխանաբար, $\mathbb{R}$-ով, $\mathbb{Z}$-ով և $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-ով: Ցանկացած $x \in \mathbb{R}$ թվի համար սահմանենք $\lceil x \rceil = \min(\{z \mid z \in \mathbb{Z}, z \geq x\})$ և $\lfloor x \rfloor = \max(\{z \mid z \in \mathbb{Z}, z \leq x\})$ ամբողջ թվերը: Սահմանենք $\operatorname{sgn}(x) : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ ֆունկցիան հետևյալ կերպ.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{եթե } x < 0, \\ 0, & \text{եթե } x = 0, \\ 1, & \text{եթե } x > 0 : \end{cases}$$

G գրաֆի *կողային ներկում* կոչվում է $\alpha : E(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ արտապատկերումը: G գրաֆի α կողային ներկումը կոչվում է *ճիշտ կողային ներկում*, եթե ցանկացած $e, e' \in E(G)$ հարևան կողերի համար ստույգ է $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ պայմանը: Դիցուք տված է G գրաֆի որևէ ճիշտ կողային α ներկում: Այս դեպքում $v \in V(G)$ գագաթի *պալիտրա* կոչվում է v գագաթին կից կողերի գույների բազմությունը: G գրաֆի $\check{s}(G)$ *պալիտրայի ինդեքս* է կոչվում G գրաֆում իրարից տարբեր պալիտրաների նվազագույն քանակը, ըստ G գրաֆի բոլոր ճիշտ կողային ներկումների:

G կապակցված գրաֆի *ցիկլոմատիկ թիվ* կանվանենք $\operatorname{cyc}(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$ թիվը: *Մեկ ցիկլ պարունակող գրաֆը* կապակցված գրաֆ է, որի ցիկլոմատիկ թիվը մեկ է, հետևաբար, նաև ունի ճիշտ մեկ ցիկլ:

Երկու ցիկլ պարունակող գրաֆը կապակցված գրաֆ է, որի ցիկլոմատիկ թիվը երկուս է:

Կասենք, որ G գրաֆը *կմախքային ասպղով գրաֆ* է, եթե այն ունի կմախքային ենթագրաֆ, որը աստղ է:

Տրված n, m բնական թվերի համար *լիրվ պրոհվող* $KS_{n,m}$ գրաֆը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$V(KS_{n,m}) = V \cup U, V = \{v_1, \ldots, v_n\}, U = \{u_1, \ldots, u_m\},$$

$$E(KS_{n,m}) = \{v_i u_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} \cup \{v_i v_j \mid 1 \le i < j \le n\}:$$

Դիցուք $l, m_0, m_1, n_1, \ldots, m_l, n_l$ բնական թվեր են: Նշանակենք $U^0 = \{u_1^0, \ldots, u_{m_0}^0\}$, $V^0 = \emptyset$, $U^i = \{u_1^i, \ldots, u_{m_i}^i\}$, $V^i = \{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\}$ միմյանց հետ չհատվող գագաթների բազմությունները, որտեղ $i = 1, \ldots, l$: Սահմանենք կապակցված *շեմային* $G = G(m_0, m_1, \ldots, m_l, n_1, \ldots, n_l)$ գրաֆը հետևյալ կերպ.

$$V(G) = \bigcup_{i=0}^{l} U^i \cup V^i,$$

$$E(G) = \bigcup_{i=0}^{l} \{w_1 w_2 \mid w_1 \in U^i, w_2 \in \bigcup_{j=0}^{i} U^i \cup V^i, w_1 \neq w_2\} :$$

$n_1, \ldots, n_k$ բնական թվերի համար, որտեղ 1 թիվը հանդիպում է առավելագույնը մեկ անգամ, $\theta_{n_1,\ldots,n_k}$-ով նշանակենք *թետա գրաֆը*, որը կազմված է երկու u, v գագաթներից և դրանք միացնող, միմյանց հետ չհատվող $n_1, \ldots, n_k$ երկարությամբ $k > 0$ հատ ճանապարհներից:

G գրաֆի v գագաթը կանվանենք *միակցման կետ*, եթե այն հեռացնելիս G-ում կապակցված բաղադրիչների քանակը ավելանում է: *Չպրոհվող գրաֆը* K_1-ից տարբեր կապացված գրաֆ է, որը չունի միակցման կետ: G գրաֆի առավելագույն չտրոհվող ենթագրաֆը կանվանենք *բլոկ*: Կասենք G գրաֆը *բլոկների գրաֆ* է, եթե նրա յուրաքանչյուր բլոկ լրիվ գրաֆ է:

Դիցուք տրված են G գրաֆը $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ գագաթների բազմությամբ և H գրաֆը $V(H) = \{u_1, \ldots, u_m\}$ գագաթների բազմությամբ: Դիցուք $H_1, \ldots, H_n$ գրաֆները H գրաֆի n կրկնօրինակներ են: Նշանակենք u_j^i-ով H_i գրաֆի այն գագաթը, որը համապատասխանում է H գրաֆի u_j գագաթին, որտեղ $i = 1, \ldots, n$ և $j = 1, \ldots, m$: G և H գրաֆների $G \circ H$ *կորոնա արտադրյալը* սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$V(G \circ H) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(H_i),$$

$$E(G \circ H) = E(G) \cup \bigcup_{i=1}^{n} E(H_i) \cup \{v_i u_j^i \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}:$$

G և H գրաֆների $G \square H$ *դեկարտյան արտադրյալ գրաֆը* սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$V(G \square H) = \{(v_i, u_j) \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\},$$

$$E(G \square H) = \bigcup_{i=1}^{n} \{(v_i, x)(v_i, y) \mid xy \in E(H)\} \cup \bigcup_{j=1}^{m} \{(x, u_j)(y, u_j) \mid xy \in E(G)\} :$$

Կամայական $l, m, n > 1$ ամբողջ թվերի համար սահմանենք $G(l, m, n)$ 3-*չափանի ցանց գրաֆը*, համապատասխանաբար, l, m և n գագաթանի P_l, P_m և P_n ճանապարհ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալը՝ $G(l, m, n) = P_l \square P_m \square P_n$:

H գրաֆը կանվանենք *Հալին գրաֆ*, եթե այն ստացվում է առնվազն չորս գագաթ ունեցող և երկու աստիճանի գագաթ չունեցող T ծառից, վերջինիս բոլոր տերևները ցիկլով միացնելիս:

Երկկողմանի գրաֆը կանվանենք (a, b)-*երկհամասեռ*, եթե մի կողմի յուրաքանչյուր գագաթի աստիճանը a է, իսկ մյուս կողմի յուրաքանչյուր գագաթի աստիճանը b է[24]:

Առաջին գլխի առաջին պարագրաֆը նվիրված է գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի հասանելի վերին գնահատականին, ինչպես նաև մեկ և երկու ցիկլ պարունակող գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի որոշմանը: Մասնավորապես, պարագրաֆում ապացուցվել են հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1.1.1. *Ցանկացած G գրաֆի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\check{s}(G) \leq \sum_{i=1}^{\Delta'} \left\lceil \frac{\Delta'}{i} \right\rceil + 2\,\mathsf{cyc}\,(G),$$

որտեղ $\Delta' = \min\{\Delta(H) \mid H$-ը G գրաֆի կմախքային ծառ է$\}$:

Նույն 1.1 պարագրաֆի 1.1.1 և 1.1.2 ենթապարագրաֆներում հետազոտվել են մեկ և երկու ցիկլ պարունակող գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը: Մեկ ցիկլ պարունակող գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի վերաբերվող արդյունքը ձևակերպելու համար սահմանենք $*$ *պայմանը*:

Կասենք մեկ C ցիկլ պարունակող G գրաֆը բավարարում է $*$ *պայմանին*, եթե

- C ցիկլը ունի կենտ երկարություն,
- C ցիկլը ունի որևէ գագաթ, որի աստիճանը մեծ է երկուսից,
- C ցիկլում գոյություն չունեն երկու հարևան գագաթներ, որոնց աստիճանները մեծ են երկուսից,
- G գրաֆի առավելագույն աստիճանը զույգ թիվ է:

Թեորեմ 1.1.3. *Կամայական մեկ ցիկլ պարունակող Δ առավելագույն աստիճանի G գրաֆի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\check{s}(G) \leq \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\Delta} \left\lceil \frac{\Delta}{i} \right\rceil + 1, & \text{եթե } G\text{-ն բավարարում է } * \text{ պայմանին,} \\ \sum\limits_{i=1}^{\Delta} \left\lceil \frac{\Delta}{i} \right\rceil, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Ավելին՝ այս գնահատականը հասանելի է:

[24]Չսահմանված հասկացությունների և նշանակումների համար տե՛ս D. B. West, *Introduction to graph theory*, Featured Titles for Graph Theory (Prentice Hall, 2001) ; A. M. Hinz, S. Klavžar, S. S. Zemljič, “A survey and classification of Sierpiński-type graphs”, Discrete Applied Mathematics **217**, 565–600 (2017).

Համանման արդյունք ստացվում է նաև 1.1.2 ենթապարագրաֆում երկու ցիկլ պարունակող գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի համար:

Աշխատանքի 1.2 պարագրաֆում ստացվել է հասանելի ստորին գնահատական գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի համար: Մասնավորապես, ապացուցվել է հետևյալ պնդումը.

Պնդում 1.2.1. *Կամայական G գրաֆի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\check{s}(G) \geq \max_{v \in V(G)} \left(\sum_{d \in D_G(v)} \left\lceil \frac{N_G(v,d)}{d} \right\rceil + |D(G) \setminus D_G(v)| \right):$$

Նշենք նաև, որ նույն պարագրաֆում ուսումնասիրվել են ստացված գնահատականի հասանելիության հետ կապված հարցեր: Մասնավորապես, նկարագրվել են գրաֆների որոշ դասեր, որոնց համար նշված գնահատականը հասանելի է:

1.3 պարագրաֆը նվիրված է կմախքային աստղով գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի հետազոտմանը: Պարագրաֆում ստացվել է հետևյալ գնահատականը.

Թեորեմ 1.3.1. *Դիցուք G-ն v դոմինանտ գագաթով գրաֆ է: Այդ դեպքում G գրաֆի պալիտրայի ինդեքսի համար տեղի ունի հետևյալ ստորին գնահատականը.*

$$\check{s}(G) \geq \sum_{d \in D_G(v)} \left\lceil \frac{N_G(v,d)}{d} \right\rceil + \mathrm{sgn}(\Delta(G) - \max(D_G(v))) :$$

Նույն պարագրաֆում ուսումնասիրվել է նաև լրիվ տրոհվող գրաֆների և շեմային գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը: Մասնավորապես, ապացուցվել են հետևյալ պնդումները.

Պնդում 1.3.3. *Կամայական n և m բնական թվերի համար*

ա) եթե $n \leq m$, ապա

$$1 + \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil \leq \check{s}(KS_{n,m}) \leq \check{s}(K_{n,m}) + \check{s}(K_n) - \mathrm{sgn}(m-n);$$

բ) եթե $n > m$, ապա

$$\check{s}(KS_{n,m}) \leq \min\left(\check{s}(K_{n,m}) + \check{s}(K_n) - 1, \check{s}(K_{n+m}) + m\right):$$

Հետևանք 1.3.4. *Կամայական n և m բնական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$\check{s}(KS_{2n,2nm}) = m + 1:$$

Պնդում 1.3.5. *Դիցուք $l, m_0, m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_l, n_l$ բնական թվեր են և $G = G(m_0, m_1, \ldots, m_l, n_1, \ldots, n_l)$: Այս դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\check{s}(G) \geq 2l - 1 + \mathrm{sgn}(m_0 - 1) :$$

Պնդում 1.3.6. *Դիցուք $l, m_0, m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_l, n_l$ բնական թվեր են և $G = G(m_0, m_1, \ldots, m_l, n_1, \ldots, n_l)$: Այս դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\check{s}(G) \leq \sum_{i=1}^{l} \left(\check{s}(K_{m_i, \sum_{j=1}^{i} n_j}) + 1 - \mathrm{sgn}(|m_i - \sum_{j=1}^{i} n_j|) \right) + \check{s}(K_{\sum_{j=0}^{l} m_j}) :$$

Պարագրաֆի վերջում նշվում է լրիվ երկկողմանի գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի որոշման խնդրի և նվազագույն քանակությամբ քառակուսիներով ուղղանկյան ծածկույթ գտնելու խնդրի[25] կապը:

1.4 պարագրաֆում հետազոտվել է θ-գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի որոշման խնդիրը և գտնվել է այդ պարամետրի ճշգրիտ արժեքը: Մասնավորապես, այդ պարագրաֆում ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1.4.3. *Դիցուք $k > 2, 0 \leq a \leq k, b = k - a$ ամբողջ թվեր են, ինչպես նաև $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_a$-ն կենտ թվեր են, իսկ $2 \leq n_{a+1} \leq n_{a+2} \leq \cdots \leq n_k$-ն զույգ թվեր են: Այդ դեպքում $G = \theta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ թետա գրաֆի պալիտրայի ինդեքսի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.*

$$\check{s}(G) = \begin{cases} l+1, & \text{եթե } a \equiv 0 \pmod 2, b \equiv 0 \pmod 2, \\ l+2, & \text{եթե } a \equiv 1 \pmod 2, b \equiv 1 \pmod 2, n_1 = 1, \\ l+3, & \text{եթե } a \equiv 1 \pmod 2, b \equiv 1 \pmod 2, n_1 > 1, \end{cases} \tag{1}$$

$$\check{s}(G) = \begin{cases} l, & \text{եթե } a \equiv 1 \pmod 2, b \equiv 0 \pmod 2, n_1 = 1, \\ l+1, & \text{եթե } a \equiv 1 \pmod 2, b \equiv 0 \pmod 2, n_1 > 1, \\ l+2, & \text{եթե } a \equiv 0 \pmod 2, b \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \tag{2}$$

որտեղ (1)-ում $k = 2l$, իսկ (2)-ում $k = 2l - 1$:

Առաջին գլխի վերջին պարագրաֆը նվիրված է բլոկների գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի հետազոտմանը: Մասնավորապես, ապացուցվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 1.5.2. *Դիցուք G-ն Δ առավելագույն աստիճանով բլոկների գրաֆ է և նրա բոլոր բլոկները իզոմորֆ են K_n լրիվ գրաֆին: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ գնահատականը.*

$$\check{s}(G) \leq \check{s}(K_n) \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{n-1}} \left\lceil \frac{\Delta}{i(n-1)} \right\rceil :$$

Հետևանք 1.5.3. *Դիցուք $l > 1$, $n_i > 1$, $m_i \geq 1$ ամբողջ թվեր են, իսկ G_i-ն $m_i(n_i - 1)$ առավելագույն աստիճանով բլոկների գրաֆ է, որի բոլոր բլոկները իզոմորֆ են K_{n_i} լրիվ գրաֆին, որտեղ $i = 1, \ldots, l$: Դիցուք G բլոկների գրաֆը ստացվում է G_i-երից՝ նույնացնելով դրանցից մեկական գագաթ: Այս դեպքում տեղի ունի հետևյալ վերին գնահատականը*

$$\check{s}(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^{l} \check{s}(K_{n_i}) \sum_{j=1}^{m_i} \left\lceil \frac{m_i}{j} \right\rceil :$$

Պարագրաֆի վերջում հետազոտել են նաև վերին գնահատականների հասանելիության հետ կապված հարցերը: Մասնավորապես, նկարագրվել են գրաֆների որոշ դասեր, որոնց համար նշված գնահատականները հասանելի են:

Երկրորդ գլուխը նվիրված է ֆրակտալային տիպի և տարբեր արտադրյալ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի ուսումնասիրմանը:

[25] M. Walters, “Rectangles as sums of squares”, Discrete Mathematics **309**, 2913–2921 (2009).

Երկրորդ գլխի առաջին պարագրաֆում ուսումնասիրվել է Սերպինսկիի S_p^n, Սերպինսկիի եռանկյուն $\widehat{S}_3^n$ և Սերպինսկիի նման ${}^+S_p^n$ և ${}^{++}S_p^n$ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը:

Այս պարագրաֆի 2.1.1 ենթապարագրաֆում հետազոտվել է Սերպինսկիի եռանկյուն $\widehat{S}_3^n$ գրաֆի պալիտրայի ինդեքսի որոշման խնդիրը և գտնվել է այդ պարամետրի ճշգրիտ արժեքը: Մասնավորապես, ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.1.8. *Կամայական $n \geq 0$ ամբողջ թվի համար, Սերպինսկիի եռանկյուն $\widehat{S}_3^n$ գրաֆի պալիտրայի ինդեքսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.*

$$\check{s}(\widehat{S}_3^n) = \begin{cases} 3, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է,} \\ 4, & \text{եթե } n\text{-ը կենտ է:} \end{cases}$$

2.1.2 ենթապարագրաֆում ուսումնասիրվել է Սերպինսկիի S_p^n գրաֆի պալիտրայի ինդեքսը: Մասնավորապես, ապացուցվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 2.1.9. *Կամայական $n > 1$ և զույգ $p > 1$ ամբողջ թվերի համար սպույգ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$\check{s}(S_p^n) = 2:$$

Պնդում 2.1.10. *Կամայական $n > 1$ և կենտ $p > 1$ ամբողջ թվերի համար սպույգ է հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\check{s}(S_p^n) \geq 3:$$

Պնդում 2.1.11. *Կամայական $n > 1$ և կենտ $p > 1$ ամբողջ թվերի համար սպույգ է հետևյալը.*

$$\check{s}(S_p^n) \leq \begin{cases} \check{s}(K_p), & \text{եթե } n = 2, \\ \check{s}(K_p) + 1, & \text{եթե } n > 2: \end{cases}$$

Հետևանք 2.1.12. *Կամայական $p \geq 0$ ամբողջ թվի համար սպույգ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$\check{s}(S_{4p+3}^2) = 3:$$

Թեորեմ 2.1.13. *Կամայական $n > 0$ ամբողջ թվի համար սպույգ է հետևյալ հավասարությունը.*

$$\check{s}(S_3^n) = 3:$$

Պարագրաֆ 2.1-ի վերիջին ենթապարագրաֆը նվիրված է Սերպինսկիի նման ${}^+S_p^n$ և ${}^{++}S_p^n$ գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի որոշմանը: Մասնավորապես, ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 2.1.14. *Կամայական $n > 1$ և $p > 1$ ամբողջ թվերի համար տեղի ունի հետևյալը.*

$$\check{s}({}^+S_p^n) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } p \equiv 1 \pmod 2, \\ 3, & \text{եթե } p \equiv 0 \pmod 4, \end{cases}$$

և

$$3 \leq \check{s}({}^+S_p^n) \leq 4 \quad \text{եթե } p \equiv 2 \pmod 4 :$$

Պնդում 2.1.15. *Կամայական $n > 1$ և $p > 1$ ամբողջ թվերի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$\check{s}(^{++}S_p^n) = 1:$$

Պարագրաֆ 2.2-ում հետազոտվել են G և H գրաֆների $G \circ H$ կորոնա արտադրյալի պալիտրայի ինդեքսը: Մասնավորապես, հաջողվել է ստանալ այդ պարամետրի հասանելի ստորին և վերին գնահատականներ.

Թեորեմ 2.2.1. *Կամայական G կապակցված գրաֆի և H գրաֆի համար ստույգ են $G \circ H$ գրաֆի պալիտրայի ինդեքսի հետևյալ ստորին և վերին գնահատականները.*

$$\check{s}(H + K_1) \leq \check{s}(G \circ H) \leq \check{s}(H + K_1) + \check{s}(G):$$

Տրվել է նաև այս գնահատականի հասանելիության բավարար պայմաններ: 2.2 պարագրաֆի վերջում ապացուցվել է, որ $\check{s}(G) \leq \check{s}(G \circ H)$ արտահայտությունը ստույգ չէ:

Պարագարֆ 2.3-ը նվիրված է 3-չափանի ցանցերի պալիտրայի ինդեքսի որոշմանը: Մասնավորապես, այս պարագրաֆում ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.3.2. *Կամայական $l, m, n > 1$ ամբողջ թվերի համար ստույգ են հետևյալ արտահայտությունները.*

$$\check{s}(G(l,m,n)) = \begin{cases} 1, & \textit{եթե } l = m = n = 2, \\ 2, & \textit{եթե } \exists! p \in \{l,m,n\}, p > 2, \\ 3, & \textit{եթե } \exists! p \in \{l,m,n\}, p = 2, \\ 4, & \textit{եթե } \min(l,m,n) > 2 \textit{ և } lmn \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

$$5 \leq \check{s}(G(l,m,n)) \leq 9, \textit{ եթե } lmn \equiv 1 \pmod 2:$$

Գլուխ երկուսի վերջին պարագրաֆը նվիրված է Հալին գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի ուսումնասիրմանը: Մասնավորապես, հաջողվել է որոշել որոշ հատուկ տիպի Հալին գրաֆների պալիտրայի ինդեքսը.

Թեորեմ 2.4.2. *Դիցուք T-ն ծառ է, որի բոլոր գագաթները բացի տերևներից $\Delta > 3$ աստիճանի են: Դիցուք G-ն Հալին գրաֆ է, որը ստացվել է T ծառից: Այդ դեպքում ստույգ է հետևյալը.*

$$1 + \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \right\rfloor \leq \check{s}(G) \leq \max\left(1 + \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil, 4\right):$$

Պնդում 2.4.3. *Դիցուք T-ն ծառ է, որի բոլոր գագաթները բացի տերևներից $\Delta = 3$ աստիճանի են: Դիցուք G-ն Հալին գրաֆ է, որը ստացվել է T ծառից: Այդ դեպքում ստույգ է հետևյալը.*

$$\check{s}(G) = 1 :$$

Աշխատանքի վերջին գլուխը նվիրված է գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի որոշման խնդրի բարդությանը:

Ա. Հասրաթյանը և Կ. Կասսելգրենը[26] ապացուցել են, որ հետևյալ խնդիրը NP-լրիվ է.

[26]A. S. Asratian and C. J. Casselgren, "On interval edge colorings of (α,β)-biregular bipartite graphs", Discrete Mathematics **307**, 1951–1956 (2007).

Խնդիր 3.1.6.

Մուտք: *Տրված է $(3,6)$-երկհամասեռ G գրաֆը:*

Հարց: *Արդյո՞ք G գրաֆը ունի բոլոր 6 աստիճանի գագաթները ծածկող խորանարդ ենթագրաֆ:*

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

Խնդիր 3.1.9.

Մուտք: *Տրված է $(3,3n)$-երկհամասեռ G գրաֆը ֆիքսած $n > 1$ բնական թվի համար:*

Հարց: *Արդյո՞ք $\check{s}(G) = n+1$:*

Խնդիր 3.1.9-ի NP-լրիվությունը հանդիսանում է 3.1 պարագրաֆում ապացուցված Պնդում 3.1.8-ի հետևանք.

Հետևանք 3.1.10. *Խնդիր 3.1.9-ը NP-լրիվ է:*

3.1 պարագրաֆում ապացուցվել է նաև հետևյալ խնդրի NP-լրիվությունը.

Խնդիր 3.1.15.

Մուտք: *Տրված է $(r,2r)$-երկհամասեռ G գրաֆը ֆիքսած $r > 2$ բնական թվի համար:*

Հարց: *Արդյո՞ք $\check{s}(G) = 3$:*

Հիմնական արդյունքներն ու հետևությունները

Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների նվազագույն քանակությամբ պալիտրաներ պարունակող ճիշտ կողային ներկումների կառուցման և պալիտրայի ինդեքսի գնահատման հետ կապված խնդիրներ, ինչպես նաև դիտարկվել են այդ պարամետրի որոշման խնդրի բարդության հետ կապված հարցեր:

Ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1. Գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի ընդհանուր հասանելի ստորին և վերին գնահատականներ,
2. Գրաֆների որոշ դասերի համար պալիտրայի ինդեքսի ինչպես հասանելի գնահատականները, այնպես էլ ճշգրիտ արժեքը, որոնցից են կմախքային աստղով գրաֆները, մեկ և երկու ցիկլ պարունակող գրաֆները, θ-գրաֆները, բլոկների գրաֆները, 3-չափանի ցանցերը և որոշ Հալին գրաֆները,
3. Սերպինսկիի S_p^n, Սերպինսկիի եռանկյուն $\widehat{S}_3^n$ և Սերպինսկիի նման ${}^{+}S_p^n$ և ${}^{++}S_p^n$ գրաֆների և $G \circ H$ կորոնա արտադրյալների գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի հասանելի վերին գնահատականներ և որոշ դեպքերում այդ պարամետրի ճշգրիտ արժեքը,
4. Երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆների պալիտրայի ինդեքսի որոշման խնդրի բարդության հետ կապված որոշ արդյունքներ, մասնավորապես, ապացուցվել է $(r,2r)$-երկհամասեռ երկկողմանի G գրաֆներում $\check{s}(G) = 3$ պարզելու խնդրի NP-լրիվությունը, որտեղ $r > 2$:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրապարակված աշխատանքների ցանկ

1. A. Ghazaryan, On Palette Index Of Unicycle And Bicycle Graphs, Proceedings Of The Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 51: 1, 2019, pp. 3-12,
2. A. Ghazaryan, On The Palette Index Of A Graph: The Case Of Generalized Theta Graphs, Modern Methods, Problems And Applications Of Operator Theory And Harmonic Analysis - IX, Rostov-on-Don, Russia, 2019, pp. 125-126.
3. A. Ghazaryan, Some Results on the palette index of Sierpiński-like graphs, 8th Polish Combinatorial Conference, Poland, 2020, 1 p.
4. A. Ghazaryan, On The Palette Index Of Sierpiński-Like Graphs, Вестник Российско-Армянского университета, Физико-Математические и естественные науки, 1, 2021, pp. 33-42.
5. A. Ghazaryan, On The Palette Index Of Sierpinski-Like Graphs, International Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021), Chişinău, Republic of Moldova, 2021, p. 34.
6. A. Ghazaryan, The Palette Index Of Sierpinski Triangle Graphs And Sierpinski Graphs, Applied Discrete Mathematics, 54, 2021, pp. 99-108.
7. A. Ghazaryan, P. Petrosyan, Some bounds on the palette index of graphs, Ինֆորմատիկա և Կիրառական Մաթեմատիկա «ԻԿՄ 50», Yerevan, Armenia, 2022, p. 5.
8. A. Ghazaryan, On The Palette Index Of 3d-Grids, XV Годичная научная конференция РАУ (Сборник научных работ), Ереван, 2021, 4 p.
9. A. Ghazaryan, P. Petrosyan, On The Palette Index Of Graphs Having A Spanning Star, Proceedings Of The Yerevan State University, 2022, 11 p.

Abstract

Graph coloring problems are one of the well-known, modern, and prominent areas of research in discrete mathematics. Probably, the main reason for that is the existence of many problems in mathematics that can be formulated as coloring problems (Van der Waerden's theorem on arithmetic progression, Ramsey theory problems, factorization problems). Another reason for that is the tight relationship between graph coloring problems and scheduling theory. There are many papers devoted to vertex and edge colorings of graphs, in particular, a lot of research of such colorings with additional conditions was done during the last years. For example, different authors have considered edge colorings with restrictions on the number of distinct palettes. In 2014, M. Hornak, R. Kalinowski, M. Meszka, and M. Wozniak first introduced the palette index of graphs and investigated the proper edge colorings with the minimum number of distinct palettes. This work is devoted to studying of the proper edge colorings of graphs with the minimum number of distinct palettes. In particular, the main problems considered in this work are the problems of determining and bounding of the palette index of graphs in general as well as for special classes of graphs.

We consider finite undirected graphs without loops and multiple edges. Let $V(G)$ and $E(G)$ denote the sets of vertices and edges, respectively. A graph G *has a spanning star* if it has a spanning subgraph which is a star. A graph G is *a unicycle (bicycle)* if its cyclomatic number is one (two). *A Halin graph* is a planar graph consisting of two edge-disjoint subgraphs: a spanning tree of at least four vertices and with no vertex of degree two, and a cycle induced on the set of the leaves of the spanning tree. A bipartite graph is (a,b)*-biregular* if all vertices in one part have degree a and all vertices in the other part have degree b. Let $n_1,\dots,n_k$ be positive integers, in which 1 appears at most once. Define *the generalized theta graph*, denoted $\theta_{n_1,\dots,n_k}$, to be the graph obtained by fixing two vertices u and v, which are connected by $k>0$ internally disjoint paths with lengths $n_1,\dots,n_k$, respectively. A *nonseparable* graph is a connected, non-empty graph without cut-vertices. A *block* of a graph is a maximal nonseparable subgraph. *A block graph* is a graph where every block is a clique. Let G and H be graphs with vertices $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$ and $V(H)=\{u_1,\dots,u_m\}$. *The Cartesian product* $G\square H$ of graphs G and H is defined as follows:

$$V(G\square H)=\{(v_i,u_j)\mid 1\le i\le n, 1\le j\le m\},$$

$$E(G\square H)=\bigcup_{i=1}^{n}\{(v_i,x)(v_i,y)\mid xy\in E(H)\}\cup\bigcup_{j=1}^{m}\{(x,u_j)(y,u_j)\mid xy\in E(G)\}.$$

For every $l,m,n>1$ integers, *a* $3D$ *grid graph* $G(l,m,n)$ is the Cartesian product of the paths P_l, P_m, and P_n.

We denote by $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ the set of nonnegative integers . *A proper edge coloring* of a graph G is a mapping $\alpha: E(G)\to\mathbb{Z}_{\ge 0}$ such that $\alpha(e)\ne\alpha(e')$ for every pair of adjacent edges e and e' in G. In a proper edge coloring of a graph G, *the palette* of a vertex $v\in V(G)$ is the set of colors assigned to the edges incident to v. *The palette index* of G is the minimum number of palettes occurring in G among all proper edge colorings of G and denoted by $\check{s}(G)$.

In the dissertation, we consider problems related to the construction of proper edge colorings with the minimum number of palettes and the determining and bounding of the palette index, as well as the problems related to the complexity of determining this parameter. The main purpose of the dissertation is to study the above-mentioned problems for different classes

of graphs and design effective algorithms for constructing proper edge colorings with the minimum number of palettes. In particular, the following main results were obtained:

- We give sharp lower and upper bounds on the palette index of any graph.
- New results on the palette index of graphs having a spanning star, in particular, we derive lower and upper bounds on the palette index of complete split graphs and threshold graphs.
- For some classes of graphs, including unicycle and bicycle graphs, θ-graphs, block graphs, $3D$ grids, and some specific Halin graphs, we give sharp bounds and, for some cases, the exact values of the palette index of these graphs.
- We give some sharp upper bounds on the palette index of the fractal type and different product graphs, and in some cases, we determine the exact value of the parameter.
- We provide new results related to the complexity of the problem of determining the palette index of bipartite graphs; in particular, we show that if G is a $(r, 2r)$-biregular ($r > 2$) bipartite graph, then the problem of determining whether $\check{s}(G) = 3$ or not is an NP-complete problem.

Резюме

Задачи раскрасок графов являются одной из наиболее известных, современных и бурно развивающихся областей исследований в дискретной математике. Это главным образом обусловлено множеством задач математики, которые могут быть сформулированы как задачи раскраски (теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии, задачи теории Рамсея, задачи факторизации). Другой причиной такого бурного развития является тесная связь между задачами раскрасок графов и задачами теории расписаний. В течение последних лет было опубликовано множество статей, посвященных вершинным и реберным раскраскам графов с дополнительными ограничениями. В частности, различными авторами были рассмотрены правильные реберные раскраски графов с ограничениями на число различных палитр. Так, например, в 2014 году М. Хорнаком, Р. Калиновским, М. Мешкой и М. Возняком впервые было введено определение палитрового индекса графа и исследованы правильные реберные раскраски графов с наименьшим числом различных палитр. Настоящая работа посвящена изучению правильных реберных раскрасок графов с наименьшим числом различных палитр. В частности, главными задачами настоящего исследования являются задачи определения и оценивания палитрового индекса графов как в общем, так и принадлежащим некоторым их частным классам.

В диссертационной работе рассматриваются конечные неориентированные графы без кратных ребер и петель. Пусть $V(G)$ – множество вершин графа G, а $E(G)$ – множество ребер графа G. Граф G *имеет остовную звезду*, если у него есть остовный подграф, который является звездой. Граф G является *моноциклическим (бициклическим)*, если его цикломатическое число равно единице (двум). *Графом Халина* называется планарный граф, состоящий из двух реберно непересекающихся подграфов: остовного дерева, состоящего из не менее чем четырех вершин и не имеющего вершин степени два, а также цикла, проходящего через множество листьев остовного дерева. Двудольный граф G называется (a,b)-*бирегулярным*, если все вершины одной доли имеют степень a, а все вершины другой доли имеют степень b. Для любых натуральных чисел $n_1, \ldots, n_k$, в которых число 1 встречается не более одного раза, *обобщенный тета-граф* $\theta_{n_1,\ldots,n_k}$ получается путем фиксации двух вершин u и v, которые соединены $k > 0$ внутренне непересекающимися путями с длинами $n_1, \ldots, n_k$, соответственно. *Неразделимый граф* - связный, непустой, не имеющий точек сочленения граф. *Блок графа* – это его максимальный неразделимый подграф. *Граф блоков* – это граф, в котором каждый блок является кликой. Пусть G и H – графы с множествами вершин $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и $V(H) = \{u_1, \ldots, u_m\}$. *Декартово произведение* $G\Box H$ графов G и H определяется следующим образом:

$$V(G\Box H) = \{(v_i, u_j) \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\},$$

$$E(G\Box H) = \bigcup_{i=1}^{n} \{(v_i, x)(v_i, y) \mid xy \in E(H)\} \cup \bigcup_{j=1}^{m} \{(x, u_j)(y, u_j) \mid xy \in E(G)\}.$$

Для любых целых чисел $l, m, n > 1$ декартово произведение путей P_l, P_m и P_n называется 3-*мерным сеточным графом* и обозначается $G(l, m, n)$.

Множество целых неотрицательных чисел обозначим через $\mathbb{Z}_{\ge 0}$. *Правильной рёберной раскраской* графа G называется такое отображение $\alpha : E(G) \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$, что

$\alpha(e) \neq \alpha(e')$ для любой пары смежных ребер e и e' графа G. Для правильной реберной раскраске графа G определим *палитру* вершины $v \in V(G)$ как множество цветов ребер, инцидентных вершине v. *Палитровым индексом* $\check{s}(G)$ графа G называется минимальное число различных палитр вершин графа во множестве всех правильных реберных раскрасках графа G.

В настоящей работе рассмотрены задачи построения правильных реберных раскрасок графов с наименьшим числом различных палитр, а также задачи определения и оценивания палитрового индекса графов. Кроме того, в работе также рассмотрена сложность задачи определения палитрового индекса графа. Главной целью настоящей работы является исследование вышеуказанных задач для различных классов графов, а также разработка эффективых алгоритмов построения правильных реберных раскрасок графов с наименьшим числом различных палитр. В частности, в работе получены следующие основные результаты:

- достижимые нижние и верхние оценки палитрового индекса произвольного графа;

- новые результаты, касающиеся палитрового индекса графов с остовной звездой, в частности, получены нижние и верхние оценки палитрового индекса полных расщепленных и пороговых графов;

- для некоторых классов графов, таких как моноциклические, бициклические графы, θ-графы, графы блоков, 3-мерные сеточные графы и некоторых графов Халина достижимые оценки, а в ряде случаев точные значения палитрового индекса этих графов;

- достижимые верхние оценки палитрового индекса фрактального типа графов и графов некоторых произведений графов, а в некоторых случаях точное значение этого параметра;

- новые результаты, касающиеся сложности задачи определения палитрового индекса двудольных графов, в частности, показано, что для двудольного $(r, 2r)$-бирегулярного ($r > 2$) графа G задача определения: $\check{s}(G) = 3$ или нет, является NP-полной.