

ՔԵՆՐԻ, Մինքրոտրոնային Հետազոտությունների Ինստիտուտ

ՍԱՐԳՍՅԱՆ ԲԱԳՐԱՏ ԿԱՐԵՆԻ

ԱԶԱՏ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ԼԱԶԵՐԻ ՌԵԶՈՆԱՆՍԱՎՅԻՆ ԳԵՆԵՐԱՑՈՒՄ  
ԱԼԻՔԱՏԱՐՈՒՄ

Ա.04.20 - «Փնջերի ֆիզիկա և արագացուցչային տեխնիկա» մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի զիտական աստիճանի  
հայցման ատենախոսության

**ՄԵՂՄԱԳԻՐ**

ԵՐԵՎԱՆ 2022

---

Институт Синхротронных Исследований КЕНДЛ

ՏԱՐԳՏՅԱՆ ԲԱԳՐԱՏ ԿԱՐԵՆՈՎԻՇ

РЕЗОНАНСНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЛАЗЕРА НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ В  
ВОЛНОВОДЕ

**ԱՎՈՐԵՓԵՐԱՏ**

Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.04.20 – «физика пучков и ускорительная техника»

Երևան 2022

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Քենդլ ՍՀԻ-ի գիտական խորհրդի կողմից

**Գիտական ղեկավար՝** Ֆ.մ.գ.դ. Մ. Իվանյան

**Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝**  
Ֆ.մ.գ.դ. Մ. Հարությունյան  
Ֆ.մ.գ.թ. Գ. Հովհաննիսյան


**Առաջատար կազմակերպություն՝** Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը տեղի կունենա 2022թ. հունիսի 23-ին, ժ. 14:00-ին ՔԵՆԴԼ ՍՀԻ-ում գործող <<Փնջերի ֆիզիկա և արագացուցչային տեխնիկա>> ԲՈԿ-ի 021 մասնագիտական խորհրդի նիստում:

Հասցե՝ 0040, Երևան, Աճառյան փող., 31

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՔԵՆԴԼ ՍՀԻ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2022թ-ի մայիսի 13-ին:

021 Մասնագիտական խորհրդի քարտուղար՝  Ֆ.մ.գ.թ. Գ.Ամատունի

---

Тема диссертации утверждена в научно-техническом совете ИСИ КЕНДЛ

**Научный руководитель:** д.ф.м.н. М. Иванян


**Официальные опоненты:**  
д.ф.м.н. С. Арутюнян  
к.ф.м.н. Г. Оганесян

**Ведущая организация:** Ереванский государственный университет

Защита состоится 23 Июня 2022г. в 14:00 на заседании Специализированного совета ВАК 021 – «физика пучков и ускорительная техника» действующего при ИСИ КЕНДЛ по адресу: Армения, 0040, Ереван, ул. Ачаряна, 31

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИСИ КЕНДЛ.

Автореферат разослан «13» мая 2022г.

Ученый секретарь специализированного совета 021  к.ф.м.н. Г.Аматуни

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Разработка мощных источников когерентного излучения терагерцового диапазона на основе пучков заряженных частиц является одним из перспективных направлений современной физики пучков заряженных частиц и ускорительной техники, что открывает широкие перспективы для исследований в области наук о жизни и материаловедении. Одной из наиболее привлекательных концепций таких источников излучения является управляемый линейным ускорителем электронов лазер на свободных электронах (ЛСЭ) с самоусиливающимся спонтанным излучением (SASE) или сверхизлучающий терагерцовый ондуляторный источник, обеспечивающий высокую мощность излучения за счет когерентного излучения частиц в ондуляторе. Хотя эти когерентные источники очень эффективны, непрерывный спектр ондуляторного излучения имеет недостаточно высокую временную когерентность и относительно широкий частотный спектр.

Одним из возможных решений улучшения процесса SASE ЛСЭ является процесс внешней затравки, который подразумевает синхронизацию сигнала ЛСЭ с внешним сигналом на той же резонансной длине волны, что усиливает режим резонансного излучения и улучшает яркость выходного сигнала ЛСЭ. Альтернативным подходом является так называемая концепция SASE ЛСЭ «само-посева», когда перед насыщением излучения электронный и фотонный пучки разделяются, излучение фильтруется до достижения узкой полосы пропускания, а затем отфильтрованный сигнал рекомбинируется с электронным пучком для получения когерентного излучения. Обе концепции затравки приводят к усилению ондуляторной резонансной моды в спектре излучения, тем самым улучшая характеристики SASE ЛСЭ в УФ-диапазоне (затравка) или рентгеновском (само-посев) диапазоне длин волн.

В терагерцовом диапазоне наличие волновода может существенно изменить непрерывный спектр ондуляторного излучения, преобразовав его в дискретный. В диссертации исследуются возможности улучшения спектра терагерцового ондуляторного излучения в волноводе путем усиления одномодового возбуждения волновода.

Общий подход к излучению заряженных частиц в идеально проводящем волноводе с использованием метода модального разложения хорошо известен. Исследовались различные аспекты этой проблемы и использовались различные подходы. В частности, было рассмотрено излучение заряженной частицы в геликоидальном ондуляторе конечной длины в волноводе. Имеются также исследования когерентного ондуляторного излучения в прямоугольном волноводе в приближении продольной кильватерной функции. Было также исследовано излучение частиц в вигглере с прямоугольным волноводом и проведено сравнение спектра излучения со случаем вигглера в свободном пространстве: показано, что спектр излучения в волноводе в пределе больших радиусов преобразуется в серию острых пиков, отличающихся от непрерывного спектра излучения в свободном пространстве. Исследованы также особенности полей излучения, возбуждаемых спирально движущимся зарядом в идеально круглом волноводе под действием внешнего продольного магнитного поля.

Рассмотрено излучение заряда, движущегося по винтовой траектории внутри волновода с диэлектрическим заполнением. Ряд работ посвящен рассмотрению ондуляторного излучения в волноводе на основе параксиального и резонансного приближений.

Однако, несмотря на многочисленные исследования излучения геликоидального ондулятора в волноводах, в них отсутствуют исследования возможности усиления одиночной волноводной моды в спектре ондуляторного излучения, нет оценок влияния конечной проводимости стенок на свойства излучения и практически отсутствует рассмотрение проблемы, связанной с возникновением и последующим спиралеобразным движением частицы (или сгустка) в волноводе. Следовательно, исследования характеристик излучения частицы, движущейся под воздействием внешнего магнитного поля по спиралеобразной траектории в цилиндрическом волноводе актуальны. Этим проблемам в основном посвящена настоящая диссертационная работа.

### **Цель работы:**

Целью диссертационной работы является:

1. Исследование особенностей излучения спирального ондулятора в волноводе с идеально-проводящими стенками в терагерцовом диапазоне частот.
2. Исследование излучения частицы, мгновенно инжектируемой в бесконечный идеальный цилиндрический волновод и осуществляющей винтообразное движение.
3. Изучение спектральной яркости излучения в длинной ондуляторной цепочке с внешней периодической решеткой FODO с учетом пространственно-углового распределения электронного пучка.
4. Исследование излучения частицы, движущейся по винтообразной траектории в цилиндрическом волноводе с резистивными стенками.

### **Научная новизна работы**

1. При рассмотрении структуры «геликоидальный ондулятор – идеальный цилиндрический волновод» впервые установлено, что с помощью соответствующего подбора параметров ондулятора и волновода при заданной энергии частицы, возможна концентрация большей части излучаемой энергии в единственной волноводной моде.
2. Впервые были получены явные выражения для полей излучения частицы с переменным во времени зарядом, движущейся по винтообразной траектории в идеальном волноводе.
3. В качестве его частного случая, впервые было получено аналитическое выражение полей излучения для частицы, возникающей в волноводе и начинающей движение по винтообразной траектории.
4. По сравнению с модельным подходом с плавной фокусировкой впервые разработана новая модель, более точно описывающая зависимость яркости

излучения от набега бетатронной фазы на ячейку FODO и количества фокусирующих решеток вдоль цепочек ондуляторов.

5. Впервые получено точное решение для поля излучения винтообразно движущейся частицы в цилиндрическом волноводе со стенками, обладающими конечной проводимостью.

## **Практическая ценность**

- Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы для генерации ТГц Лазера на свободных электронах.
- Рассматриваемые структуры могут быть использованы при создании лазера на свободных электронах (ЛСЭ) на базе модифицированного комплекса AREAL в КЕНДЛ.
- Явная зависимость яркости излучения от расположения фокусирующей решетки может быть использована для оптимизации работы SASE ЛСЭ.
- Результаты, связанные с излучением переменного во времени заряда могут быть использованы для моделирования потерь заряда на молекулах остаточного газа, а также воспроизведения процесса инжекции сгустка в волновод.
- Наличие решения об излучении частицы, движущейся по спиралеобразной траектории в резистивном волноводе, позволяет моделировать процесс излучения с учетом материала, из которого изготовлен волновод, а также учитывать затухание излучения.

## **На защиту выносятся следующие основные положения:**

- Исследование перераспределения энергии излучения геликоидального ондулятора на модах цилиндрического волновода в ТГц диапазоне частот, подбор параметров для генерации доминирующей моды, содержащей большую часть излучаемой энергии.
- Изучение излучения частицы, появляющейся в цилиндрическом волноводе и начинающей движение по геликоидальной траектории.
- Исследование излучения частицы, движущейся по геликоидальной траектории в цилиндрическом волноводе с резистивными стенками.
- Разработка новой методики аналитической оценки яркости ондуляторного излучения, более точно описывающей зависимость яркости излучения от бетатронного набега на ячейку FODO и числа фокусирующих решеток вдоль ондуляторных цепочек.

## **Апробация работы**

Основные научные результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на семинарах ЕрГУ, КЕНДЛ, а также, до защиты диссертации, будут докладываться на международной конференции:

- 13<sup>th</sup> International Particle Accelerator Conference | IPAC22 (Bangkok, Thailand, June 12-17, 2022)
- International Conference on Quantum Magnetism and Statistical Mechanics of Lattice Models (Yerevan, Armenia, May 11-15, 2022)

Всего по теме диссертации опубликованы 3 работы в следующих журналах:

- Laser Physics (две статьи)
- Armenian Journal of Physics

### Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка цитируемой литературы. Основной объём работы составляет 107 страниц, включая 23 рисунка и 3 таблицы. Диссертация написана на английском языке.

### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** излагаются актуальность, цель, основные задачи, научная новизна и практическая ценность работы, перечисляются положения, выносимые на защиту, и указываются данные об апробации и публикациях по теме диссертации.

**В первой главе** рассматриваются проблемы, связанные с излучением частицы, движущейся по винтообразной траектории в идеальном волноводе. В ней, на основе полученных нами результатов, а также известных ранее решений анализируются дискретные частотные спектры излучаемой энергии, накапливаемой в волноводе при различных сочетаниях энергетических (энергии и заряда частицы), волноводных (радиуса волновода) и ондуляторных (периода ондулятора и ондуляторного параметра **K**) параметров, выявляются случаи превалирования определенной моды, что обеспечивает высокую степень монохроматического излучения в волноводе.

Вклад каждой отдельной моды в энергетический спектр излучения в волноводно-ондуляторной структуре определяется запасенной энергией на единицу длины волновода для ТМ ( $W_{mn}^{TM}$ ) и ТЕ ( $W_{nm}^{TE}$ ) мод:

$$W_{mn}^{TM} = \frac{q^2 \omega_{nm}^2 J_n^2(\alpha_{nm} r_0 / b)}{2\pi \epsilon_0 c^2 \alpha_{nm}^2 J_n'^2(\alpha_{nm})}$$

$$W_{nm}^{TE} = \frac{q^2 \omega_{nm}^2 \beta_{\perp}^2 r_0^2 J_n'^2(\alpha'_{nm} r_0 / b)}{2\pi \epsilon_0 c^2 b^2 f^2(\alpha'_{nm}) J_n^2(\alpha'_{nm}) \alpha_{nm}^2 - n^2} \quad (1)$$

Здесь  $q$  заряд частицы,  $r_0$  радиус орбиты,  $b$  радиус волновода,  $J_n(x)$  и  $J_n'(x)$  функции Бесселя первого порядка и их производные,  $x = \alpha_{nm}$  и  $x = \alpha'_{nm}$  их корни ( $J_n(\alpha_{nm}) = 0$ ,  $J_n'(\alpha'_{nm}) = 0$ ),  $n = 1, 2, 3, \dots \infty$ ;  $m = 1, 2, \dots m_{max}$ , где  $m_{max}$  определяется максимальным значением индекса  $m$ , при котором фактор  $f(x) = \sqrt{n^2 \beta_{\perp}^2 - \gamma_z^{-2} x^2 r_0^2 / b^2}$  ( $\gamma_z$  – продольный Лоренц – фактор частицы,  $\beta_{\perp} = \omega_0 r_0 / c$ ,  $\omega_0$  – частота вращения,  $c$  – скорость света в вакууме) является действительным, в

противном случае моды становятся затухающими. Частоты возбужденных мод волновода определяются выражением:

$$\omega_{nm} = n\omega_0 + V\gamma_z^2 r_0^{-1} [n\beta_z \beta_{\perp} + f(x)], \quad (2)$$

Здесь  $V$  – продольная скорость частицы,  $\beta_z = V/c$ .

При наличии волновода непрерывный спектр излучения в свободном пространстве преобразуется в дискретный и состоит из распространяющихся ТМ и ТЕ волноводных мод. На Рис.1 сравниваются спектры излучения геликоидального ондулятора в свободном пространстве и в волноводе (дискретные вертикальные линии, формула (1)) при относительно большом радиусе волновода ( $b \geq 10\text{ см}$ ).

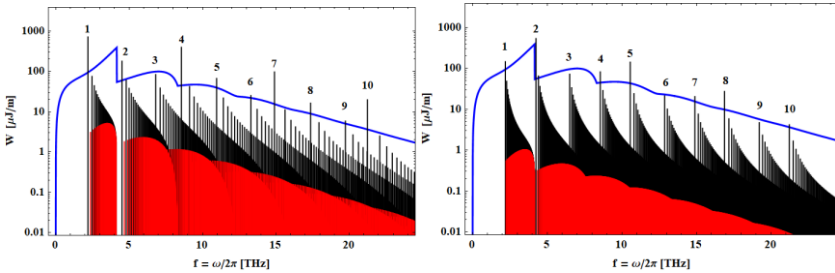


Рис. 1. Дискретный спектр излучения для ТМ (красные вертикальные линии) и ТЕ (черные вертикальные линии) мод в волноводе и в свободном пространстве (синий). Радиусы волновода  $b = 0.1\text{ м}$  (слева) и  $0.5\text{ м}$  (справа), энергия частицы 15 МэВ, параметр ондулятора  $K=0,744$ . Цифрами обозначен индекс  $n$  ( $n = 1,2,3, \dots 10$ )  $TE_{n,m}$  мод волновода.

Исследования указывают, что, как правило, при излучении преобладают ТЕ моды. При различных сочетаниях ондуляторных и волноводных параметров выявлены случаи доминирования определенной ТЕ моды, концентрирующей в себе большую часть излучаемой энергии. На Рис. 2 приводятся варианты доминирования, определенные для различных значений ондуляторного параметра  $K$  при фиксации прочих параметров (период ондулятора  $\lambda_u = 8\text{ см}$ ,  $b = 1\text{ см}$ , энергия частицы  $E = 15\text{ МэВ}$ ).

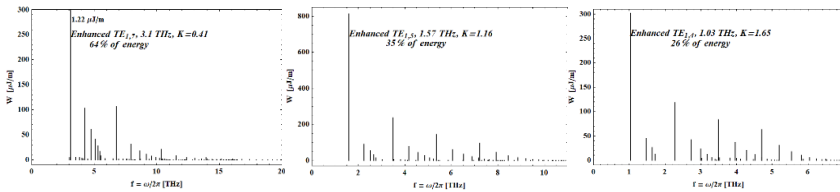


Рис.2. Усиление резонансной моды ондулятора в волноводе для различных значений  $K$ .

Таким образом, основным результатом Главы 1 является демонстрация, в рамках модели, содержащей идеальный волновод, путем соответствующего подбора параметров, возможности генерации единственной моды, содержащей большую часть

излучаемой энергии, т.е. создания мощного источника монохроматического излучения, что является необходимой предпосылкой для создания ЛСЭ. Уточнение результатов, производимое с учетом конечной проводимости стенок волновода, выполнено в Главе 4.

**Во второй Главе** рассчитано поле излучения частицы, внезапно появляющейся в идеальном волноводе и движущейся по винтообразной траектории под действием внешних магнитных полей. Определены форма и характер фронта распространяющейся волны.

Вначале рассматривается задача о точечной частице с меняющимся со временем зарядом, совершающей винтообразное движение в бесконечном идеальном цилиндрическом волноводе. Затем, в качестве частного случая, решается задача о частице, возникающей в определенный момент времени и движущейся по винтовой траектории в том же волноводе. Производится обобщение, позволяющее описывать постепенное появление сгустка заряженных частиц, моделирующее процесс его инжекции.

Рассматривается релятивистский точечный заряд с продольной скоростью  $V$  и зарядом  $Q(t)$  с произвольной зависимостью от времени, движущийся в однородном цилиндрическом волноводе радиуса  $b$  с идеально-проводящими стенками по винтообразной траектории с частотой обращения  $\omega_0$ . Плотность заряда  $\rho$  и ток  $\vec{j}$  задаются в виде:

$$\rho(r, \varphi, z, t) = qQ(t) \frac{\delta(r-a)}{\sqrt{ra}} \delta(\varphi - \omega_b t) \delta(z - Vt)$$

$$\vec{j}(r, \varphi, z, t) = (\omega_b a \vec{e}_\varphi + V \vec{e}_z) \rho(r, \varphi, z, t) \quad (3)$$

где  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_z$  орты в цилиндрических координатах,  $a$  радиус орбиты частицы.  $q$  элементарный заряд. Поле излучения определяется из волновых уравнений:

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right\} \vec{E} = \mu_0 \left\{ \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + c^2 \nabla \rho \right\}$$

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right\} \vec{H} = -\text{rot} \vec{j} \quad (4)$$

с магнитной проницаемостью вакуума  $\mu_0$ . В частотно-временной области электрические и магнитные поля ищутся в виде сочетаний цилиндрических ТМ и ТЕ мод:

$$\vec{E} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \{ \vec{E}_{nm}^{TM} + \vec{E}_{nm}^{TE} \} \quad (5)$$

Продольная и поперечная составляющие электрических и магнитных гармоник записываются в виде членов разложения по собственным функциям цилиндрического волновода, содержащим функции Бесселя первого рода:

$$\vec{E}_{nm_z}^{TM} = U_{nm} \psi_{nm}^{TM}, \psi_{nm}^{TM} = J_n \left( j_{nm} \frac{r}{b} \right) e^{jn(\varphi - \omega_0 t)} e^{jk(z - Vt)},$$

$$\vec{H}_{nm_z}^{TE} = \epsilon E_0 W_{nm} \psi_{nm}^{TE}, \psi_{nm}^{TE} = J_n \left( v_{nm} \frac{r}{b} \right) e^{jn(\varphi - \omega_0 t)} e^{jk(z - Vt)}$$



$$\vec{\mathcal{E}}_{nm}^{TM} = \{\mathcal{E}_{nm,r}^{TM}, \mathcal{E}_{nm,\varphi}^{TM}, 0\}, \quad \vec{\mathcal{H}}_{nm}^{TE} = \{\mathcal{H}_{nm,r}^{TE}, \mathcal{H}_{nm,\varphi}^{TE}, 0\}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{nm,t}^{TM} = A_{nm} \vec{\mathcal{E}}_{nm}^{TM}, \quad \vec{\mathcal{H}}_t^{TE} = D_{nm} \vec{\mathcal{H}}_{nm}^{TE}$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{nm,t}^{TM} = C_{nm} c \varepsilon_0 [\vec{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_{nm}^{TM}], \quad \vec{\mathcal{E}}_t^{TE} = -B_{nm} (c \varepsilon_0)^{-1} [\vec{e}_z \times \vec{\mathcal{H}}_{nm}^{TE}]$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{nm}^{TE} = \{\mathcal{H}_{nm,r}^{TE}, \mathcal{H}_{nm,\varphi}^{TE}, 0\} \quad \vec{\mathcal{H}}_t^{TE} = D_{nm} \vec{\mathcal{H}}_{nm}^{TE}$$

$$\mathcal{E}_{nm,r}^{TM} = \frac{\partial \psi_{nm}^{TM}}{\partial r}, \quad \mathcal{E}_{nm,\varphi}^{TM} = j \frac{n}{r} \psi_{nm}^{TM}$$

$$\mathcal{H}_{nm,r}^{TE} = \frac{\partial \psi_{nm}^{TE}}{\partial r}, \quad \mathcal{H}_{nm,\varphi}^{TE} = j \frac{n}{r} \psi_{nm}^{TE} \quad (6)$$

где  $j_{nm}$  и  $v_{nm}$  — корни функции Бесселя и ее производной соответственно. Результатом подстановки (6) в (4) являются дифференциальные уравнения второго порядка для зависящих от времени амплитуд  $U, A, B, W, C$  и  $D$ :

$$f(g_X)X_{nm} + b^2(2j\omega X'_{nm} - X''_{nm}) = F_X(jK_X Q(t) + R_X Q'(t)),$$

$$X = U, A, B, W, C, D \quad (7)$$

где

$$f(g_X) = c^2(g_X^2 + b^2k^2) - b^2\omega^2 = b^2(\tilde{\omega}_N^2 - \omega^2),$$

$$\tilde{\omega}_N = \sqrt{c^2 g_X^2 / b^2 + k^2}, \quad (8)$$

$g_X = j_{nm}$  для ТМ мод и  $g_X = v_{nm}$  для ТЕ мод.

Далее в (7):

$$F_U = -q\mu_0 \frac{c^2 J_n(j_{nm} \frac{a}{b})}{2\pi^2 J_{n+1}^2(j_{nm})}, \quad F_A = -jq\mu_0 \frac{c^2 J_n(j_{nm} a/b)}{2\pi^2 j_{nm}^2 J_{n+1}^2(j_{nm})},$$

$$F_B = -q\mu_0 \frac{bac^2 \omega_b v_{nm}}{2\pi^2 v_{nm}^2 - n^2} \frac{J'_n(v_{nm} a/b)}{J_n^2(v_{nm})}, \quad F_W = jq \frac{2ac\omega_b}{b\varepsilon_0} \frac{v_{nm}^3}{v_{nm}^2 - n^2} \frac{J'_n(v_{nm} a/b)}{J_n^2(v_{nm})},$$

$$F_C = jq \frac{2c j_{nm}^2 V - b^2 kn\omega_b J_n(j_{nm} a/b)}{\varepsilon_0 J_{n+1}^2(j_{nm})} \frac{J'_n(j_{nm} a/b)}{j_{nm}^2}, \quad F_D = -q \frac{2abck\omega_b}{\varepsilon_0} \frac{v_{nm}}{v_{nm}^2 - n^2} \frac{J'_n(v_{nm} a/b)}{J_n^2(v_{nm})},$$

$$K_U = c^2 k - V\omega, \quad R_U = V, \quad K_A = c^2 j_{nm}^2 - b^2 n\omega_b \omega, \quad R_A = b^2 n\omega_b,$$

$$K_B = \omega, K_W = 1, \quad R_W = 0, \quad R_B = -1, K_C = 1, \quad K_D = 1, \quad R_D = 0, R_C = 0, \quad (9)$$

Уравнение (7) является дифференциальным уравнением второго порядка. Его полное решение может быть составлено из частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения (с нулевой правой частью). Решение неоднородного уравнения (7) можно получить, представив амплитуды  $X_{nm}$  и функцию  $Q(t)$  через образы  $\tilde{X}_{nm}$  и  $\tilde{Q}_{nm}$  преобразования Лапласа по времени:

$$X_{nm} = \int_0^\infty \tilde{X}_{nm} e^{-at} da, \quad Q(t) = \int_0^\infty \tilde{Q}_{nm} e^{-at} da \quad (10)$$

После подстановки имеем:

$$\tilde{X}_{nm}(\alpha) = F_X \tilde{Q}(\alpha) P_X(\alpha),$$

$$P_X(\alpha) = (jK_X - \alpha R_X) / (f(g_X) - b^2(2j\omega\alpha + \alpha^2)) \quad (11)$$

Зависимость амплитуды от времени определяется с помощью обратного преобразования Лапласа от координаты  $\alpha$  во временную область. Для всех шести компонент решение имеет одинаковый вид:

$$X(t) = F_X \mathcal{L}_t^{-1}\{\tilde{Q}(\alpha) P_X(\alpha)\}, \quad X = U, A, B, W, C, D \quad (12)$$

Явное решение можно получить, подставив в (12) образ Лапласа  $\tilde{Q}(\alpha)$  конкретной функции  $Q(t)$ .

Рассмотрим теперь процесс инжекции одиночной точечной частицы, появляющейся в момент времени  $t=0$  в точке  $r = a, z = 0, \varphi = 0$  внутри волновода и приводимой в движение по винтовой траектории внешними магнитными полями. Явление мгновенного появления заряженной точечной частицы описывается использованием в выражениях (3) для зарядов и токов в качестве функции  $Q(t)$  ступенчатой функции:  $Q(t) = \chi(t)$ , где  $\chi(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $\chi(t) = 1$  при  $t \geq 0$ . Образ Лапласа ступенчатой функции имеет вид:

$$\tilde{\chi}(\alpha) = \mathcal{L}_\alpha\{\chi(t)\} = \alpha^{-1}. \quad (13)$$

Производная ступенчатой функции при  $t > 0$  равна нулю. Из формы уравнения (7) следует, что и  $R_X$  в (11) можно приравнять к нулю. Следовательно, из (12) имеем:

$$X_N(t) = j \frac{F_N K_N}{f(g_N)} \left\{ 1 - e^{-j\omega t} \left( \cos(\tilde{\omega}_N t) + j \frac{\omega}{\tilde{\omega}_N} \sin(\tilde{\omega}_N t) \right) \right\} \quad (14)$$

Первый член в (14) совпадает с выражением для стационарного решения в бесконечном волноводе.

Коэффициент  $u_0 = b^2 / f(g_N)$  можно представить в виде суммы двух членов:

$$u_0 = \frac{1}{(k_1 - k_2)(k - k_1)} - \frac{1}{(k_1 - k_2)(k - k_2)} \quad (15)$$

С другой стороны,  $u_0 = u_1 + u_2$ , где

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{k}{k_1(k_1 - k_2)(k - k_1)} - \frac{k}{k_2(k_1 - k_2)(k - k_2)} \\ u_2 &= \frac{1}{k_2(k_1 - k_2)} - \frac{1}{k_1(k_1 - k_2)} = \frac{1}{k_1 k_2} \end{aligned} \quad (16)$$

Где, в свою очередь

$$k_{1,2} = \frac{bVn\omega_0 \pm c \sqrt{b^2 n^2 \omega_0^2 - g_N^2 (c^2 - V^2)}}{b(c^2 - V^2)} \quad (17)$$

являются корнями уравнения  $f(g_N) = 0$  относительно  $k$ .

Теперь (14) можно представить следующим образом:

$$X_N(t) = jF_N K_N u_0 - e^{-j\omega t} Z(k) u_1 - e^{-j\omega t} Z(k) u_2 + e^{-j\omega t} Z_0(k) \quad (18)$$

$$Z(k) = jF_N K_N \left\{ \cos(\tilde{\omega}_N t) + j \frac{\omega}{\tilde{\omega}_N} \sin(\tilde{\omega}_N t) \right\}$$

$$Z_0(k) = A_0(k) \cos(\tilde{\omega}_N t) + B_0(k) \sin(\tilde{\omega}_N t) \quad (19)$$

где (19) — общее решение однородного уравнения для амплитуд (с нулевой правой частью)

$$G_X = f(g_X) X_{nm} + b^2 (2j\omega X'_{nm} - X''_{nm}) = 0 \quad (20)$$

с пока не определенными коэффициентами  $A_0(k)$  и  $B_0(k)$ .

Переход в пространственно-временную область осуществляется с помощью обратного преобразования Фурье по переменной  $k$ :

$$X_N(t) = X_N^{(0)}(t) + X_N^{(1)}(t) + X_N^{(2)}(t) + X_N^{(3)}(t) \quad (21)$$

$$X_N^{(0)}(t) = jF_N \int_{-\infty}^{\infty} K_N u_0 e^{j(\omega t - kz)} dk, \quad X_N^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(k) u_1 e^{-jkz} dk$$

$$X_N^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(k) u_2 e^{-jkz} dk, \quad X_N^{(3)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_0(k) e^{-jkz} dk \quad (22)$$

Подынтегральная функция  $X_N^{(0)}(t)$  является аналитической функцией на всей комплексной плоскости  $k$ , за исключением точек  $k = k_1$  и  $k = k_2$ , соответствующих двум простым полюсам, лежащим на вещественной оси. Его значение (в смысле главного значения) определяется вычетами этих полюсов обычным образом.

Подынтегральная функция  $X_N^{(1)}(t)$  имеет те же полюса, но не является аналитической функцией. Результат интегрирования по краям разрезов, исходящих из точек ветвления  $k = \pm j g_N / b$ , следует прибавить к значению от вкладов от полюсов. Асимптотически этот вклад может быть рассчитан методом перевала или методом стационарной фазы. Легко видеть, что вклад полюсов в интеграл  $X_N^{(1)}(t)$  полностью компенсирует интеграл  $X_N^{(0)}(t)$  а дополнительный вклад от интеграла  $X_N^{(1)}(t)$  (рассчитанный, например, методом стационарной фазы), компенсируются соответствующим подбором амплитуд  $A_0(k)$  и  $B_0(k)$  в интеграле  $X_N^{(3)}(t)$ . Только третий член  $X_N^{(2)}(t)$  в (20) остается отличным от нуля. Он не содержит полюсов и его подынтегральная функция не является аналитической функцией. Этот интеграл

$$X_N^{(2)}(t) = \frac{jF_U}{k_1 k_2} \int_{-\infty}^{\infty} K_U \{ \cos(\tilde{\omega}_N t) + j \frac{\omega}{\tilde{\omega}_N} \sin(\tilde{\omega}_N t) \} e^{-jkz} dk \quad (23)$$

может быть представлен в явном виде. В частности, для продольной электрической составляющей  $E_z$  имеем:

$$E_z = \frac{jF_U}{k_1 k_2} \left\{ \mathcal{M}_0 J_0 \left[ \frac{j_{nm}}{b} \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right] + \mathcal{M}_1 J_1 \left[ \frac{j_{nm}}{b} \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right] \right\} \quad (24)$$

при  $c^2 t^2 > z^2$  и  $E_z = 0$  при  $c^2 t^2 < z^2$ . В (24) введены следующие обозначения:

$$\mathcal{M}_0 = -j\frac{\pi}{c} \left\{ Vn^2\omega_0^2 - z(c^2t + j_{nm}Vz) \frac{j_{nm}(c^2 - V^2)}{b^2(c^2t^2 - z^2)} \right\}, \quad \mathcal{M}_1 = \frac{\Re_1 + j\Re_2}{bc(c^2t^2 - z^2)^{3/2}},$$

$$\Re_1 = n\pi\omega_0(c^2t^2 - z^2)(V(j_{nm}Vz + c^2t) - zj_{nm}(c^2 - V^2)),$$

$$\Re_2 = -\pi(c^2 - V^2)(z(j_{nm}Vz + c^2t) + c^2t(j_{nm}Vt + z)), \quad (25)$$

$J_l(x)$  ( $l = 0, 1, 2, n$ ) являются функциями Бесселя первого порядка. При расчетах использовалось следующее соотношение:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left[t\sqrt{f^2+x^2}\right]}{\sqrt{f^2+x^2}} \cos(xy) dx = \frac{\pi}{2} \begin{cases} J_0\left[f\sqrt{t^2-y^2}\right], & 0 < y < b \\ 0, & b < y < \infty \end{cases} \quad (26)$$

В отличие от случая однородного движения в бесконечном волноводе, в рассматриваемом случае волновод заполняется энергией по мере движения частицы в волноводе. Фронт распространяющейся волны определяется равенством  $ct = z$ . Заметим, что составляющая поля (24) стремится к конечному пределу при  $ct \rightarrow z$ .

Для наличия излучения в некоторой точке наблюдения  $r, \varphi, z$  внутри волновода должен соблюдаться принцип причинности, требующий выполнения следующих соотношений:

$$l_1/V + l_2/c = t, \quad l_1 + l_2 \cos \alpha = z \quad (27)$$

Здесь  $l_1$  — расстояние по оси  $z$ , указывающее на положение частицы в некоторый момент времени  $t' < t$ , где  $t$  — время, за которое излучение достигает точки наблюдения  $r, \varphi, z$ ,  $l_2$  — расстояние между частицей и точкой наблюдения,  $\alpha$  — угол между отрезком, соединяющим частицу и точку наблюдения, и осью волновода. Из (27) следует:

$$l_1 = \frac{V(ct \cos \alpha - z)}{c \cos \alpha - V}, \quad l_2 = \frac{c(z - tV)}{c \cos \alpha - V} \quad (28)$$

В свою очередь, из (26) следует: если  $l_{1,2} > 0$ :

- 1) излучение вперед сосредоточено в области  $ct > z > tV$ ,
- 2) излучение сосредоточено вблизи оси волновода в пределах конического угла

$$\alpha \leq \min \left\{ \sqrt{2/(1 - V^2/c^2)}, \sqrt{1 - (z/ct)^2} \right\} \quad (29)$$

Частотные характеристики излучения можно определить, анализируя подынтегральную функцию в формуле (23). При произвольном значении функции  $f(j_{nm})$  это быстро осциллирующая функция, а при  $f(j_{nm}) = 0$  осцилляции остаются только в фазе и ее модуль медленно меняется с частотой. По этой причине его частотное распределение характеризуется резкими пиками на частотах, определяемых уравнением  $f(j_{nm}) = 0$ . Таким образом, резонансные частоты остаются такими же, как и при стационарном движении частицы в бесконечном волноводе.

Выведенная формула (25) описывает узконаправленное излучение. Процесс возникновения и последующего распространения произвольного сгустка длины  $t_0$  можно описать сверткой выражения для поля точечной частицы (25) с функцией  $f_z(t)$  продольного распределения заряда в сгустке:

$$E_z^b(t) = \int_0^{t_u} f_z(t - t') E_z(t') dt' \quad (30)$$

Здесь  $t_u = t$  при  $t \leq t_0$  и  $t_u = t_0$  при  $t > t_0$ .

Мы получили явное выражение только для продольной электрической составляющей (25). Аналогично можно рассчитать остальные составляющие по уравнениям (9).

Результаты настоящей главы позволяют детально проследить процессы излучения сгустков в геликоидальном ондуляторе, совмещенном с волноводом, их развитие при инжекции, последующем распространении и после выхода из открытого конца волновода. Они будут способствовать созданию математических моделей работы ондуляторно-волноводной структуры, близких к реальности.

Результаты, связанные с переменным во времени зарядом, могут найти применение при учете потерь частиц за счет рассеяния на стенках волновода и рассеяния на молекулах остаточного газа.

Материал **третьей главы** связан с функционированием цепочки ондуляторов, находящихся под внешним фокусирующим полем и встроенных в конкретную структуру ускорителя в качестве внешних устройств. Рассмотрены условия, при которых достигается максимальная светимость (основное требование к источникам синхротронного излучения) при возникновении режима самовозбуждения и активного взаимодействия электронного и фотонного пучков.

Рассматривается длинная цепочка ондуляторов с внешней периодической FODO решеткой. Спектральная яркость излучения оценивается с учетом пространственно-углового распределения электронного пучка. Используя в качестве примера экспериментальную станцию European XFEL SASE1, численно рассчитана яркость излучения для схемы, содержащей цепочку фокусирующих решеток. Произведено сравнение с результатами аналитических прогнозов.

Для длинной цепочки ондуляторов с внешними периодическими фокусирующими решетками FODO, средний поперечный размер и расходимость электронного пучка определяются набегом фазы на ячейку и длиной ячейки. Для аналитической оценки характеристик яркости использовалась модель тонкой линзой. По сравнению с моделью плавной фокусировки оптимальная яркость теперь явно зависит от бетатронного опережения фазы на ячейку и количества решеток FODO вдоль цепочки ондулятора.

Результаты сравниваются с яркостью излучения лазера на свободных электронах (ЛСЭ) с самоусиливающейся спонтанной эмиссией (SASE) в длинной ондуляторной цепочке. Поскольку работа SASE ЛСЭ обусловлена эффективным взаимодействием электронного и фотонного пучков в ондуляторной цепочке, мы полагаем, что полученная нормированная яркость в зависимости от бетатронного набега фазы и количество ячеек FODO качественно описывает зависимость яркости SASE ЛСЭ от

структуры внешней фокусирующей решетки. Приведено сравнение аналитического прогноза и численного моделирования для секции ондуляторов European XFEL SASE 1.

**В четвертой главе** рассчитано поле излучения частицы, движущейся по винтообразной траектории в цилиндрическом волноводе с резистивными стенками. Исследуется деформация энергетического спектра излучения вследствие конечной проводимости стенок. В настоящей главе получены явные выражения для полей излучения.

Рассмотрим релятивистский точечный заряд  $q$  с продольной скоростью  $V$  и частотой обращения  $\omega_0$ , движущийся по винтовой траектории в бесконечном цилиндрическом волноводе с резистивной стенкой и внутренним радиусом  $b$ . Плотность заряда  $\rho$  и ток  $\vec{j}$  по прежнему задаются формулой (3) главы 2, где теперь  $Q(t) \equiv 1$ .

Поиск решения осуществляется в виде суперпозиции частного решения  $\vec{E}_n^0, \vec{H}_n^0$  неоднородных уравнений Максвелла и общего решения  $\vec{E}_n^i, \vec{H}_n^i$  однородных уравнений Максвелла в форме мультипольных разложений по ТМ и ТЕ составляющим полей излучения точечной заряженной частицы:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ \vec{E}_n^0 + \vec{E}_n^i \}, \quad \vec{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \vec{H}_n^0 + \vec{H}_n^i \}, \\ \vec{E}_n^0 &= \vec{E}_n^{0,TM} + \vec{E}_n^{0,TE}, \quad \vec{H}_n^0 = \vec{H}_n^{0,TM} + \vec{H}_n^{0,TE} \\ \vec{E}_n^i &= \vec{E}_n^{i,TM} + \vec{E}_n^{i,TE}, \quad \vec{H}_n^i = \vec{H}_n^{i,TM} + \vec{H}_n^{i,TE} \end{aligned} \quad (2)$$

В основе решений лежат векторные цилиндрические гармоники, содержащие функции Бесселя  $J_n$  и Ганкеля  $H_n^{(1)}$  первого рода:

$$\begin{aligned} \vec{e}_j &= \{ (\alpha r)^{-1} n J_n(\alpha r), j J_n'(\alpha r), 0 \} \exp(\psi_n), \\ \vec{e}_H &= \{ (\alpha r)^{-1} n H_n^{(1)}(\alpha r), j H_n^{(1)'}(\alpha r), 0 \} \exp(\psi_n), \\ \alpha &= \begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - k^2}, & r > b \\ \alpha_0 = \sqrt{\omega^2 / c^2 - k^2}, & r < b \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

В (4)  $\alpha$  - поперечное волновое число,  $\psi_n = k(z - vt) + n(\varphi - \omega_0 t)$  - фазовый коэффициент, где  $k = (\omega - n\omega_0)/V$  - продольное волновое число. В качестве частного решения неоднородных уравнений Максвелла берется решение для излучения частицы, движущейся по винтообразной траектории в свободном пространстве:

$$\vec{E}_n^0 = \vec{E}_n^{0,TM} + \vec{E}_n^{0,TE}, \quad \vec{H}_n^0 = \vec{H}_n^{0,TM} + \vec{H}_n^{0,TE} \quad (5)$$

$$\vec{E}_n^{0,TM} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{H,n}^{0,TM} \\ \vec{E}_{J,n}^{0,TM} \end{pmatrix} = \begin{cases} A_{H,n}^{0,TM} \text{rot } \vec{e}_H, & r > a \\ A_{J,n}^{0,TM} \text{rot } \vec{e}_j, & r < a \end{cases}, \quad \vec{H}_n^{0,TM} = \begin{pmatrix} \vec{H}_{H,n}^{0,TM} \\ \vec{H}_{J,n}^{0,TM} \end{pmatrix} = \begin{cases} B_{H,n}^{0,TM} \vec{e}_H, & r > a \\ B_{J,n}^{0,TM} \vec{e}_j, & r < a \end{cases}$$

$$\vec{E}_n^{0,TE} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{H,n}^{0,TE} \\ \vec{E}_{J,n}^{0,TE} \end{pmatrix} = \begin{cases} A_{H,n}^{0,TE} \vec{e}_H, & r > a \\ A_{J,n}^{0,TE} \vec{e}_J, & r < a \end{cases}, \quad \vec{H}_n^{0,TE} = \begin{pmatrix} \vec{H}_{H,n}^{0,TE} \\ \vec{H}_{J,n}^{0,TE} \end{pmatrix} = \begin{cases} B_{H,n}^{0,TE} \text{rot } \vec{e}_H, & r > a \\ B_{J,n}^{0,TE} \text{rot } \vec{e}_J, & r < a \end{cases} \quad (6)$$

Амплитуды  $A_{H(J),n}^{0,TM(TE)}$ ,  $B_{H(J),n}^{0,TM(TE)}$  остаются неопределенными. Для их определения следует использовать граничные условия, устанавливающие связь между полями по обе стороны поверхности  $r = a$ , содержащей заряды  $\rho = q$  и токи  $\vec{j} = q\{0, \omega_b a, v\}$ . Условия разрывности полей на поверхности  $r = a$  сводятся к двум системам уравнений (для ТМ (7) и ТЕ (8) мод):

$$\begin{aligned} 1) \quad & E_{H,z}^{TM} - E_{J,z}^{TM} = 0 & -E_{H,\varphi}^{TE} + E_{J,\varphi}^{TE} &= 0 \\ 2) \quad & -E_{H,\varphi}^{TM} + E_{J,\varphi}^{TM} = 0 & H_{H,z}^{TE} - H_{J,z}^{TE} &= q\chi_n j_{n,\varphi}^{TE} \\ 3) \quad & -H_{H,\varphi}^{TM} + H_{J,\varphi}^{TM} = q\chi_n j_{n,z}^{TM}, & -H_{H,\varphi}^{TE} + H_{J,\varphi}^{TE} &= q\chi_n j_{n,z}^{TE} \\ 4) \quad & \varepsilon_0(E_{H,r}^{TM} - E_{J,r}^{TM}) = q\chi_n \rho_n^{TM} & \varepsilon_0(E_{H,r}^{TE} - E_{J,r}^{TE}) &= q\chi_n \rho_n^{TE} \\ 5) \quad & H_{H,r}^{TM} - H_{J,r}^{TM} = 0 & H_{H,r}^{TE} - H_{J,r}^{TE} &= 0 \end{aligned} \quad (7) \quad (8)$$

В (7) и (8) вводятся нормированные компоненты токов  $j_{n,z}^{TM}$ ,  $j_{n,\varphi}^{TE}$ ,  $j_{n,z}^{TE}$  ( $j_z^{TM} + j_z^{TE} = V$ ) и заряды  $\rho_n^{TM}$ ,  $\rho_n^{TE}$  ( $\rho_n^{TM} + \rho_n^{TE} = 1$ ), ответственные за формирование ТМ и ТЕ мод  $n$ -й гармоники, и весовой коэффициент  $\chi_n$ . Каждая из систем (7) и (8) содержит пять уравнений и четыре определяемые амплитуды. Составляющие токов и зарядов определяются из условий совместности всех уравнений, входящих в системы (7) и (8):  $j_z^{TE} = kn\omega_0/\alpha_0^2$ ,  $j_{\varphi}^{TE} = \omega_0 a$ ,  $\rho_n^{TE} = n\omega_0\omega/c^2\alpha_0^2$ . Ниже приводятся окончательные выражения для амплитуд:

$$\begin{aligned} A_{n,J}^{0,TM} &= -jq \frac{\pi}{2} \frac{\alpha\chi_n}{\alpha_0 c^2 \varepsilon_0} (V\omega - c^2 k) H_n^{(1)}(\alpha_0 a), & B_{n,J}^{0,TM} &= -j\varepsilon_0 \omega A_{n,J}^{0,TM} \\ A_{n,H}^{0,TM} &= -jq \frac{\pi}{2} \frac{\alpha\chi_n}{\alpha_0 c^2 \varepsilon_0} (V\omega - c^2 k) J_n(\alpha_0 a), & B_{n,H}^{0,TM} &= -j\varepsilon_0 \omega A_{n,H}^{0,TM} \\ A_{n,J}^{0,TE} &= jq \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2 \chi_n \omega \omega_0}{c^2 \varepsilon_0} H_n^{(1)}(\alpha_0 a), & A_{n,H}^{0,TE} &= jq \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2 \chi_n \omega \omega_0}{c^2 \varepsilon_0} J_n'(\alpha_0 a) \\ B_{n,J}^{0,TE} &= -j A_{n,J}^{0,TE} / \omega \mu_0, & B_{n,H}^{0,TE} &= -j A_{n,H}^{0,TE} / \omega \mu_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Полное поле излучения частицы во внутренней области волновода ( $0 \leq r \leq b$ ) представляется в виде суммы общего решения уравнений Максвелла с неопределенными амплитудами и определенного выше частного решения (поля излучения частицы в свободном пространстве (6), (9)):

$$\begin{aligned} \vec{E}^{in} &= \vec{E}^{1,TM} + \vec{E}^{1,TE} + \vec{E}^{0,TM} + \vec{E}^{0,TE} \\ \vec{H}^{in} &= \vec{H}^{1,TM} + \vec{H}^{1,TE} + \vec{H}^{0,TM} + \vec{H}^{0,TE} \end{aligned} \quad (10)$$

Поля  $\vec{E}^{0,TM}$ ,  $\vec{E}^{0,TE}$  определяются с помощью (6), (9), а поля  $\vec{E}^{1,TM}$ ,  $\vec{E}^{1,TE}$  ищутся в форме:

$$\vec{E}^{1,TM} = A_n^{1,TM} \text{rot } \vec{e}_J, \quad \vec{H}^{1,TM} = -j A_n^{1,TM} \varepsilon_0 \omega \vec{e}_J,$$

$$\vec{E}^{1,TE} = A_n^{1,TE} \vec{e}_j, \quad \vec{H}^{1,TE} = -j A_n^{1,TE} / (\mu_0 \omega) \text{rot } \vec{e}_j, \quad (11)$$

Поле в стенке волновода представляется следующим образом:

$$\vec{E}^{out} = \vec{E}^{2,TM} + \vec{E}^{2,TE}, \quad \vec{H}^{out} = \vec{H}^{2,TM} + \vec{H}^{2,TE} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^{2,TM} &= A_n^{2,TM} \text{rot } \vec{e}_H, \quad \vec{H}^{2,TM} = -j A_n^{2,TM} \varepsilon_1 \omega \vec{e}_H, \\ \vec{E}^{2,TE} &= A_n^{2,TE} \vec{e}_H, \quad \vec{H}^{2,TE} = -j A_n^{2,TE} / (\mu_1 \omega) \text{rot } \vec{e}_H, \end{aligned} \quad (13)$$

Далее осуществляется сшивка тангенциальных составляющих электрических и магнитных полей (10) и (12) на стенке волновода. Это приводит к системе четырех линейных уравнений для амплитуд  $A_n^{1,TM}$ ,  $A_n^{1,TE}$ ,  $A_n^{2,TM}$  и  $A_n^{2,TE}$  с решением:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2, \quad \hat{A}_{1,2} = \{A_{n_{1,2}}^{1,TM}, A_{n_{1,2}}^{1,TE}, A_{n_{1,2}}^{2,TM}, A_{n_{1,2}}^{2,TE}\} \\ A_{n_1}^{1,TM} &= jq \frac{\pi}{2} a \chi_n C_u \tilde{J}_n \frac{W_{\varepsilon\mu}}{\alpha_0 c^2 \varepsilon_0 D}, \quad A_{n_1}^{1,TE} = qa \chi_n kn \mu_0 \frac{C_u \alpha_1^2 \alpha_{01} H_n^2 \tilde{J}_n \omega^2}{\alpha_0 c^2 D}, \\ A_{n_1}^{2,TM} &= -qa \chi_n b \frac{C_\omega \alpha_0^2 \alpha_1^2 \tilde{J}_n I_\mu \omega^2}{\alpha_0 c^2 D}, \quad A_{n_1}^{2,TE} = qa \chi_n kn \mu_1 \frac{C_\omega \alpha_1 \alpha_{01}^2 H_n J_n \tilde{J}_n \omega^2}{c^2 D}, \\ A_{n_2}^{1,TM} &= -qa^2 \alpha_1^2 \alpha_{01} \chi_n \frac{\tilde{J}_n H_n^2 kn \omega \omega_0}{c^2 \varepsilon_0 D}, \quad A_{n_2}^{1,TE} = -jq \frac{\pi}{2} \chi_n ka^2 \omega \omega_0 \tilde{J}_n' \frac{W_{\mu\varepsilon}}{c^2 \varepsilon_0 D} \\ A_{n_2}^{2,TM} &= -qa^2 \chi_n kn \omega \omega_0 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_{01} \frac{\tilde{J}_n H_n J_n}{c^2 \varepsilon_0 D}, \quad A_{n_2}^{2,TE} = q \mu_1 \chi_n ba^2 \omega^3 \omega_0 \alpha_0^2 \alpha_1^2 \frac{\tilde{J}_n I_\mu}{c^2 \varepsilon_0 D} \end{aligned} \quad (14)$$

В пределе идеального волновода ( $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ ) ненулевыми в (14) остаются амплитуды  $A_{n_1}^{1,TM}$  and  $A_{n_2}^{1,TE}$ , соответствующие полям, распространяющимся внутри волновода:

$$A_{n_1}^{1,TM} = jq \frac{\pi}{2} \frac{a \chi_n C_u H_n^{(3)}(\alpha_0 b) J_n(\alpha_0 a)}{\alpha_0 c^2 \varepsilon_0 J_n(\alpha_0 b)}, \quad A_{n_2}^{1,TE} = -jq \frac{\pi}{2} \omega \omega_0 \frac{a^2 \chi_n H_n^{(3)'}(\alpha_0 b) J_n'(\alpha_0 a)}{c^2 \varepsilon_0 J_n(\alpha_0 b)} \quad (15)$$

Полное решение для идеального волновода представляет собой сумму общего решения (11), (15) и частного решения (6), (9). Для сравнения с существующим решением для идеального волновода полученное предельное решение было разложено по собственным функциям идеального волновода. Обнаружено наличие дополнительного полюса при  $\alpha_0 = 0$  в полученном решении. С целью исключения его вклада, функции  $\chi_n$  придается вид

$$\chi_n = a^{-1} \left\{ 1 - 4^n \Gamma^2(n) n \frac{J_n(\alpha_0 b) J_n'(\alpha_0 b)}{(\alpha_0 b)^{2n-1}} \right\}, \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad (16)$$

который не искажает вклады полюсов при  $\alpha_0^2 = j_{nm}^2$ ,  $J_n(J_{nm}) = 0$  (ТМ моды) и  $\alpha_0^2 = \nu_{nm}^2$ ,  $J_n'(\nu_{nm}) = 0$  (ТЕ моды). Переход к пространственно-временному представлению (интегрирование по частоте в смысле главного значения) в обоих случаях дает один и тот же результат.

Энергия излучения мультиполя, накопленная в волноводе, определяется по формуле (перекрестные члены не учитываются из-за их пренебрежимо малого вклада):

$$\varepsilon_n = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_n(\omega) d\omega, \quad (17)$$



$$\mathcal{W}_n(\omega) = \frac{2\pi}{v} \int_0^b \left\{ \varepsilon_0 |\vec{E}^{1, TM} + \vec{E}^{1, TE}|^2 + \mu_0 |\vec{H}^{1, TM} + \vec{H}^{1, TE}|^2 \right\} r dr, \quad (18)$$

где  $\mathcal{W}_n(\omega)$  спектральная плотность энергии, накопленной в волноводе. Используется связь между параметром ондулятора  $K$ , периодом ондулятора  $l_u$  и фактором Лоренца  $\gamma$  частицы с радиусом орбиты  $a = l_u K / 2\pi\gamma$ , продольной скоростью  $V = c\{1 - (1 + K^2)/2\pi\gamma^2\}$  и частотой вращения  $\omega_0 = 2\pi V / l_u$ . В расчетах (Рис.3-5) использовались следующие значения параметров:  $b = 1$  см,  $K = 0.42$ ,  $l_u = 8$  см,  $\gamma = 29.35$ ,  $q = 10$  pC и  $\sigma = 58 \cdot 10^6 \Omega^{-1} m^{-1}$  (медь). На рис.3 показано спектральное распределение дипольной моды ( $n = 1$ ), рассчитанное по этим параметрам, обеспечивающее терагерцовое излучение как в области, расположенной впереди частицы ( $z - Vt > 0$ ), так и в обратном направлении ( $z - Vt < 0$ ). Пики выше уровня  $1$  nJ · sec составляют ТЕ-моды. Другой ряд с пиками менее  $1$  nJ · sec соответствует ТМ модам. Как и в идеальном волноводе, преобладают ТЕ-моды. На Рис. 4 сравниваются спектры резонансных частот идеально проводящего и медного волноводов, представленные в пространственно-временной области. Поля в этом представлении получаются путем интегрирования спектрального распределения компонент поля (11), (14) по частоте с использованием вкладов вычетов (при  $D = 0$ ) на комплексной плоскости. Происходит перекрытие частот и повторение профиля на более низком уровне (из-за конечной проводимости стенок). В обоих случаях большую часть энергии аккумулирует мода  $TE_{1,7}$ .

Для резистивного волновода важным параметром является коэффициент затухания моды  $\beta_{n,i} = \text{Im}\{\omega_{n,i}\}/V$ , где  $\omega_{n,i}$  — корни дисперсионного уравнения  $D = 0$ . Как видно из Рис.5, ТМ-моды имеют значительно большее затухание, чем ТЕ-моды. Обратное излучение затухает слабее. Мода  $TE_{1,6}$  имеет минимальное затухание в области, находящейся впереди частицы.



Рисунок 3: Спектральное распределение излучения дипольной моды ( $n=1$ ) в волноводе с медными стенками; излучение вперед (справа) и назад (слева).

возможности для исследований по оптимизации параметров конструкции в зависимости от ее назначения. Решение может быть распространено на двухслойные и многослойные волноводы.

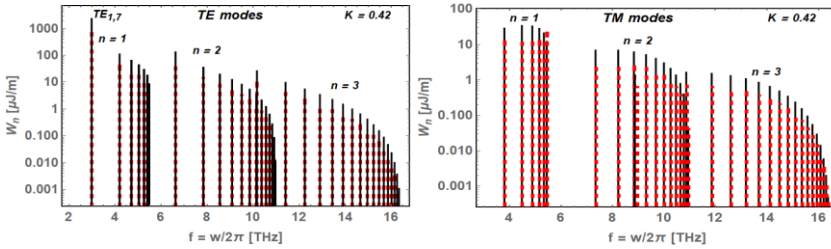


Рисунок 4: Спектральное распределение накопленной энергии излучения (пространственно-временная область, прямое направление,  $z - Vt \rightarrow 0_+$ ) для первых трех мультиполей ( $n=1,2,3$ ) для TE (слева) и ТМ (справа) мод в медном (красные пунктирные линии) и идеальном (черные сплошные линии) волноводах.

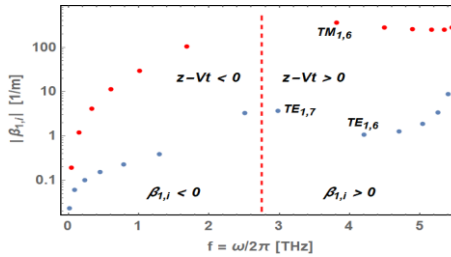


Рисунок 5: Коэффициенты затухания для TE (синий) и ТМ (красный) мод на резонансных частотах при  $n=1$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. При рассмотрении структуры «геликоидальный ондулятор – идеальный цилиндрический волновод» было установлено, что с помощью соответствующего подбора параметров ондулятора и волновода при заданной энергии частицы, возможна концентрация большей части излучаемой энергии в единственной волноводной моде. Тем самым впервые установлена возможность создания узкополосного источника монохроматического излучения в ТГц области частот (при достаточно малых размерах радиуса волновода порядка 1 см) и на его основе – создания лазера на свободных электронах (ЛСЭ). Попутно выведены явные выражения для плотностей энергии, накапливаемой в волноводе и концентрируемой в каждой из собственных мод волновода с идеально-проводящими стенками.

2. Установлены некоторые закономерности: наблюдается явное превалирование  $TE_{nm}$  мод над  $TM_{nm}$  модами, т.е. в  $TE_{nm}$  модах содержится большая часть энергии, излучаемой частицей, причем, наибольшей интенсивностью обладают моды  $TE_{1,m}$  (с наименьшим первым индексом  $n = 1$ , возможным для незатухающей моды). При соответствующем подборе параметров доминантной, как правило, оказывается мода с наибольшим вторым индексом  $m = m_{max}$ , возможным для незатухающей моды с индексом  $n = 1$ , собственная частота которой наиболее близка к критической частоте. Если собственная частота доминантной моды оказывается равной критической частоте

(что возможно при определенном наборе параметров), то амплитуда доминантной моды оказывается равной бесконечности. Важным следствием этого является нецелесообразность, в рамках модели, содержащей волновод с идеально-проводящими стенками, слишком близкого приближения резонансной частоты доминантной  $TE_{nm}$  моды к критической: это приведет к результату, далекому от реальности.

3. Проблема решается в Главе IV, где впервые получено точное решение для поля излучения винтообразно движущейся частицы в цилиндрическом волноводе со стенками, обладающими конечной проводимостью. Конечная проводимость стенок приближая исходную модель к реальности, ликвидирует сингулярности на критических частотах, возникающую при использовании модели с идеальным волноводом. Устраняются также расходимости на резонансных частотах в частотном распределении энергии, имеющие место в случае идеального волновода.

4. Впервые оказывается возможным установление пределов применимости модели с идеальным волноводом и определение истинных значений полей на критических частотах.

5. Решение может быть непосредственно применено для случая с диэлектрическим волноводом (в том числе, в случае с потерями в стенках) и обобщено на случай с волноводом с двухслойными и многослойными стенками.

6. В главе III представлена аналитическая оценка яркости ондуляторного излучения с учетом изменения среднеквадратичного углового разброса электронного пучка вдоль симметричной решетки FODO. Поскольку характеристики SASE ЛСЭ обусловлены эффективным согласованием фотонных и электронных пучков, приведенное в работе аналитическое представление яркости излучения в ондуляторных цепочках качественно описывает зависимость яркости SASE ЛСЭ от устройства внешней фокусирующей решетки. Приведено сравнение аналитического прогноза и численного моделирования для секции ондулятора European XFEL SASE 1.

7. Было получено решение для частицы с переменным во времени зарядом, движущейся по винтообразной траектории в идеальном волноводе. В качестве его частного случая впервые было получено решение для поля излучения частицы, появляющейся в волноводе и начинающей движение по авинтообразной траектории. Впервые был произведен анализ формы волнового фронта и установлен узконаправленный характер излучения.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Sahakyan, V., Sargsyan, B., Tarloyan, A., & Tsakanov, V. (2019). On the radiation brightness in undulator chain with external focusing lattice. *Laser Physics*, 29(5), 055001. 2.
2. Ivanyan, M. I., Grigoryan, A. H., Sargsyan, B. K., Vardanyan, L., Tsakanian, A. V., & Tsakanov, V. M. (2020). Mode enhancement of thz helical undulator radiation in waveguide. *Laser Physics*, 30(11), 115002.

3. Sargsyan, B. (2021) Transition Effects of THz Helical Undulator Radiation in a Waveguide, *Armenian Journal of Physics*, Volume 14, Issue 4, pp. 165-172

## ԱՄՓՈՓՎԳԻՐ

1. «Պարուրաձև օնդուլատոր՝ իդեալական գլանաձև ալիքատար» կառուցվածք դիտարկելիս, հաստատվել է, որ օնդուլատորի և ալիքատարի պարամետրերի համապատասխան ընտրության դեպքում, տվյալ մասնիկի ճառագայթման էներգիայի մեծ մասը հնարավոր է կենտրոնացնել միակ ալիքատարային մոդայում: Այսպիսով, առաջին անգամ  $S < \xi$  նեղ հաճախականային տիրույթում մոնոքրոմատիկ ճառագայթման աղբյուր ստեղծելու, իսկ դրա հիման վրա ազատ էլեկտրոնային լազեր (FEL) ստեղծելու հնարավորություն է ստեղծվում (ալիքատարի շառավիղի բավական փոքր չափսերով՝ մոտ 1 սմ): Միաժամանակ բացահայտ արտահայտություններ են ստացվել իդեալական հաղորդիչ պատերով ալիքատարի յուրաքանչյուր սեփական մոդայում կուտակված էներգիայի խտությունների համար:
2. Որոշ օրինակափոխություններ են հաստատվել՝ առկա է  $TE_{nm}$  մոդաների հստակ գերազանցում  $TM_{nm}$  մոդաների նկատմամբ, այսինքն  $TE_{nm}$  մոդաները պարունակում են մասնիկի ճառագայթվող էներգիայի մեծ մասը, իսկ  $TE_{1,m}$  մոդաները ունեն ամենաբարձր ինտենսիվությունը (նվազագույն առաջին  $n = 1$  ինդեքսով, որը հնարավոր է չմարող մոդաների համար): Պարամետրերի համապատասխան ընտրության դեպքում գերիշխող մոդան, որպես կանոն, ամենամեծ երկրորդ ինդեքսով  $m = m_{max}$  մոդան է, որի սեփական հաճախականությունը ամենամոտն է կրիտիկական հաճախականությանը: Եթե գերակայող մոդայի սեփական հաճախականությունը հավասարվում է կրիտիկական հաճախականությանը (ինչը հնարավոր է պարամետրերի որոշակի փաթեթի համար), ապա գերակայող մոդայի ամպլիտուդը ձգտում է անվերջության: Կարևոր հետևանքն այն է, որ իդեալական հաղորդիչ պատերով ալիքատար պարունակող մոդելի շրջանակներում գերիշխող  $TE_{nm}$  մոդայի ռեզոնանսային հաճախականության մոտենալը կրիտիկականին նպատակահարմար չէ. դա կհանգեցնի արդյունքի, որը հետո է իրականությունից:
3. Խնդիրը լուծված է IV գլխում, որտեղ առաջին անգամ ստույգ լուծում է ստացվում վերջավոր հաղորդունակությամբ պատերով գլանաձև ալիքատարի մեջ պարուրաձև շարժվող մասնիկի ճառագայթած դաշտի համար: Պատերի վերջավոր հաղորդունակությունը, որն ավելի մոտեցնում է սկզբնական մոդելը իրականությանը, վերացնում է տարամիտությունները կրիտիկական հաճախականությունների վրա, որոնք առաջանում են իդեալական ալիքատարով մոդելի օգտագործման ժամանակ: Վերացվում են եւս տարամիտությունները ռեզոնանսային հաճախականությունների վրա, որոնք առաջանում են էներգետիկ հաճախականային սպեկտրում իդեալական ալիքատարի մոդելի օգտագործման դեպքում:
4. Առաջին անգամ հնարավոր է իդեալական ալիքատարի համար որոշել մոդելի կիրառելիության սահմանները և որոշել դաշտերի իրական արժեքները կրիտիկական հաճախականությունների դեպքում:

5. Լուծումը կարող է ուղղակիորեն կիրառվել դիէլեկտրիկ ալիքատարի դեպքի համար (ներառյալ պատերում կորուստների առկայության դեպքը) և ընդհանրացվել երկչերտ և բազմաշերտ պատերով ալիքատարի դեպքերի համար:

6. III գլխում ներկայացված է օնդոլյատորային ճառագայթման պայծառության վերլուծական գնահատականը՝ հաշվի առնելով սիմետրիկ FODO կառույցի երկայնքով էլեկտրոնային փնջի անկյունային ցրման միջին քառակուսային փոփոխությունը: Քանի որ SASE FEL-ի բնութագրերը պայմանավորված են ֆոտոնների և էլեկտրոնային փնջերի արդյունավետ համապատասխանեցմամբ, գլխում տրված օնդոլյատորային շրջաներում ճառագայթման պայծառության վերլուծական ներկայացումը ճշգրիտ նկարագրում է SASE FEL պայծառության կախվածությունը ֆոկուսացնող ցանցի հատկություններից: Տրված է European XFEL SASE I օնդոլյատորային հատվածի վերլուծական կանխատեսման և թվային սիմուլյացիաների արդյունքների համեմատությունը:

7. Իդեալական ալիքատարում պարուրաձև հետագծով, շարժվող ժամանակի ընթացքում փոփոխվող լիցքով մասնիկի համար ստացվել է լուծման նկարագրություն: Որպես մասնավոր դեպք, առաջին անգամ լուծում է ստացվել մասնիկի ճառագայթման համար, որը հայտնվում է ալիքատարում և սկսում է շարժվել պարուրաձև հետագծով: Առաջին անգամ վերլուծվել է ալիքային ճակատի ձևը և հաստատվել ճառագայթման նեղ ուղղորդված բնույթը:

## SUMMARY

1. When considering the structure "helical undulator - ideal cylindrical waveguide", it was found that with the appropriate selection of the parameters of the undulator and waveguide at a given particle energy, it is possible to concentrate most of the radiated energy in a single waveguide mode. Thus, for the first time, the possibility of creating a narrow-band source of monochromatic radiation in the THz frequency region (with sufficiently small dimensions of the waveguide radius of about 1 cm) and, on its basis, creating a free electron laser (FEL) has been established. Along the way, explicit expressions are derived for the energy densities accumulated in the waveguide and concentrated in each of the eigenmodes of the waveguide with ideally conducting walls.

2. Some regularities have been established: there is a clear prevalence of  $TE_{nm}$  modes over  $TM_{nm}$  modes. Namely the  $TE_{nm}$  modes contain most of the energy emitted by the particle, and the modes  $TE_{1,m}$  have the highest intensity (with the lowest first index  $n = 1$ , possible for the undamped mode). With an appropriate selection of parameters, the dominant mode, as a rule, is the mode with the largest second index  $m = m_{max}$ , possible for the undamped mode with index  $n = 1$ , which characteristic frequency is closest to the critical frequency. If the characteristic frequency of the dominant mode turns out to be equal to the critical frequency (which is possible for a certain set of parameters), then the amplitude of the dominant mode turns out to be equal to infinity. An important consequence of this is the impracticality, within the framework of a model containing a waveguide with ideally conducting walls, to approach the resonant frequency of the dominant  $TE_{nm}$  mode too close to the critical one: this will lead to a result that is far from reality.

3. The problem is solved in Chapter IV, where for the first time an exact solution is obtained for the radiation field of a helically moving particle in a cylindrical waveguide with walls of finite conductivity. The finite conductivity of the walls, bringing the original model closer to reality, eliminates singularities at critical frequencies that arise when using the model with an ideal waveguide. The consumption at resonant frequencies in the frequency distribution of energy, an observable place in the case of an ideal waveguide, is also eliminated. The problem was solved step by step, using the method of partial areas.
4. For the first time, it is possible to establish the limits of applicability of the model with an ideal waveguide and to determine the true values of the fields at critical frequencies.
5. The solution can be directly applied to the case with a dielectric waveguide (including the case with wall losses) and generalized to the case of a waveguide with two-layer and multilayer walls.
6. Chapter III presents an analytical estimate of the brightness of the undulator radiation, taking into account the change in the root-mean-square angular spread of the electron beam along the symmetric FODO array. Since the characteristics of the SASE FEL are due to the effective matching of photons and electron beams, the analytical representation of the radiation brightness in undulator chains given in the article qualitatively describes the dependence of the SASE FEL brightness on the properties of the focusing lattice.
7. A solution was obtained for a particle with a time-varying charge moving along a helical trajectory in an ideal waveguide. As a particular case of it, a solution was obtained for the first time on the radiation of a particle that arises in a waveguide and begins to move along a helical trajectory. For the first time, the shape of the wave front was analyzed and the narrowly directed nature of the radiation was established.