ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մկրտչյան (Պետրոսյան) Հեղինե Արամի

Ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ հավասարումներ մուլտիանիզոտրոպ սոբոլևյան տարածություններում

Ա.01.02 «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, մաթեմատիկական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2022

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Мкртчян (Петросян) Гегине Арамовна

Регулярные гипоэллиптические уравнения в мультианизотропных пространствах Соболева

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.02 “Дифференциальные уравнения, математическая физика”

Ереван 2022

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայ-Ռուսական (Սլավոնական) համալսարանում:

Գիտական ղեկավարներ՝ | ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Գ. Ա. Կարապետյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ | ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Վ. Ն. Մարգարյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Գ. Վ. Դեմիդենկո
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Լ. Պ. Տեփոյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ | Հարավային դաշնային համալսարան (ք.Դոնի Ռոստով, ՌԴ)

Պաշտպանությունը կայանալու է **2022թ. սեպտեմբերի 13-ին ժ. 15:00-ին** ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է **2022թ. օգոստոսի 1-ին**:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր՝ Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Российско-Армянском (Славянском) университете.

Научные руководители: | доктор физ.-мат. наук, профессор Г.А. Карапетян

Официальные оппоненты: | доктор физ.-мат. наук, профессор В.Н. Маргарян
доктор физ.-мат. наук, профессор Г.В. Демиденко
доктор физ.-мат. наук Л.П. Тепоян

Ведущая организация: | Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, РФ)

Защита состоится **13-го сентября 2022г. в 15:00 часов** на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 050, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан **1-го августа 2022г.**

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Т. Н. Арутюнян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В историческом развитии теории дифференциальных уравнений выяснилось, что часто исследуемая задача дифференциальных уравнений (задача Коши, задача Дирихле и др.) не имеет классического решения, поэтому в начале прошлого века С.Л. Соболевым (см. [1], [2]) были введены понятия обобщённой производной и обобщённой функции (распределения). В работах С.Л. Соболева середины 30-ых годов было дано то определение обобщенных решений, которое стало общепринятым и в идейном плане основополагающим для развития теории уравнений с частными производными. Именно в работах [1], [2] был заложен фундамент теории обобщённых функций. Широкое распространение теории обобщённых функций и ее интенсивное развитие началось в начале 50-х годов после выхода в свет фундаментальной монографии Л. Шварца (см. [3]), в которой содержалось дальнейшее развитие теории. Развитие теории обобщённых функций и синтез разных идей дали новые возможности и привели к быстрому развитию ее приложений в естествознании и, в частности, в вычислительной математике.

Возникновение теории обобщённых функций и обобщённой производной обусловлено развитием теории функций и теоретической физики. В частности, этому способствовали идеи О. Хевисайда, П. Дирака, в особенности работы Г. Кирхгофа и Ж. Адамара. Однако в работах предшественников не было понятий и построений, подобных строгим конструкциям С.Л. Соболева.

После введения С.Л. Соболевым классических (изотропных) соболевских пространств дифференцируемых (в смысле Соболева или в обобщенном смысле) функций $W_p^l(\Omega)$, где p и l целые неотрицательные числа, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ произвольная область, были введены анизотропные пространства Соболева-Лиувилля, т.е. пространства, которые порождаются вектором (с целочисленными или дробными производными), мультианизотропные аналоги этих пространств, т.е. пространства, которые порождаются выпуклыми многогранниками, вершины которых могут иметь как целые так и дробные координаты, весовые соболевские пространства и другие.

В этих пространствах функции и их производные понимались как обобщенные функции, поэтому не имеют конкретного значения в точке и поэтому исследование дифференциальных уравнений численными методами становится невозможным. Для преодоления этого и многих других трудностей возникших в этой области, в 30-ых годах прошлого века С.Л. Соболевым были доказаны теоремы вложения, именно было показано, что при определенных соотношениях между параметрами, определяющими данное пространство $W_p^l(\Omega)$ функции этого пространства становятся эквивалентными непрерывным или непрерывно дифференцируемым функциям.

Обычно теоремы вложения доказываются либо на языке приближений, либо с помощью интегральных представлений. Для разных пространств типа Соболева, помимо самого Соболева (см. [1] или [2]), такие интегральные представления получены в работах

С.Т. Смита [4], В.П. Ильина [5], О.В. Бесова [6], С.М. Никольского [7]. Все эти работы нашли свое отражение в монографии [8].

В 1950-ых годах Л. Хёрмандер (см. [9]) ввел класс гипоэллиптических операторов, которые содержали в себе как эллиптические, так и полуэллиптические операторы, выяснилось, что характеристический многогранник таких операторов, в отличие от предыдущих случаев, не обязательно должен иметь вид пирамиды, имеющий одну $(n-1)$-мерную некоординатную грань, а может и быть вполне правильным многогранником, каждая грань которого показывает соответствующую обобщенно однородность, а общая модель – мультиоднородная. С этого момента стало актуально (и об этой задаче многократно высказывались академики С.М. Никольский (см. [7]) и О.В. Бесов (см. [6])) изучать функциональные пространства, порождённые вполне правильным многогранником (в дальнейшем их назовем мультианизотропными), и доказывать теоремы вложения для этих пространств. Все это было необходимо для изучения свойств решений гипоэллиптических уравнений, которые возникают при моделировании мультианизотропных процессов. Долгое время не удавалось решить эту задачу, потому что не существовало удачного интегрального представления для функций из этого класса. В 2014 году Г.А. Карапетян (см. [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]) построил соответствующее интегральное представление для функций из мультианизотропных пространств, где в представлении отражаются все вершины вполне правильного многогранника, и с использованием полученного представления доказал теоремы вложения.

Вопросы теории приближений решений для различных дифференциальных уравнений всегда актуальны. Отметим некоторые известные результаты. Задачи разрешимости эллиптических и полуэллиптических уравнений были изучены разными математиками, отметим книгу С. Агмона, А. Дуглиса, Л. Ниренберга [17]. В 1975г. С.В. Успенский (см. [18, 19, 20]) доказал корректную разрешимость для полуэллиптических уравнений в полупространстве. При доказательстве использовал им же полученное специальное интегральное представление. Им же и его учениками (см. книгу [21]) для рассматриваемого класса уравнений с переменными коэффициентами построена общая теория смешанных краевых задач в четверти пространства, определены условия корректной разрешимости в весовых соболевских классах, изучены асимптотические свойства решений некоторых задач при $t \to \infty$. Основным аппаратом исследования краевых задач является метод интегрального представления решения, который позволяет установить точные априорные оценки. Что касается корректной разрешимости для эллиптических и полуэллиптических уравнений, то этот вопрос в 1988г. был решен Г.В. Демиденко (см. [22, 23, 24, 25, 26, 27]). Он в серии своих работ, используя специальное интегральное представление, полученное С.В. Успенским (см. [18]), доказал корректную разрешимость для квазиэллиптических уравнений как в полупространстве, так и во всем пространстве.

В данной диссертационной работе, применяя специальное интегральное представление, полученное Г.А. Карапетяном, строятся приближенные решения и доказывается корректная разрешимость для регулярных гипоэллиптических уравнений.

Понятие регулярности операторов введены С.М. Никольским (см. [27]) и В.П. Михайловым (см. [28]) (см. также [29]). В работах Г.Г. Казаряна (см. например [30]) исследован класс нерегулярных гипоэллиптических операторов.

Цель работы.

1. Исследование некоторых свойств регулярных гипоэллиптических операторов.
2. Исследование специального интегрального представления для функций из мультианизотропных пространств Соболева, когда многогранник Ньютона имеет две вершины анизотропности и, применение данного представления для доказательства теорем вложения для вышеуказанных пространств.
3. Построение приближенных решений регулярных гипоэллиптических уравнений специального типа в $\mathbb{R}^n$ и задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n_+$.
4. Исследование корректной разрешимости регулярных гипоэллиптических уравнений специального типа в $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ и задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n_+$.

Научная новизна. В работе получены следующие основные результаты:

1. Исследованы некоторые свойства вполне правильных многогранников. На основе полученных свойств установлена верхняя оценка для функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических уравнений.
2. Получены специальные интегральные представления для функций из мультианизотропного пространства Соболева, когда многогранник Ньютона имеет две вершины анизотропности. Доказаны теоремы вложения для функций, принадлежащих вышеуказанным классам.
3. С помощью специальных интегральных представлений функций через регулярный оператор доказана однозначная разрешимость регулярных гипоэллиптических уравнений специального вида в мультианизотропных весовых функциональных пространствах на $\mathbb{R}^n$. Существование решений доказано построением приближенных решений.
4. Применяя специальное интегральное представление функций, которое охватывает все вершины вполне правильного многогранника Ньютона, построены приближенные решения задачи Дирихле с нулевыми граничными условиями для специальных (мультиоднородных) регулярных гипоэллиптических уравнений и доказана корректная разрешимость.
5. Построена шкала весовых пространств, где задача Дирихле в $\mathbb{R}^n_+$ с регулярными операторами корректно разрешимы.

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории гипоэллиптичских уравнений, в частности, для исследования задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений (или операторов).

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация полученных результатов. По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах и конференциях:

- Международная конференция "Harmonic Analysis and Approximations, VII" (сентябрь 2018, Цахкадзор, Армения). Тема доклада: "Construction of Approximate Solutions of the Dirichlet Problem in $\mathbb{R}^n$ for Regular Hypoelliptic Operators".
- Международная школа-конференция "Sobolev Readings"(декабрь 2018, Новосибирск, Россия). Тема доклада: "Correct solvability of the Dirichlet problem in the half-space for regular equations".
- Международная конференция "Mathematics and its Applications"(август 2019, Новосибирск, Россия). Тема доклада: "Multianisotropic integral operators defined by regular equations".
- Международная конференция "ОТНА-2019" (апрель 2019, Ростов-на-Дону, Россия). Тема доклада: "Approximate solutions of the Dirichlet problem in a half-space for regular equations".
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2019" МГУ имени М.В. Ломоносова, Секция: Математика и Механика, Подсекция: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (апрель 2019, Москва, Россия). Тема доклада: "Мультианизотропные интегральные операторы, определяемые регулярными уравнениями".
- Годичные научные конференции армянского мат-ого общества (2016, 2017).
- Годичные научные конференции РАУ (2017-2019, 2021).
- Семинары кафедры Математики и мат-ого моделирования РАУ (2016-2021).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 работах, которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК, из которых 5 статьей - в издании, индексированном в Scopus, 12 публикаций - в тезисах докладов. Их перечень приведён в конце диссертации.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, включающего 45 наименований. В конце диссертации приведён список статьей и тезисов конференций. Общий объём диссертации составляет 139 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится обзор исследований, посвященных изучению нормальной разрешимости регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных пространствах Соболева. Также во введении представлен краткий обзор содержания диссертации. Нумерация результатов во введении совпадает с нумерацией в соответствующих главах.

Первая глава посвящена некоторым свойствам регулярных гипоэллиптических операторов и интегральным представлениям для функций из мультианизотропных пространств Соболева с двумя вершинами анизотропности.

В **первом параграфе первой главы** рассматриваются регулярные гипоэллиптические операторы и исследуются некоторые свойства вполне правильных многогранников. На основе которых получены оценки сверху для функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических уравнений.

Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^n_+$ – вполне правильный многогранник. Введем следующие обозначения:

$\mathfrak{N}^0$ – множество вершин $\mathfrak{N}$,

$\Lambda(\mathfrak{N})$ – множество внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ некоординатных граней $\mathfrak{N}$ нормированных так, чтобы $d_{\mathfrak{N}}(\lambda) \coloneqq \max_{\nu \in \mathfrak{N}} (\nu, \lambda) = 1$,

$\Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})$ – множество тех $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{N})$, которые являются нормалями $(n-1)$-мерных (некоординатных) граней $\mathfrak{N}$,

$\Lambda^{n-1}_k(\mathfrak{N})$ – множество нормалей $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})$, соответствующая $(n-1)$-мерная грань которой имеет подгрань, лежащую в некоторой координатной гиперплоскости.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество тех вполне правильных многогранников $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^n_+$, для которых $\emptyset \neq \mathfrak{N}^0 \setminus \{\nu^j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^n_0$, где $\nu^j = \left(0, \dots, 0, \nu^j_j, 0, \dots, 0\right)$, $j = 1, \dots, n,$ – вершины многогранника $\mathfrak{N}$, лежащие на координатных осях.

Очевидно, что если $\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$, то он имеет $(n - 1)$-мерную некоординатную грань, проходящую через точки $\{\nu^j\}_{j=1, j\neq l}^n$, $l = 1, \dots, n$. Через $\lambda^l \in \Lambda^{n-1}_k(\mathfrak{N})$ обозначим нормаль $(n - 1)$-мерной грани, проходящей через точки $\{\nu^j\}_{j=1, j\neq l}^n$, $l = 1, \dots, n$.

Теорема 1.1.3. *Пусть* $\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$. *Тогда* $\min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{N})} |\lambda| = \min_{1 \le l \le n} |\lambda^l|$.

Во **втором параграфе первой главы** исследуется специальное интегральное представление для функций из мультианизотропных пространств Соболева на $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, когда многогранник Ньютона имеет две вершины анизотропности и, применяя данное представление, доказываются теоремы вложения для функций, принадлежащих вышеуказанным классам.

Через $\{\mathfrak{N}_1\}$ обозначим множество вполне правильных многогранников $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^n_+$ с ненулевыми вершинами α^j $(j = 1, \dots, n+2)$, где $\alpha^j = \left(0, \dots, 0, l_j, 0, \dots, 0\right)$ $(j = 1, \dots, n)$ – вершина $\mathfrak{N}$, лежащая на оси ξ^j, а $\alpha^j \in \mathbb{N}^n$ $(j = n+1, n+2)$. Пусть μ^j $(1 \le j \le 2n-1)$ – внешняя нормаль $(n-1)$-мерной некоординатной грани $\mathfrak{N}^{n-1}_j$ многогранника $\mathfrak{N}$, нормированная так, чтобы $\left(\alpha, \mu^j\right) = 1$ $\alpha \in \mathfrak{N}^{n-1}_j$. В дальнейшем будем считать, что $(n -$

1)-мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{N}$ пронумерованы так, что μ^j $(j = 1, \dots, n)$ является нормалью $(n-1)$-мерной некоординатной грани $\mathfrak{N}$, проходящей через точки $\{\alpha^l\}_{l=1}^n \backslash \{\alpha^j\}$. Для произвольного $\nu > 0$ и натурального числа k обозначим:

$$P(\nu, \xi) := \sum_{j=1}^{n+2} \left(\nu \xi^{\alpha^j}\right)^{2k},$$

$$G_0(\nu, \xi) := e^{-P(\nu,\xi)},$$

$$G_{1,j}(\nu, \xi) := 2k(\nu \xi^{\alpha^j})^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)}, \quad j = 1, \dots, n+2,$$

и пусть $\hat{G}_0(t,\nu)$, $\hat{G}_{1,j}(t,\nu)$ $(j = 1, \dots, n+2) -$ соответствующие преобразования Фурье этих функций.

Для измеримой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим усреднение с ядром усреднения $\hat{G}_0(t,\nu)$:

$$f_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \hat{G}_0(t-x, \nu) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 1.2.1. *Пусть для функции* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ *существуют обобщенные производные по С.Л. Соболеву* $D^{\alpha^j} f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1, \dots, n+2)$, *где* $\alpha^j -$ *вершины вполне правильного многогранника* $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_1\}$. *Тогда для почти всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *имеет место представление*

$$f(x) = f_h(x) + \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_\varepsilon^h d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha^j} f(t) \hat{G}_{1,j}(t-x, \nu) dt.$$

Вторая глава посвящена построению приближенных решений регулярных гипоэллиптических уравнений.

В **первом параграфе второй главы** строятся приближенные решения регулярных гипоэллиптических уравнений специального типа в мультианизотропных весовых пространствах Соболева на $\mathbb{R}^n$ и исследуются их свойства.

Через $\{\mathfrak{N}_2\}$ обозначим множество вполне правильных многогранников $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ с ненулевыми вершинами α^j $(j = 1, \dots, M; M > n)$, где $\alpha^j = \left(0, \dots, 0, l_j, 0, \dots, 0\right)$ $(1 \le j \le n) -$ вершина $\mathfrak{N}$, лежащая на оси ξ_j $(1 \le j \le n)$, а $\alpha^j \in \mathbb{N}^n$ $(j = n+1, \dots, M)$. Через $\mathfrak{N}_j^{n-1}$ $(j = 1, \dots, I_{n-1})$ обозначим $(n-1)$-мерные некоординатные грани $\mathfrak{N}$, а через μ^j $(j = 1, \dots, I_{n-1}) -$ внешнюю (относительно $\mathfrak{N}$) нормаль этой грани, нормированной так, чтобы $\left(\alpha, \mu^j\right) = 1$ $\forall \alpha \in \mathfrak{N}_j^{n-1}$. В дальнейшем будем считать, что $(n-1)$-мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{N}$ пронумерованы так, что $\{\alpha^l\}_{l=1}^n \backslash \{\alpha^j\} \subset \mathfrak{N}_j^{n-1}$ $(j = 1, \dots, n)$. Для многогранника $\mathfrak{N}$ через $\partial' \mathfrak{N}$ обозначим множество тех мультииндексов, которые принадлежат хотя бы одной $(n-1)$-мерной некоординатной грани многогранника $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^{(0)} := \mathfrak{N} \backslash \partial' \mathfrak{N}$. Обозначим также через $\lambda_j = 1/l_j$ $(j = 1, \dots, n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_{min} := \min_{1 \le j \le n} \lambda_j$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P(D) = \sum_{\alpha \in \partial' \mathfrak{N}} a_\alpha D^\alpha$$

с действительными коэффициентами a_α. Предположим, что оператор $P(D)$ регулярен.

Для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначим (см. [33])

$$U_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_h^{h^{-1}} dv \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t-x,\xi)} G_1(\xi,\nu) d\xi dt.$$

Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_2\}$ с ненулевыми вершинами $\{\alpha^1, \dots, \alpha^M\} \in Z_+^n$ и чисел $p \geq 1$, $\sigma \in (0,1)$ обозначим

$$\rho_{\mathfrak{N}}(x) := \left(\sum_{j=1}^{M} x^{2\alpha^j} \right)^{1/2},$$

$$W_{p,\sigma}^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f, \|f\|_{W_{p,\sigma}^{\mathfrak{N}}} := \|(1+\rho_{\mathfrak{N}})^{-\sigma} f\|_{L_p} + \sum_{j=1}^{M} \left\| (1+\rho_{\mathfrak{N}})^{-\sigma\left(1-\max_i(\mu^i,\alpha)\right)} D^{\alpha^j} f \right\|_{L_p} \right\}.$$

Отметим, что подобные пространства при $\sigma = 1$ для эллиптических операторов рассматривались в работе [31], а для квазиэллиптических операторов − в работе [32]. Для $\sigma \in (0,1)$ подобные пространства были введены в работах Г.В. Демиденко (см. [24]).

Для любого $p \geq 1$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ через $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство функций с конечной нормой

$$\|U\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(1+\rho_{\mathfrak{N}}(\cdot)\right)^{-\gamma} U \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

а при $1 < p < \infty$, $\sigma \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$ через $\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество тех $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ $(\gamma = -(\sigma + N|\lambda|))$, для которых $\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta f(x) dx = 0$, $|\beta| = 0,1,\dots,N-1$. Очевидно, $\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ является подпространством $L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$.

Для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ обозначим $U_h := R_h f$.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_2\}$, $|\lambda| > 1$, $\frac{|\lambda|}{p} > \sigma > 1 - \frac{|\lambda|}{p'}$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. *Тогда семейство операторов* R_h *фундаментально в паре пространств* $\left\{L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n), W_{p,\sigma}^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)\right\}$ *при* $h \to 0$.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_2\}$, $1 \geq |\lambda| > 1 - N\lambda_{min}$, $\sigma < min\left\{c_0, \frac{|\lambda|}{p}\right\}$, $\sigma > 1 - |\lambda| + \frac{|\lambda|}{p} - N\lambda_{min}$. *Тогда семейство операторов* R_h *фундаментально в паре пространств* $\left\{\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n), W_{p,\sigma}^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)\right\}$ *при* $h \to 0$.

Во **втором параграфе второй главы** строятся приближенные решения задачи Дирихле для одного класса регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных пространствах Соболева на $\mathbb{R}_+^n$.

Через $\{\mathfrak{N}_3\}$ обозначим множество вполне правильных многогранников $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^{n-1}$ с ненулевыми вершинами α^j $(j = 1,\dots,n-1)$, где $\alpha^j = \left(0,\dots,0,l_j,0,\dots,0\right)$ $(1 \leq j \leq n -$

1) $-$ вершина $\mathfrak{N}$, лежащая на оси ξ_j $(1 \le j \le n-1)$. Через $\mathfrak{N}_j^{n-2}$ $(j = 1, \dots, I_{n-2})$ обозначим $(n-2)$-мерные некоординатные грани $\mathfrak{N}$, а через μ^j $(j = 1, \dots, I_{n-2})$ $-$ внешнюю (относительно $\mathfrak{N}$) нормаль этой грани, нормированной так, чтобы $(\alpha, \mu^j) = 1$ $(j = 1, \dots, I_{n-2})$ при $\alpha \in \mathfrak{N}_j^{n-2}$ $(j = 1, \dots, I_{n-2})$. В дальнейшем будем считать, что $(n-2)$-мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{N}$ пронумерованы так, что $\{\alpha^l\}_{l=1}^{n-1} \backslash \{\alpha^j\} \subset \mathfrak{N}_j^{n-2}$ $(j = 1, \dots, n-1)$. Для многогранника $\mathfrak{N}$ через $\partial' \mathfrak{N}$ обозначим множество тех мультииндексов, которые принадлежат хотя бы одной $(n-2)$-мерной некоординатной грани многогранника $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^{(0)} := \mathfrak{N} \backslash \partial' \mathfrak{N}$. Обозначим также через $\mu^0 \coloneqq (\mu_1^0, \dots, \mu_{n-1}^0) \coloneqq \left(\frac{1}{l_1}, \dots, \frac{1}{l_{n-1}}\right)$. Для любого $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_3\}$ через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{N}) \subset \mathbb{R}_+^n$ обозначим вполне правильный многогранник с ненулевыми вершинами $\beta^j := (\alpha^j, 0)$ $(j = 1, \dots, M)$, $\beta^{M+1} := (0, \dots, 0, 2m)$, где α^j $(1 \le j \le M)$ $-$ ненулевые вершины многогранника $\mathfrak{N}$.

Пусть

$$P(D_x, D_{x_n}) = D_{x_n}^{2m} + \sum_{j=1}^{M} a_j D_x^{\alpha^j}, \qquad (2.2.1)$$

где $a_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, M)$, а $P(\xi, \xi_n) = \xi_n^{2m} + \sum_{j=1}^{M} a_j \xi^{\alpha^j}$ $-$ его полный символ.

Предположим, что оператор (2.2.1) регулярен.

Из определения и регулярности оператора (2.2.1) следует, что вершины многогранника $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_3\}$ имеют четные координаты. При этом многочлен $P(\xi, \tau)$ по τ имеет ровно m корней с положительными и отрицательными мнимыми частями. Для любого фиксированного ξ обозначим $\tau_j^{\pm}(\xi)$ $(j = 1, \dots, m)$ эти корни и положим

$$M^+(\xi, \tau) := \prod_{j=1}^{m} \left(\tau - \tau_j^+(\xi)\right) = \sum_{l=0}^{m} b_l(\xi) \tau^{m-l},$$

$$M_k^+(\xi, \tau) := \sum_{l=0}^{k} b_l(\xi) \tau^{k-l}, \qquad k = 1, \dots, m.$$

В $\mathbb{R}_+^n$ рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} P(D_x, D_{x_n}) U = f(x, x_n), \qquad x \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0, & (2.2.3) \\ \left.\dfrac{\partial^j U}{\partial x_n^j}\right|_{x_n = 0} = 0, \qquad j = 0, 1, \dots, m-1. & (2.2.4) \end{cases}$$

Как и в работах [11, 13, 15], для любого параметра $\nu > 0$ и натурального числа k обозначим

$$G_0(\xi, \nu) := e^{-(\nu \rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}},$$

$$G_1(\xi, \nu) := (-2k)(\nu \rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k-1} e^{-(\nu \rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}},$$

$$G_2(\xi, \nu) := (-2k)\nu^{2k-1}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k} e^{-(\nu \rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}} = \rho_{\mathfrak{N}}(\xi) G_1(\xi, \nu),$$

а $\hat{G}_j(t, \nu)$ $(j = 0, 1, 2)$ преобразования Фурье для соответствующих функций.

Введем следующие контурные интегралы:

$$J_+(\xi,x_n):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda,\quad J_-(\xi,x_n):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-(\xi)}\frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda,$$

$$J_j(\xi,x_n):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{e^{ix_n\lambda}M^+_{m-j}(\xi,\lambda)}{M^+(\xi,\lambda)}d\lambda,$$

$$Q_j(\xi,x_n):=\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{j-1}J_-(\xi,y_n-x_n)\bigg|_{y_n=0}\quad (j=1,\dots,m),$$

где $\Gamma^+(\xi)$ и $\Gamma^-(\xi)$ – контуры в комплексной плоскости, охватывающие соответственно все корни $\tau_k^+(\xi)$ и $\tau_k^-(\xi)$ $(k=1,\dots,m)$.

Теперь переходим к построению приближенного решения задачи Дирихле (2.2.3), (2.2.4). Будем применять методы работ [22] и [11], т.е. построим приближенное решение, как и в работе [22], с применением специальных ядер $G_j(\xi,\nu)$ $(j=0,1,2)$ из работы [11]. Для этого определим следующие интегральные операторы:

$$U_h^+(x,x_n)\coloneqq R_h^+f(x,x_n):=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}$$

$$\times\int\limits_h^{h^{-1}}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i(x-y)\xi}\,G_2(\xi,\nu)J_+(\xi,x_n-y_n)f(y,y_n)d\xi dy dy_n\,d\nu\,,$$

$$U_h^-(x,x_n)\coloneqq R_h^-f(x,x_n):=-\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}$$

$$\times\int\limits_h^{h^{-1}}\int\limits_{x_n}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i(x-y)\xi}\,G_2(\xi,\nu)J_-(\xi,x_n-y_n)f(y,y_n)d\xi dy dy_n\,d\nu\,,$$

$$U_{jh}(x,x_n)\coloneqq R_{jh}f(x,x_n)\coloneqq\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}$$

$$\times\int\limits_h^{h^{-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i(x-y)\xi}\,G_2(\xi,\nu)J_j(\xi,x_n)\int\limits_0^{\infty}Q_j(\xi,y_n)f(y,y_n)dy_n d\xi dy\,d\nu$$

$$(j=1,\dots,m)$$

и положим

$$U_h(x,x_n):=U_h^+(x,x_n)+U_h^-(x,x_n)+\sum_{j=1}^m U_{jh}(x,x_n),$$

оказывается, что $U_h(x,x_n)$ являются приближенными решениями задачи Дирихле (2.2.3), (2.2.4), что доказано в следующей

Лемма 2.2.9. *Если* $h\to 0$, *то*

$$\left\|P\left(D_x,D_{x_n}\right)U_h-f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}\to 0$$

при этом для любого $h>0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j-1} U_h(x,x_n)\bigg|_{x_n=0} = 0, \ (j = 1,\dots,m).$$

В **параграфе три второй главы** строятся приближенные решения задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных весовых пространствах Соболева на $\mathbb{R}^n_+$.

Через $\{\mathfrak{N}_4\}$ обозначим множество вполне правильных многогранников $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^{n-1}_+$ с ненулевыми вершинами α^j $(j = 1,\dots,M\,; M > n)$, где $\alpha^j = \left(0,\dots,0,l_j,0,\dots,0\right)$ $(1 \le j \le n)$ – вершина $\mathfrak{N}$, лежащая на оси ξ_j $(1 \le j \le n)$, а $\alpha^j \in \mathbb{N}^n$ $(j = n+1,\dots,M)$. Для любого $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_4\}$ через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{N}) \subset \mathbb{R}^n_+$ обозначим вполне правильный многогранник с ненулевыми вершинами $\beta^j := \left(\alpha^j, 0\right)$ $(j = 1,\dots,M)$, $\beta^{M+1} := (0,\dots,0,2m)$, где α^j $(1 \le j \le M)$ – ненулевые вершины многогранника $\mathfrak{N}$. Для многогранника $\mathfrak{M}$ через $\partial'\mathfrak{M}$ обозначим множество тех мультииндексов, которые принадлежат хотя бы одной $(n-1)$-мерной некоординатной грани многогранника $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^{(0)} := \mathfrak{M} \backslash \partial'\mathfrak{M}$. Пусть $\lambda^j = \left(\lambda^j_1,\dots,\lambda^j_{n-1}\right)$ $(j = 1,\dots,I_{n-2})$ – внешняя (относительно $\mathfrak{N}$) нормаль грани $\mathfrak{N}^{n-2}_j$ $(j = 1,\dots,I_{n-2})$, нормированной так, чтобы $\left(\alpha,\lambda^j\right) = 1$ $(j = 1,\dots,I_{n-2})$, $\mu^j := \left(\lambda^j, 1/(2m)\right)$ $(j = 1,\dots,I_{n-2})$ – внешние нормали грани $\mathfrak{M}^{n-1}_j$ $(j = 1,\dots,I_{n-2})$. Пусть $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ – точка пересечения гиперплоскостей, содержащих $(n-1)$-мерные грани, проходящие через точки $\{\alpha^l\}_{l=1}^n \backslash \{\alpha^j\}$ $(j = 1,\dots,n)$, где $\alpha^j = (0,\dots,0,l_j,0,\dots,0)$. Для определенности предположим, что $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{n-r} \le \gamma_{n-r+1} \le \cdots \le \gamma_n$, где $r = 0,1,\dots,n-1$. Положим $\lambda^0 := (\lambda^0_1,\dots,\lambda^0_{n-1}) := (1/l_1,\dots,1/l_{n-1})$ и $\mu^0 := (\mu^0_1,\dots,\mu^0_{n-1},\mu^0_n) := (1/l_1,\dots,1/l_{n-1},1/2m) := (\lambda^0, 1/2m)$.

В данном параграфе изучается задача Дирихле (2.2.3), (2.2.4) в $\mathbb{R}^n_+$ в определенных весовых пространствах.

Определим шкалу функциональных пространств, где будем рассматривать задачу (2.2.3), (2.2.4). По аналогии с первым параграфом данной главы (квазиоднородный случай изучен в работах Демиденко Г.В. [24, 25]), для вполне правильного многогранника $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, где $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_4\}$, $p \ge 1$, $\sigma \ge 0$ обозначим через $W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$ пополнение множества функций из $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, равных нулю при больших $|(x,x_n)|$, по норме

$$\|u\|_{W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} = \sum_{\beta \in \mathfrak{M}} \left\| \left(1 + \rho_{\mathfrak{M}}(x,x_n)\right)^{-\sigma\left(1 - \max\limits_{j=1,\dots,I_{n-2}} (\beta,\mu^j)\right)} D^\beta_{xx_n} u(x,x_n) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)},$$

где $\rho_{\mathfrak{M}}(x,x_n) = \left(x_n^{2m} + \rho^2_{\mathfrak{N}}(x)\right)^{1/2}$. При $\sigma = 0$ пространство $W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$ совпадает с пространством $W^{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}^n_+)$.

Для $\gamma \in \mathbb{R}$ через $L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ обозначим пространство функций $u(x,x_n)$ с конечной нормой $\|u\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)} := \left\| \left(1 + \rho_{\mathfrak{M}}(x,x_n)\right)^{-\gamma} u(x,x_n) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n_+)}$, а при $1 < p < \infty$, $\sigma \ge 0$, $L \in \mathbb{N}$ через $\mathfrak{L}_{p,\sigma,L}(\mathbb{R}^n_+)$ подпространство в $L_p(\mathbb{R}^n_+)$, состоящее из функций f, удовлетворяющих условиям

$$\left(1+\rho_{\mathfrak{M}}(x,x_n)\right)^{\sigma+L\mu^0} f(x,x_n) \in L_1(\mathbb{R}^n_+), \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (x,x_n)^{\beta} f(x,x_n)dxdx_n = 0$$

при $|\beta| = 0,1,\dots,L-1$.

Для $p>1$ обозначим $\chi := \chi(p) \coloneqq |\mu^0|\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N}\in\{\mathfrak{N}_4\}$, $|\mu^0|>1$ *и* $1-\chi<\sigma<min\{2c_0,|\mu^0|/p\}$. *Тогда семейство операторов* $(R_h^+ + R_h^-)$ *фундаментально в паре пространств* $\{L_p(\mathbb{R}^n_+)\cap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n_+), W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)\}$ *при* $h\to 0$.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N}\in\{\mathfrak{N}_4\}$, $\sigma<min\{2c_0,|\mu^0|/p\}$, $1\ge|\mu^0|>1-L\mu^0_{min}$, *где* L *такое натуральное число, что* $1-\chi-(L-1)\mu^0_{min}\ge\sigma>1-\chi-L\mu^0_{min}$. *Тогда семейство операторов* $(R_h^+ + R_h^-)$ *фундаментально в паре пространств* $\{\mathfrak{L}_{p,\sigma,L}(\mathbb{R}^n_+), W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)\}$ *при* $h\to 0$.

Теорема 2.3.3. *Пусть* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N}\in\{\mathfrak{N}_4\}$, $|\mu^0|>1$ *и* $1-\chi<\sigma<min\{2c_0,|\mu^0|/p\}$. *Тогда семейство операторов* R_{jh} *фундаментально в паре пространств* $\{L_p(\mathbb{R}^n_+)\cap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n_+), W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)\}$ *при* $h\to 0$.

Теорема 2.3.4. *Пусть* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N}\in\{\mathfrak{N}_4\}$, $\sigma<min\{2c_0,|\mu^0|/p\}$, $1\ge|\mu^0|>1-L\mu^0_{min}$, *а* L *— натуральное число, удовлетворяющее условию* $1-\chi-(L-1)\mu^0_{min}\ge\sigma>1-\chi-L\mu^0_{min}$. *Тогда семейство операторов* R_{jh} $(j=1,\dots,m)$ *фундаментально в паре пространств* $\{\mathfrak{L}_{p,\sigma,L}(\mathbb{R}^n_+), W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)\}$ *при* $h\to 0$.

В **третьей главе** исследована однозначная разрешимость регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных пространствах Соболева.

В **первом параграфе третьей главы** доказывается однозначная разрешимость регулярных гипоэллиптических уравнений специального типа в мультианизотропных весовых функциональных пространствах Соболева на $\mathbb{R}^n$. Причем существование решений доказывается через построения приближенных решений с помощью мультианизотропных интегральных операторов.

Исходя из результатов первого параграфа второй главы, доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\mathfrak{N}\in\{\mathfrak{N}_2\}$, $|\lambda|>1$, $\frac{|\lambda|}{p}>\sigma>1-|\lambda|+\frac{|\lambda|}{p}$. *Тогда для любой функции* $f\in L_p(\mathbb{R}^n)\cap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *уравнение* $P(D)U=f$ *имеет единственное решение* U *из класса* $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, *и существует постоянная* $C>0$, *что для любой функции* $f\in L_p(\mathbb{R}^n)\cap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *имеет место оценка*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Теорема 3.1.2. *Пусть* $\mathfrak{N}\in\{\mathfrak{N}_2\}$, $1\ge|\lambda|>1-N\lambda_{min}$, $\sigma<min\left\{c_0,\frac{|\lambda|}{p}\right\}$, $1-|\lambda|+\frac{|\lambda|}{p}-(N-1)\lambda_{min}\ge\sigma>1-|\lambda|+\frac{|\lambda|}{p}-N\lambda_{min}$. *Тогда для любой функции* $f\in\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ *существует единственное решение* $U\in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *уравнения* $P(D)U=f$, *и существует постоянная* $C>0$, *что для любой функции* $f\in\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ *имеет место неравенство*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\left(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x)\right)^{\sigma+N|\lambda|} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right).$$

В **параграфе два третьей главы** исследуется разрешимость задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных пространствах Соболева на $\mathbb{R}^n_+$.

Исходя из результатов второго параграфа второй главы, доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_3\}$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$ $(1 < p < \infty)$ *и имеет компактный носитель, тогда при* $\chi > 1$ *задача (2.2.3), (2.2.4) имеет единственное решение* U *из класса* $W^{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}^n_+)$, *при этом с некоторой постоянной* $C > 0$ *(не зависящей от* f*) имеет место оценка*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}^n_+)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_3\}$, $\chi \le 1$ *и* $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$ $(1 < p < \infty)$ *с компактным носителем удовлетворяет условиям ортогональности* $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} x^s f(x, x_n)dx = 0$ *при* $|s| = 0,1,\dots,L-1$, *где* L *– натуральное число, определяемое из неравенств* $\chi + L\mu^0_{min} > 1 \ge \chi + (L-1)\mu^0_{min}$, *где* $\mu^0_{min} = \min\limits_{j=1,\dots,n-1} \mu^0_j$. *Тогда для любой такой функции* f *задача (2.2.3), (2.2.4) имеет единственное решение из класса* $W^{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}^n_+)$, *для которой имеет место неравенство*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}^n_+)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}.$$

В **третьем параграфе главы три** изучается корректная разрешимость задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных весовых пространствах Соболева на $\mathbb{R}^n_+$.

Исходя из результатов третьего параграфа второй главы, доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_4\}$, $|\mu^0| > 1$, $1 - \chi < \sigma < min\{2c_0, |\mu^0|/p\}$. *Тогда для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+) \cap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$ *задача Дирихле (2.2.3), (2.2.4) имеет единственное решение* $U \in W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$, *при этом с некоторой постоянной* $C > 0$ *имеет место неравенство*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} \le C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} + \|f\|_{L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n_+)}\right).$$

Теорема 3.3.2. *Пусть* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_4\}$, $\sigma < min\{2c_0, |\mu^0|/p\}$, $1 \ge |\mu^0| > 1 - L\mu^0_{min}$, *где* $\mu^0_{min} = \min\limits_{j=1,\dots,n} \mu^0_j$, *а* L *такое натуральное число, что* $1 - \chi - (L-1)\mu^0_{min} \ge \sigma > 1 - \chi - L\mu^0_{min}$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathfrak{L}_{p,\sigma,L}(\mathbb{R}^n_+)$ *существует единственное решение* $U \in W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$ *задачи (2.2.3), (2.2.4), при этом с некоторой постоянной* $C > 0$ *имеет место неравенство*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} \le C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} + \left\|\left(1+\rho_{\mathfrak{M}}(x,x_n)\right)^{\sigma+L\max\limits_{j=1,\dots,I_{n-2}}|\mu^j|} f(x,x_n)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n_+)}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] С.Л. Соболев. Об одной теореме функционального анализа. Мат. сборник, 4(36):3, (1938), 471-497.
[2] С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, (1962).
[3] L. Schwartz. Theorie des distribution. I, II – Paris: Herman, 1950 – 1951.
[4] K.T. Smith. Inequalities for formally positive integro-differential forms. Bull. Amer. Math. (1961), 368-370.
[5] В.П. Ильин. Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^l(G)$. Сиб. Мат. Журн., т. 8, № 3, (1967), 573-586.
[6] О.В. Бесов. О коэрцитивности в неизотропном пространстве С.Л. Соболева. Мат. сб. 73 (115) №4, (1967), 585-599.
[7] С.М. Никольский. Об одной задаче С.Л.Соболева. Сиб. мат. журнал 3 №6, (1962), 845-857.
[8] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. “Наука”, (1975).
[9] L. Hörmander, “On the theory of general partial differential operators”, Acta. Math., 94, (1955), 161–248.
[10] G.A. Karapetyan. Integral Representations of Functions and Embedding Theorems for Multianisotropic Spaces on the Plane with One Anisotropy Vertex // Journal of Contemporary Mathematical Analysis, Vol. 51, No. 6, (2016), pp. 269—281.
[11] G.A. Karapetyan. Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces for the three-dimensional case // Eurasian Mathematical Journal, ISSN, v.7, n.4, (2016), 19-39.
[12] G.A. Karapetyan, M.K. Arakelyan. Estimation of multianisotropic kernels and their application to the embedding theorems // Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute 171, (2017), 48-56.
[13] Г.А. Карапетян. Интегральное представление и теоремы вложения для n-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности. Сиб. мат. журнал, 58, № 3, (2017), 573–590.
[14] G.A. Karapetyan. An Integral Representation and Embedding Theorems in the Plane for Multianisotropic Spaces // Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), Vol. 52, No. 6, (2017), pp. 267—275.
[15] Г. А. Карапетян, М. К. Аракелян. Теоремы вложения для общих мультианизотропных пространств // Математические заметки, т. 104, № 3, (2018), 422–438.
[16] G.A. Karapetyan, M.A. Khachaturyan. Limiting Embedding Theorems for Multianisotropic Functional Spaces // Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), Vol. 54, No. 2, (2019), 103-111.

[17] С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы // Изд-во иностр. лит., (1963).
[18] С.В. Успенский. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов. Тр. Мат. ин-та АН СССР, (1972), т. 117, с. 292-299.
[19] С.В. Успенский. Об оценках на бесконечности решений общих краевых задач для уравнений квазиэллиптического типа // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики, Новосибирск, Наука, (1973), 196-201.
[20] С.В. Успенский. О корректных задачах для одного класса частично-гипоэллиптических уравнений в полупространстве // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, т. 134, (1975), 350-365.
[21] С.В. Успенский, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкин. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям // Новосибирск: Наука, (1984).
[22] Г.В. Демиденко. О корректной разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений // Сиб. мат. журнал, т. 29, № 4, (1988), 54-67.
[23] Г.В. Демиденко. Об условиях разрешимости смешанных задач для одного класса уравнений соболевского типа // Краевые задачи для уравнений с частными производными / Тр. семинара акад. С.Л. Соболева, Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, (1984), 23-54.
[24] Г.В. Демиденко. Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими урaнениями. I, Сиб. мат. журнал, т.34, №5, (1993), 52-67.
[25] Г.В. Демиденко. Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими урaнениями // II, Сиб. мат. журнал, т. 35, № 1, (1994), 41-65.
[26] Г.В. Демиденко. О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$. Сиб. мат. журнал, т.39, №5, (1998), 1028-1037.
[27] С.М. Никольский. Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных // Сиб. мат. журнал, т.61(103), №2, (1963), 224–252.
[28] В.П. Михайлов. О поведении на бесконечности одного класса многочленов // Тр. МИАН СССР, т.91, (1967), 58–81.
[29] S. Gindikin, L. Volovich. The Method of Newton's Polyhedron in the theory of Partial Differential Equations // K.A.P., London, v. 86, (1992), 266.
[30] Г.Г. Казарян. О плотности гладких финитных функций в $W_p^2(\Omega)$ // Мат. заметки, т. 2, № 1, (1967), 45-62.
[31] О.В. Бесов, В.П. Ильин, Л.Д. Кудрявцев, П.И. Лизоркин, С.М. Никольский. Теория вложений дифференцируемых функций многих переменных. Дифференциальные уравнения с частными производными. М. Наука, (1970), 38-63.
[32] Л.А. Багиров. Априорные оценки. Теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$. Мат. сб., т.110, №4, (1979), 475-492.
[33] Г.А. Карапетян. О стабилизации в бесконечности к полиному решений одного класса регулярных уравнений. Тр. МИАН СССР, 187, (1989), 116–129.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Статьи по теме диссертации

1. Petrosyan H.A. On the Properties of the Symbols of One Class of Hypoelliptic Equations. Journal of Applied and Industrial Mathematics, vol. 13, no. 4 (2019), p. 698–705.
2. Аракелян М. К., Петросян Г. А. Теоремы вложения для трехмерных мультианизотропных пространств с двумя вершинами анизотропности. Вестник РАУ (2016) № 2, стр. 5-19.
3. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Embedding Theorems for Multianisotropic Spaces with Two Vertices of Anisotropicity, Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical Sciences, vol. 51, no. 1 (2017), pp. 29–37.
4. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. On Solvability of Regular Hypoelliptic Equations in $\mathbb{R}^n$. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 53, no. 4 (2018) p. 187–200.
5. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Multianisotropic Integral Operators Defined by Regular Equations. Siberian Mathematical Journal, vol. 60, no. 3 (2019), p. 472–489.
6. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Correct Solvability of the Dirichlet Problem in the Half-space for Regular Hypoelliptic Equations. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 54, no. 4 (2019), p. 195–209.
7. Казарян Г.Г., Карапетянц А.Н., Маргарян В.Н., Мкртчян Г.А., Сергеев А.Г. Новые классы функциональных пространств и сингулярные операторы (Памяти Гарника Альбертовича Карапетяна). Труды Московского математического общества, том 82, вып. 2 (2021).

Тезисы по теме диссертации

1. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Embedding theorems for the n-dimensional multianisotropic spaces with two points of anisotropicity. Abstracts of the 9th Annual Session of Armenian Mathematical Union, Dedicated to the 110th Anniversary of Artashes Shahinyan, Yerevan (2016), p. 70-71.
2. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. About the solvability of regular hypoelliptic equations in $\mathbb{R}^n$. Abstracts of the 9th Annual Session of Armenian Mathematical Union, Yerevan (2017), p. 40-42.
3. Petrosyan H.A. About the solvability of regular hypoelliptic equations in $\mathbb{R}^n$. YSU SSS 4th International Conference, Dedicated to the 70th anniversary of YSU SSS, Yerevan (2017).
4. Петросян Г.А. Корректная разрешимость задачи Дирихле в полупространстве для регулярных уравнений. Сборник тезисов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2018» МГУ М.В. Ломоносова,

Секция: Математика и Механика, Подсекция: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, М.: МАКС Пресс, Москва (2018).

5. Петросян Г.А. Мультианизотропные интегральные операторы, определяемые регулярными уравнениями. Сборник тезисов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019» МГУ М.В. Ломоносова, Секция: Математика и Механика, Подсекция: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, М.: МАКС Пресс, Москва (2019).

6. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Construction of an approximate solutions of the Dirichlet problem in $\mathbb{R}^n$ for regular hypoelliptic operators. Abstracts of International conference "7th Russian-Armenian Workshop on Mathematical Physics, Complex Analysis and Related Topics", Yerevan (2018), p. 41-43.

7. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Construction of Approximate Solutions of the Dirichlet Problem in R^n for Regular Hypoelliptic Operators. Abstracts of of International Conference “Harmonic Analysis and Approximations, VII” Dedicated to 90th anniversary of Alexandr Talalyan, Tsaghkadzor, Armenia (2018), p. 55-57.

8. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Correct solvability of the Dirichlet problem in the half-space for regular equations. Abstracts of International School-Conference "Sobolev Readings" dedicated to the 110th anniversary of the birthday of Sergei L. Sobolev, Novosibirsk, Russia (2018).

9. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Multianisotropic integral operators defined by regular equations. Abstracts of International Conference in honor of the 90th birthday of Sergei K. Godunov “Mathematics and its Applications”, Novosibirsk, Russia (2019), p. 269.

10. Karapetyan G.A., Petrosyan H.A. Approximate solutions of the Dirichlet problem in a half-space for regular equations. Proceedings of the IX international conference "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX", Rostov-on-Don, Russia (2019).

11. Аракелян М.К., Петросян Г.А. Теоремы вложения для трехмерных мультианизотропных пространств с двумя вершинами анизотропности. Сборник научных статей. Одиннадцатая годичная научная конференция РАУ, Физико-математические и естественные науки, Ереван (2017), стр. 7-12.

12. Карапетян Г.А., Петросян Г.А. Построение приближенных решений задачи Дирихле в полупространстве для регулярных уравнений. Сборник научных статей. Двенадцатая годичная научная конференция РАУ, Физико-математические и естественные науки, Ереван (2018) стр. 34-39.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. **Интегральные представления функций из мультианизотропных пространств Соболева и некоторые свойства регулярных гипоэллиптических операторов**

   a) Исследованы некоторые свойства вполне правильных многогранников. На основе полученных свойств установлена верхняя оценка для функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических уравнений.

   b) Получены специальные интегральные представления для функций из мультианизотропного пространства Соболева, когда многогранник Ньютона имеет две вершины анизотропности. Доказаны теоремы вложения для функций, принадлежащих вышеуказанным классам.

2. **Построение приближенных решений регулярных гипоэллиптических уравнений**

   a) Построены приближенные решения регулярных гипоэллиптических уравнений специального типа в $\mathbb{R}^n$ с помощью интегральных операторов.

   b) Применяя специальное интегральное представление функций, которое охватывает все вершины вполне правильного многогранника Ньютона, построены приближенные решения задачи Дирихле для специальных (мультиоднородных) регулярных гипоэллиптических уравнений с нулевыми граничными условиями через интегральные операторы.

   c) С помощью интегральных операторов построены приближенные решения соответствующей задачи Дирихле для регулярных уравнений в $\mathbb{R}^n_+$ в специальных весовых пространствах.

3. **Нормальная разрешимость регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных пространствах Соболева**

   a) С помощью специальных интегральных представлений функций через регулярный оператор доказана однозначная разрешимость регулярных гипоэллиптических уравнений специального вида в мультианизотропных весовых функциональных пространствах на $\mathbb{R}^n$. Существование решений получено через построения приближенных решений с помощью мультианизотропных интегральных операторов.

   b) Применяя специальное интегральное представление функций, которое охватывает все вершины вполне правильного многогранника Ньютона, доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных пространствах Соболева на $\mathbb{R}^n_+$.

   c) Построена шкала весовых пространств, где регулярные операторы корректно разрешимы. Доказана разрешимость задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных весовых пространствах Соболева на $\mathbb{R}^n_+$.

ABSTRACT

Heghine A. Mkrtchyan (Petrosyan)

Regular hypoelliptic equations in multianisotropic Sobolev spaces

The aim of the present thesis is to study the correct solvability of regular hypoelliptic equations in multianisotropic Sobolev spaces.

The following results are obtained:

1. Some properties of the completely regular polyhedron are studied. Based on the obtained properties, an upper bound is established for the functional dimension of the space of solutions of hypoelliptic equations.
2. Special integral representations are obtained for functions from the multianisotropic Sobolev space.
3. Using the special integral representation of functions in terms of a regular operator, the unique solvability of regular hypoelliptic equations of a special form in multianisotropic weighted function spaces on $\mathbb{R}^n$ is proved. The existence of solutions is proved by the construction of approximate solutions.
4. Using the special integral representation of functions correct solvability of the Dirichlet problem with zero boundary conditions for special regular hypoelliptic equations is proved.
5. A scale of weighted spaces is constructed, where the Dirichlet problem in $\mathbb{R}^n_+$ for regular hypoelliptic equations is set correctly.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Մկրտչյան (Պետրոսյան) Հեղինե Արամի

Ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ հավասարումներ մուլտիանիզոտրոպ սոբոլևյան տարածություններում

Սույն ատենախոսությունը նվիրված է ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ հավասարումների կոռեկտ լուծելիության հետազոտմանը մուլտիանիզոտրոպ սոբոլևյան տարածություններում:

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները նոր են և կայանում են հետևյալում՝

1. Ուսումնասիրված են լիովին կանոնավոր բազմանիստերի որոշ հատկություններ: Օգտագործելով ստացված արդյունքները, ստացված է գնահատական վերևից հիպոէլիպտիկ հավասարումների լուծումների տարածության ֆունկցիոնալ չափի համար:
2. Ստացված են հատուկ տիպի ինտեգրալային ներկայացումներ որոշ մուլտիանիզոտրոպ սոբոլևյան տարածության ֆունկցիաների համար:
3. Օգտագործելով ֆունկցիաների հատուկ տիպի ինտեգրալ ներկայացումը, ստացված է որոշակի դասի պատկանող ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ հավասարումների կոռեկտ լուծելիությունը որոշակի մուլտիանիզոտրոպ կշռային տարածություններում: Լուծելիությունը ապացուցված է մոտարկումների լեզվով:
4. Օգտագործելով ֆունկցիաների հատուկ տիպի ինտեգրալ ներկայացումը, ապացուցված է որոշակի դասի պատկանող ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ հավասարումների զրոյական եզրային պայմաններով Դիրիխլեի խնդրի կոռեկտ լուծելիությունը:
5. Կառուցված է կշռային տարածությունների սանդղակ $\mathbb{R}^n_+$-ում որոշված ֆունկցիաների համար, որտեղ Դիրիխլեի խնդիրը ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ հավասարումների համար դրված է կոռեկտ: