

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վիգեն Հայկի Խալատյան

Սահմանափակ ուռուցիկ բազմությունների վերականգնումը տոմոգրաֆիկ եղանակներով

Ա.01.05 «Հավանականությունների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՍԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2022

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Vigen H. Khalatyan

Reconstruction of bounded convex bodies using tomographic methods

ABSTRACT

of dissertation submitted for the degree of candidate of phys-math sciences
Specialty: A.01.05 “Probability theory and mathematical statistics”

YEREVAN 2022

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:
Գիտական ղեկավար՝ ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր Վ.Կ. Օհանյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր Ռ.Յ. Արամյան
ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու ԱՌ ՌՌ Միրունյան
Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման
պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կկայանա 2022 թ. հուլիսի 27-ին՝ ժամը 12:00-ին, Երևանի
պետական համալսարանում գործող ԲՈԿ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում
(0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):


Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի
գրադարանում: Ատենախոսությունը առաքված է 2022 թ. հունիսի 15-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար  Ս. Ն. Հարությունյան

The topic of dissertation was approved by the Yerevan State University
Supervisor: Doctor of phys-math sciences V.K. Ohanyan
Official opponents: Doctor of phys-math sciences R.H. Aramyan
Candidate of phys-math sciences A.R. Simonyan
Leading organization: Institute for informatics and automation problems of NAS RA

Dissertation defense will take place on 27th of July, 2022 at 12:00, at the
meeting of the Specialized Council 050 of the Higher Attestation
Commission at YSU (1 Alex Manoogian, Yerevan 0025, Armenia).

The dissertation is available in the library of Yerevan State University. The
abstract of dissertation was distributed on 15th of June, 2022.

Scientific secretary of specialized council  T. N. Harutyunyan

General description

Topicality: In the last century German mathematician W. Blaschke (see [1]) proposed the problem of finding necessary and sufficient conditions for a sequence of real numbers to be the sequence associated with a convex set and of determining when those conditions are satisfied, whether or not the corresponding convex set is unique. In particular, Blaschke problem was formulized of recognition of bounded convex bodies using covariogram, orientation-dependent chord length distribution function, chord length distribution function etc.

Matheron in 1986 asked the following question:

Covariogram Problem. Does the covariogram determine a convex body, among all convex bodies, up to translations and reflections?

The first partial solution of Matheron's conjecture gave Nagel in 1993 (see [5]). Nagel proved that every planar convex polygon is determined within all planar convex polygons by its covariogram, up to translations and reflections. In 2002 Bianchi, Segala and Volcic provided that if the planar convex body's boundary has strictly positive continuous curvature the covariogram problem has positive answer (see [6]). In 2009 G. Averkov and G. Bianchi showed that every planar convex body is determined within all planar convex bodies by its covariogram, up to translations and reflections (see [9]). In [7] Bianchi provided that if $D \subset R^n$ and $H \subset R^n$ be convex bodies and let L be a nondegenerate linear transformation, then the two convex bodies $L(K \times H)$ and $L(K \times (-H))$ in R^{n+k} have the same covariogram. This means that the covariogram problem in the general case ($n \geq 4$) has a negative answer.

There is another problem which formulated as such a way.

Blaschke problem Is there a one-to-one correspondence between bounded convex bodies D and their chord length distribution functions $F_D(t)$?

This was an old question of W. Blaschke whether the random chord length determines the convex body D uniquely, up to all Euclidean motions. The answer of this

question was given by Mallow and Clark (see [16]), they construct two non-congruent bounded convex 12-gons with the same chord length distribution. It means that we cannot reconstruct convex bodies by

Method to avoid the above mentioned problem is not using completely mixed form of the distribution, but preserving information about the line which generates the chord (see [21], [5]) and to examine the above mentioned question in subclasses of the class of convex bodies for which the chord length distribution provides sufficient information to distinguish between non-congruent members (see [17], [18]).

The covariogram problem appears independently in other contexts. Adler and Pyke (see [30], [31]) asked whether the distribution of the difference $P_1 - P_2$ of two independent random points P_1, P_2 uniformly distributed over D determines D up to translations and reflections. This problem is equivalent to the covariogram problem, from the observation that the convolution in (0.1) is the probability density of $P_1 - P_2$, up to a multiplicative factor.

It is very little known about the above mentioned problem. One of the result of this dissertation is the explicit form of relationship between covariogram and distribution function of the distance between two uniformly and independently distributed points which is presented in second chapter.

Objectives:

1) Explicit form of kinematic measure in terms of chord length distribution function

2) Relationship between covariogram and distribution function of the distance between two uniformly and independently points

3) The calculation of the covariogram and Orientation-dependent chord length distribution function for any trapezoid.

4) Relationships between the covariogram and the orientation-dependent chord length distribution function of an oblique prism and those of its base.

5) Explicit forms of the covariogram and the orientation-dependent chord length distribution function of an oblique prism with circular, elliptical, trapezoidal and triangular bases.

Research methods: Methods from Integral and Stochastic Geometry and Probability Theory.

Main results of the dissertation are published in four papers; references can be found in the end of this booklet.

Structure and volume of dissertation: the dissertation is written on 76 pages; consists of an introduction, three chapters, conclusion and the list of 41 cited references.

Overview and main results

Let R^n ($n \geq 2$) be the n -dimensional Euclidean space, $D \subset R^n$ be a bounded convex body with inner points and V_n be n -dimensional Lebesgue measure in R^n . The covariogram $C(D, h)$ of D is the function (see [2])

$$C(D, h) = V_n(D \cap (D + h)),$$

where $h \in R^n$ and $D + h = \{y + h, y \in D\}$ is the translation of D by h . Another way of representing covariogram is autocorrelation of the characteristic function of D :

$$C(D, h) = I_D * I_{(-D)} = \int_{R^n} I_D(t) * I_{(-D)}(h - t) dt \quad (0.1)$$

where $*$ denotes convolution and $-D$ is the reflection of D in the origin.

Denote by G the space of all lines g in the Euclidean plane R^2 . The space G of lines can be mapped in a one-to-one way onto the surface of a unit cylinder with the usual cylindrical coordinates (p, ϕ) , where ϕ is the direction of g (ϕ is a point on the unit circle) and p is the distance from the origin O to g . Let $\nu(\cdot)$ be the locally finite measure on G , invariant with respect to the group of all Euclidean motions (translations and rotations).

It is well known that the element of the measure up to a constant factor has the following form (see [13]):

$$\nu(dg) = dg = dpd\phi$$

where dp is the one-dimensional Lebesgue measure and $d\phi$ is the uniform measure on the unit circle.

We denote by $[D]$ all lines that intersect bounded convex body D

$$[D] = \{g \in G : g \cap D \neq \emptyset\},$$

Furthermore, let A_D^t be the set of lines that intersect D , producing a chord $\chi(g) = g \cap D$ of length less than t , i.e.

$$A_D^t = \{g \in [D] : |\chi(g)| \leq t\}, \quad t \in R.$$

The distribution function for the length of a random chord χ of D is usually defined as

$$F_D(t) = \frac{\nu(A_D^t)}{|\partial D|} = \frac{1}{|\partial D|} \int \int_{A_D^t} dpd\phi$$

the same way we can define chord length distribution function for higher dimensional spaces [14].

Let P_1 and P_2 be two points chosen at random, independently and with uniform distribution in D . Firstly, we are going to find the probability that the distance $\rho(P_1, P_2)$ between P_1 and P_2 is less or equal to x , that is we would like to find the distribution function $F_\rho(x)$ of $\rho(P_1, P_2)$. By definition, we have

$$F_\rho(t) = P(P_1, P_2 \in D : \rho(P_1, P_2) \leq t) = \frac{\iint_{\{(P_1, P_2) : \rho(P_1, P_2) \leq t\}} dP_1 dP_2}{\iint_{\{P_1, P_2 \in D\}} dP_1 dP_2}$$

where dP_i , $i = 1, 2$ is an element of Lebesgue measure in R^n .

Let O_n be the surface area of the n -dimensional unit sphere. O_n is defined [11]

$$O_n = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

where Γ is the gamma function which satisfies the recursion formula,

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$$

especially, $\Gamma(n + 1) = n!$ and $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Theorem 1. For any body D in R^n

$$K(D, t) = \frac{O_{n-1}}{2}V(D) - \frac{O_{n-2}}{2(n-1)}S(D) \int_0^t [1 - F_D(u)]du \quad (0.2)$$

where $K(D, t)$ is the kinematic measure of all oriented segments of length t that lie inside D

We know that

$$f_\rho(t) = \frac{t^{n-1}K(D, x)}{V^2(D)} \quad (0.3)$$

Using equations (0.2) and (0.3) we get the relationship between the density function of the distance between two points chosen at random, independently, and with uniform distribution in D and the chord length distribution function as follows

$$f_\rho(t) = \frac{1}{V^2(D)} \left(t^{n-1}O_{n-1}V(D) - \frac{t^{n-1}O_{n-2}}{(n-1)}S(D) \int_0^t [1 - F_D(u)]du \right). \quad (0.4)$$

From equation (0.4) density function of the distance between two points chosen at random, independently, and with uniform distribution in a ball of diameter d we obtain:

$$f_\rho(r) = \frac{24r^2}{d^3} + \frac{12r^5}{d^6} - \frac{36r^3}{d^4}. \quad (0.5)$$

Knowing the density function of the distance between two points chosen at random, independently, and with uniform distribution in D we calculate the k -th moment of the distance between two points chosen at random, independently, and with uniform distribution in D which is expressed in the following formula:

$$M_n^k = \frac{O_{n-2}S_n(D)}{(n-1)(n+k)V_n^2(D)} \int_0^d x^{n+k}(1 - F_D(x))dx \quad (0.6)$$

From [0.5](#) and [0.6](#) we calculate the mean of the distance between two points chosen at random, independently, and with uniform distribution in ball.

$$M_3^1 = \frac{9}{16r^4} \int_0^d x^4 \left[1 - \left(\frac{x}{d} \right)^2 \right] dx = \frac{18}{35}d.$$

Let P_1 and P_2 be two points chosen at random, independently and with uniform distribution in D . Denote by $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ the coordinates of P_1 and by $(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$ the coordinates of P_2 . Denote by (x_1, x_2, \dots, x_n) difference of corresponding coordinates of P_1 and P_2 ($x_i = x_{1i} - x_{2i}$). We define distribution function of difference of two points

$$F_{P_1-P_2}(h) = \frac{\int_{(P_1, P_2 \in D: x_1 \leq h_1, x_2 \leq h_2, \dots, x_n \leq h_n)} dP_1 dP_2}{V_n^2(D)}$$

We obtain the relationship between distribution function of difference of two points chosen at random, independently, and with uniform distribution in D and the covariogram of D

$$f_{P_1-P_2}(h) = \frac{C(D, h)}{V_n^2(D)}$$

and also we obtain the relationship between density function of $P_1 - P_2$ and orientation depend chord length distribution function

$$f_{P_1-P_2}(h) = \frac{1}{V_n^2(D)} \left(V_n(D) - b(D, u) \int_0^t (1 - F_D(s, u)) ds \right)$$

We get relationship between covariogram and density function of the distance between two randomly and independently chosen points

$$\begin{aligned} f_\rho(t) &= \frac{1}{2} \int_{S_{n-1}} r^{n-1} \left(\frac{C(D, t, u)}{V_n^2(D)} + \frac{C(D, t, u)}{V_n^2(D)} \right) du = \\ &= \frac{t^{n-1}}{V_n^2(D)} \int_{S_{n-1}} C(D, t, u) du \end{aligned} \quad (0.7)$$

Using [\(0.7\)](#) we get formula for calculating kinematic measure using covariogram.

We know that (see [39](#))

$$f_\rho(t) = \frac{t^{n-1}K(D, t)}{V_n^2(D)}$$

where $K(D,t)$ is the kinematic measure of all oriented segments of length t that lie entirely inside D (see [1]).

We can calculate k -th moment using the following formula

$$M_n^k = \int_0^d \frac{x^{n+k-1}}{V_n^2(D)} \int_{S^{n-1}} C(D, x, u) du dx$$

In chapter three obtained the relationship between the covariogram of the oblique prism U with base B using the covariogram of its base

$$C(U, t, \omega) = C\left(B, \left(\frac{t \sin(\beta - \theta)}{\sin \beta}\right), \phi\right) (d \sin \beta - t \sin \theta) \quad (0.8)$$

For oblique prism U with base B (not necessarily convex), with prism generator d and angle between prism generator and base β the orientation-dependent chord length distribution given by the following formula

$$F_U(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \leq 0 \\ \frac{b(B, \phi) \left(\frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta}\right)}{V_2(B) \sin \theta + b(B, \phi) d \sin \beta \left(\frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta}\right)} \left(t \sin \theta + \right. \\ \left. + \sin \theta \int_0^t (1 - F_B\left(\left(\frac{u \sin(\beta - \theta)}{\sin \beta}\right), \phi\right)) du + \right. \\ \left. + (d \sin \beta - t \sin \theta) F_B\left(\left(\frac{t \sin(\beta - \theta)}{\sin \beta}\right), \phi\right) \right), & \text{if } 0 \leq t \leq t_{max}(\omega) \\ 1, & \text{if } t \geq t_{max}(\omega) \end{cases} \quad (0.9)$$

Where $t_{max}(\omega)$ is

$$t_{max}(\omega) = \begin{cases} \frac{\sin \beta x_{max}(\phi)}{|\sin(\beta - \theta)|}, & \text{if } \theta \in [0, \arccos \frac{d \sin \beta}{d \sin \beta + x_{max}(\phi)}] \cup \\ & \cup [-\arctan \frac{d \sin \beta}{x_{max}(\phi) - d \sin \beta}, 0] \\ \frac{d \sin \beta}{|\sin \theta|}, & \text{if } [\arccos \frac{d \sin \beta}{d \sin \beta + x_{max}(\phi)}, \pi/2] \cup \\ & \cup [-\pi/2, -\arctan \frac{d \sin \beta}{x_{max}(\phi) - d \sin \beta}] \end{cases} \quad (0.10)$$

when $d \cos \beta < x_{max}(\phi)$ and

$$t_{max}(\omega) = \begin{cases} \frac{\sin \beta x_{max}(\phi)}{|\sin(\beta - \theta)|}, & \text{if } \theta \in [0, \arctan \frac{d \sin \beta}{x_{max}(\phi) + d \sin \beta}] \\ \frac{d \sin \beta}{|\sin \theta|}, & \text{if } \theta \in [\arctan \frac{d \sin \beta}{x_{max}(\phi) + d \sin \beta}, \arctan \frac{d \sin \beta}{d \sin \beta - x_{max}(\phi)}] \\ \frac{\sin \beta x_{max}(\phi)}{|\sin(\theta - \beta)|}, & \text{if } \theta \in [\arctan \frac{d \sin \beta}{d \sin \beta - x_{max}(\phi)}, \pi/2] \cup [-\pi/2, 0] \end{cases} \quad (0.11)$$

when $d \cos \beta > x_{max}(\phi)$.

Let $T \subset R^2$ be a trapezoid with bases a and b and the angle between longer base and legs are ψ_1, ψ_2 . Without loss of generality we can assume that $0 < \psi_1 \leq \pi/2$, $\psi_1 \leq \psi_2 < \pi$ and $b < a$. We can translate and rotate trapezoid so that the longer base located in X axis.

$F_T(x, \phi) = 0$ if $x < 0$ and $F_T(x, \phi) = 1$ if $x > x_{max}(\phi)$. Now we discuss the non-trivial cases when $0 < x < x_{max}$. Because this is π periodic function we can assume that k is equal to 0.

(i) For $0 \leq \phi < \psi_1$

$$F_T(x, \phi) = \begin{cases} \frac{x \sin \phi (\sin(\psi_1 - \phi) \sin \psi_2 + \sin \psi_1 \sin(\phi + \psi_2))}{b(T, \phi) \sin \psi_1 \sin \psi_2}, & \text{if } 0 \leq x < x_0(\phi) \\ \frac{1}{b(T, \phi)} (b \sin \phi + \\ + \frac{(x - x_0(\phi)) \sin(\psi_1 - \phi) \sin(\psi_2 + \phi)}{\sin(\psi_1 + \psi_2)} + \\ + \frac{x \sin(\phi + \psi_2) \sin \phi}{\sin \psi_2}), & \text{if } x_0(\phi) \leq x < x_{max}(\phi) \end{cases}$$

(ii) For $\psi_1 \leq \phi < \pi - \psi_2$

$$F_T(x, \phi) = \frac{x \sin \phi}{b(T, \phi)} \left(\frac{\sin(\psi_2 + \phi) \sin \psi_1 + \sin(\phi - \psi_1) \sin \psi_2}{\sin \psi_1 \sin \psi_2} \right)$$

(iii) For $\pi - \psi_2 \leq \phi < \pi$

$$F_T(x, \phi) = \begin{cases} \frac{-x \sin \phi (\sin \psi_1 \sin(\phi + \psi_2) - \sin(\phi - \psi_1) \sin \psi_2)}{b(T, \phi) \sin \psi_1 \sin \psi_2}, & \text{if } 0 \leq x \leq x_0(\phi) \\ \frac{1}{b(T, \phi)} (b \sin \phi - \\ - \frac{(x - x_0(\phi)) \sin(\psi_2 + \phi) \sin(\phi - \psi_1)}{\sin(\psi_1 + \psi_2)} + \\ + \frac{x \sin \phi \sin(\phi - \psi_1)}{\sin \psi_1}), & \text{if } x_0(\phi) \leq x < x_{max}(\phi) \end{cases}$$

Where $x_0(\phi)$ and $x_1(\phi)$ are lines which has ϕ angle with X-axis, pass through a vertex of trapezoid and make a chord of positive Lebesgue measure,

$$x_0(\phi) = \min \chi(l_\phi + y) \text{ and } x_1(\phi) = \max \chi(l_\phi + y)$$

Using equations [0.8](#) and [0.9](#) we calculate the covariogram and orientation-dependent chord length distribution function of circular oblique prism with base circle of radius r , side d and sides lean over at the base is β (circular oblique prism denote by L_r)

$$C(L_r, t, \omega) = \begin{cases} (d \sin \beta - t \sin \theta) 2r^2 \arccos \frac{t \sin(\theta - \beta)}{2r \sin \beta} - \\ - \frac{t \sin(\theta - \beta)}{2 \sin \beta} \sqrt{4r^2 - \frac{t \sin(\theta - \beta)}{\sin \beta}}, & \text{if } 0 \leq t \leq \chi_{max}(\omega) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F_{L_r}(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 0 \\ \frac{2 \left(\frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta} \right)}{\pi r \sin \theta + 2d \sin(\beta - \theta)} \left(d \sin \beta - \right. \\ \left. - (d \sin \beta - \frac{3t \sin \theta}{2}) \left(\sqrt{1 - \left(\frac{t \sin(\beta - \theta)}{2r \sin \beta} \right)^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{r \sin \theta \sin \beta}{\sin(\theta - \beta)} (\arcsin(\frac{t \sin(\beta - \theta)}{2r \sin \beta})) \right) & \text{if } 0 \leq t < \chi_{max}(\omega) \\ 1, & \text{if } t \geq \chi_{max}(\omega) \end{cases}$$

Using equations [0.8](#) and [0.9](#) we calculate the covariogram and orientation-dependent chord length distribution function of an elliptical oblique prism with with prism generator d , the angle with prism generator and base is β and base as an ellipse with

semi-major axes a and b (Denote by L_e an elliptical oblique prism and by $E_{a,b}$ its base)

$$C(L_e, t, \omega) = 2ab \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t \sin(\beta - \theta)}{\chi_{max}(\phi) \sin \beta} \sqrt{1 - \frac{t^2 \sin^2(\beta - \theta)}{\chi_{max}(\phi)} \sin^2 \beta} - \arcsin \frac{t \sin(\beta - \theta)}{\chi_{max}(\phi) \sin \beta} \right) (d \sin \beta - t \sin \theta)$$

$$F_{L_e}(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 0 \\ \frac{b(E_{a,b}, \phi) \left(\frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta} \right)}{\pi ab \sin \theta + b(E_{a,b}, \phi) d \sin(\beta - \theta)} \left(d \sin \beta - \right. \\ \left. - (d \sin \beta - \frac{3t \sin \theta}{2}) \left(\sqrt{1 - \left(\frac{t \sin(\beta - \theta)}{\chi_{max}(\phi) \sin \beta} \right)^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\chi_{max}(\phi) \sin \theta \sin \beta}{2 \sin(\theta - \beta)} \left(\arcsin \left(\frac{t \sin(\beta - \theta)}{\chi_{max}(\phi) \sin \beta} \right) \right) \right) & \text{if } 0 \leq t < \chi_{max}(\omega) \\ 1, & \text{if } t \geq \chi_{max}(\omega) \end{cases}$$

and $b(E_{a,b}, \phi)$ is equal to

$$b(E_{a,b}, \phi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}$$

Let L_Δ denote an oblique prism with triangular base Δ . We consider the side of Δ that lies on the X axes. Let a be the length of that side, and ψ_1 and ψ_2 be the corresponding adjacent angles. equations [0.8](#) and [0.9](#) we calculate the covariogram and orientation-dependent chord length distribution function of L_Δ

$$C(L_\Delta, t, \phi) = \begin{cases} S_\Delta \left(1 - \frac{t \sin(\beta - \theta)}{\sin \beta \chi_{max}(\phi)} \right)^2 (s \sin \beta - t \sin \theta), & \text{if } 0 \leq t < \chi_{max}(\omega) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where S_Δ is the area of the triangle Δ .

$$F_{L\Delta}(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \leq 0 \\ \frac{tb(B, \phi) \left(\frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta} \right)}{S_{\Delta} \sin \theta + b(B, \phi) d \sin \beta \left(\frac{2 \sin(\beta - \theta)}{\sin \beta} \right)} \\ \left(2 \sin \theta - \frac{3t \sin \theta \sin(\beta - \theta)}{2 \sin \beta \chi_{max}(\phi)} + \frac{d \sin(\beta - \theta)}{\chi_{max}(\phi)} \right), & \text{if } 0 \leq t \leq t_{max}(\omega) \\ 1, & \text{if } t \geq t_{max}(\omega) \end{cases}$$

In desertation it also calculated the orientation-dependent chord length distribution function for an oblique prism with trapezoid base.

References

- [1] Santalo, L. A. (2004). Integral geometry and geometric probability. Addison-Wesley, MA.
- [2] Gardner, R. J. (2006). Geometric Tomography. Cambridge University Press, New York.
- [3] Matheron, G. (1975). Random Sets and Integral Geometry. Wiley, New York.
- [4] Benassi, C., Bianchi, G. and D'Ercole, G. (2010). Covariogram of non-convex sets. *Mathematika*, vol. 56, 267-284.
- [5] Nagel, W. (1993). Orientation dependent chord length distributions characterize convex polygons. *Appl. Prob.*, vol. 30, no. 3, 730-736.
- [6] Bianchi, G., Segala, F. and Volcic, A. (2002). The solution of the covariogram problem for plane C_+^2 convex bodies. *Differential Geom.*, vol. 60, 177-198.
- [7] Bianchi, G. (2005). Matheron's conjecture for the covariogram problem. *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 71, no. 1, 203-220.
- [8] Averkov, G. and Bianchi, G. (2007). Retrieving convex bodies from restricted covariogram functions. *Adv. Appl. Prob.*, (SGSA), vol. 39, 613-629.
- [9] Bianchi, G. and Averkov, G. (2009). Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body. *Journal of the European Mathematical Society*, vol. 11, 1187-1202.
- [10] Bianchi, G. (2009). The covariogram determines three-dimensional convex polytopes. *Advances in Mathematics*, vol. 220, no. 6, 1771-1808.
- [11] Gardner, R., Gronchi, P. and Zong, C. (2005). Sums, projections, and selections of lattice sets, and the discrete covariogram. *Discrete Comput. Geom.*, vol. 34, 391-409.

- [12] Horváth, Á. G. (2020). On convex bodies that are characterizable by volume function. *Arnold Mathematical Journal*, vol. 6, no 1, 1-20.
- [13] Ambartzumian, R. V. (1982). *Combinatorial Integral Geometry*. John Wiley, Chichester.
- [14] Ambartzumian, R. V. (1990). *Factorization Calculus and Geometric Probability*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [15] Harutyunyan, H. S. and Ohanyan, V. K. (2009). Chord length distribution function for regular polygons. *Advances in Applied Probability (SGSA)*, vol. 41, no. 2, 358-366.
- [16] Mallows, C. L. and Clark, J. M. (1970). Linear intercept distributions do not characterize plane sets. *Appl. Prob.*, vol. 7, 240-244.
- [17] Gates, J. (1982). Recognition of triangles and quadrilaterals by chord length distribution. *Appl. Prob.*, vol. 19, 873-879.
- [18] Waksman, P. (1985). Plane polygons and a conjecture of Blaschke's. *Adv. Appl. Prob.*, vol. 17, 774-793.
- [19] Sulanke, R. (1961). Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren. *Mathematische Nachrichten*, vol. 23, no. 1, 51-74.
- [20] Gille, W. (1988) The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases. *Exp. Techn. Phys.*, vol. 36, 197-208.
- [21] Schneider, R. and Weil, W. (2008). *Stochastic and Integral Geometry*. Springer Verlag, Berlin.
- [22] Gasparyan, A. G. and Ohanyan, V. K. (2014). Covariogram of a parallelogram. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, vol. 49, no. 4, 17-34.

- [23] Harutyunyan, H. S. and Ohanyan, V. K. (2014). Covariogram of a cylinder. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, vol. 49, no. 6, 366-375.
- [24] Aharonyan, N. G. and Ohanyan, V. K. (2018). Calculation of geometric probabilities using covariogram of convex bodies. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, vol. 53, no. 2, 113–120.
- [25] Gasparyan, A. G. and Ohanyan, V. K. (2015). Orientation-dependent distribution of the length of a random segment and covariogram. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, vol 50, no 2, 90–97.
- [26] Harutyunyan, H. S. and Ohanyan, V. K. (2011). Chord length distribution function for convex polygons. *Sutra: International Journal Mathematical Science Education*, vol. 4, no. 2, 1-15.
- [27] Ohanyan, V. K. and Adamyan, G. K. (2019). Covariogram of a right parallelepiped. *Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical Sciences*, vol. 53, no. 2, 101–108.
- [28] Ohanyan, V. K. and Martirosyan, D. M. (2020). Orientation-dependent chord length distribution function for right prisms with rectangular or right trapezoidal bases. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, vol. 55, no. 6, 344–355.
- [29] Gasparyan, A. G. and Ohanyan, V. K. (2015). Orientation dependent chord length distribution as a function of maximal chord. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, vol. 50, no. 5, 253-257.
- [30] Adler, R. J. and Pyke, R. (1991). Problem 91–3, *Inst. Math. Statist. Bull.*, vol. 20, 409.
- [31] Adler, R. and Pyke, R. (1997). Scanning Brownian processes, *Adv. Appl. Prob.*, vol. 29, 295-326.

- [32] Aramyan, R. and Yeranyan, D. (2020), Chord length distribution and the distance between two random points in a convex body in R^n , General Letters in Mathematics, vol. 9, no. 2, 74-79.
- [33] Moseeva, T. (2019), Random sections of convex bodies, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, vol. 486, 190-199.
- [34] Aharonyan, N.G. and Ohanyan, V.K. (2016). Moments of the distance between two random points. Modeling of Artificial Intelligence, vol. 10, no. 2, 64-70.
- [35] Aharonyan, N.G. and Harutyunyan, H.O. (2017). Geometric probability calculation for a triangle. Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical Sciences, vol. 51, no. 3, 211-216.
- [36] Harutyunyan, H. S. and Ohanyan, V. K. (2014). Orientation-dependent section distributions for convex bodies. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 49, no. 3, 139-156.
- [37] Gasparyan, A. G. and Ohanyan, V. K. (2013). Recognition of triangles by covariogram. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 48, no. 3, 110-122.

Author's publications related to the dissertation

- [38] Aharonyan, N.G. and Khalatyan, V. (2020). Distribution of the Distance between Two Random Points in a Body from R^3 . Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 55, no. 2, 71-75.
- [39] Aharonyan, N.G. and Khalatyan, V. (2020). Distribution of the Distance between Two Random Points in a Body from R^n . Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 55, no. 6, 329-334.
- [40] Ohanyan, V.K. and Khalatyan, V.H. (2022). Relation between the covariogram and distribution function of the distance between two uniform and independent points. Proceedings of the YSU A: Physical and Mathematical Sciences, vol. 56, no. 1, 33-42.
- [41] Khalatyan, V. (2022). Covariogram and Orientation-Dependent Chord Length Distribution Function for Oblique Prism. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, Vol. 57, No. 3, pp. 157–171.

Անփոփահզիր

Ատենախոսությունում քննարկված են հարցեր, որոնք վերաբերում են տոմոգրաֆիկ եղանակներով սահմանափակ ուռուցիկ մարմինների վերականգնմանը: Մասնավորապես քննարկվել են կովարիոգրամի խնդիրը, որը առաջադրել է Մատերոնը 1986 թվականին, և Բլյաշկեի խնդիրը: Խնդիրների բուն նպատակը հավանականային բնութագրիչներով մարմինների նույնականացումն է և այդ մարմինների որոշ հատկությունների վերհանումը:

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

Կապը մարմնի մեջ երկու պատահական, հավասարաչափ բաշխված և անկախ կետերի միջև հեռավորության բաշխման ֆունկցիայի և կինեմատիկ չափի բոլոր ուղիղների, որոնք ամբողջությամբ գտնվում են մարմնի ներսում:

Կապը լարի երկարության բաշխման ֆունկցիայի և կինեմատիկ չափի բոլոր ուղիղների, որոնք ամբողջությամբ գտնվում են մարմնի ներսում:

Հաշվարկված է ցանկացած տարածությունում գնդի երկու պատահական, հավասարաչափ բաշխված և անկախ կետերի միջև հեռավորության խտության ֆունկցիան:

Մարմնում երկու պատահական, հավասարաչափ բաշխված և անկախ կետերի հեռավորության K -րդ կարգի մոմենտի բացահայտ տեսքը կախված լարի երկարության բաշխման ֆունկցիայից:

Հաշվարկված է ցանկացած չափանի գնդի երկու պատահական, հավասարաչափ բաշխված և անկախ կետերի միջև հեռավորության K -րդ կարգի մոմենտը:

Ստացել ենք կապ երկու պատահական, հավասարաչափ բաշխված և անկախ կետերի տարբերության խտության ֆունկցիայի և կովարիոգրամի միջև:

Ստացել ենք կապ երկու պատահական, հավասարաչափ բաշխված և անկախ կետերի հեռավորության խտության ֆունկցիայի և կովարիոգրամի միջև:

Հաշվարկվել են ցանկացած չափանի գնդի երկու պատահական, հավասարաչափ բաշխված և անկախ կետերի տարբերության խտության ֆունկցիաները:

Հաշվարկվել է երկու պատահական, հավասարաչափ բաշխված և անկախ կետերի հեռավորության խտության ֆունկցիան եռանկյան համար՝ օգտագործելով եռանկյան կովարիոգրամի բացահայտ տեսքը:

Հաշվարկված է թեք պրիզմայի կովարիոգրամը՝ արտահայտված իր հիմքի կովարիոգրամով: Նաև տրված է կապ թեք պրիզմայի ուղղությունից կախված լարի երկարության բաշխման ֆունկցիայի և իր հիմքի ուղղությունից կախված լարի երկարության բաշխման ֆունկցիայի միջև:

Հաշվարկվել է ուղղությունից կախված լարի երկարության բաշխման ֆունկցիան սեղանի համար: Բացահայտ տեսքով տրվել են թեք գլանի, էլիպտիկ հիմքով թեք պրիզմայի, եռանկյուն հիմքով, թեք պրիզմայի, սեղանի հիմքով, թեք պրիզմայի ուղղությունից կախված լարի երկարության բաշխման ֆունկցիան և կովարիոգրամը:

Վերոնշյալ բոլոր արդյունքները ներկայացված են [38]-[41] աշխատանքներում:

Аннотация

В автореферате диссертации затронуты вопросы, касающиеся восстановления ограниченных выпуклых тел томографическими методами. В частности, обсуждалась задача ковариограммы, которую выдвинул Матерон в 1986 году и задача Бляшке. Основной целью работы является восстановление тел вероятностными характеристиками и выявление некоторых свойств этих тел.

В диссертации получены следующие результаты:

связь функции распределения расстояния между двумя случайными, равномерно распределенными и независимыми точками и кинематической меры отрезков, которые полностью лежат в теле, связь между функцией распределения длины хорды и кинематической меры всех отрезков, которые полностью лежат в теле.

Вычислена функция плотности расстояния между двумя случайными, равномерно распределенными и независимыми точками шара в евклидовом пространстве любой размерности.

Явный вид момента k -го порядка расстояния между двумя случайными, равномерно распределенными точками в теле, в зависимости от функции распределения длины хорды.

Вычислен момент расстояния k -го порядка между двумя случайными, равномерно распределенными и независимыми точками шара любой размерности.

Получена связь между функцией плотности расстояния двух случайных равномерно распределенных и независимых точек шара любой размерности и ковариограммы этого тела.

Вычислена функция плотности расстояния двух случайных, равномерно распределенных и независимых точек для треугольника используя явный вид ковариограммы треугольника.

Вычислена ковариограмма наклонной призмы, в терминах ковариограммы её основания. Также дана связь между зависящей от направления функцией распределения длины хорды наклонной призмы и направления функцией распределения длины хорды зависящей от её основания.

Вычислена зависящая от направления функция распределения длины хорды трапеции.

В явном виде дана зависящая от направления функция распределения длины хорды для наклонного цилиндра, наклонной призмы с эллиптическим основанием, наклонной призмы с треугольным основанием, наклонной призмы с трапециевидальным основанием и ковариограммы этого тела.

Все вышеупомянутые результаты представлены в работах [38] – [41].