О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Г.А. Мкртчян (Петросян) "Регулярные гипоэллиптические уравнения в мультианизотропных пространствах Соболева", представленную на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, математическая физика

В диссертации рассматривается класс регулярных гипоэллиптических операторов

$$P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha D^\alpha$$

с постоянными коэффициентами. Гипоэллиптические операторы были введены в 50-е гг. Л. Хёрмандером. Им же установлены первые критерии гипоэллиптичности. Обобщения этих результатов были получены в работах Л. Гординга, Б. Мальгранжа, Ж. Питре, Л. Эренпрайса, С. М. Никольского, Г. Г. Казаряна, В. П. Михайлова и др. В класс гипоэллиптических операторов входят, в частности, параболические, эллиптические и квазиэллиптические операторы, для которых хорошо изучены свойства в канонических областях (R^n, R^n_+, R^n_{++} и др.), и для соответствующих уравнений построены теории краевых задач в гёльдеровых и соболевских пространствах. Для общего класса гипоэллиптических уравнений теории краевых задач пока не существует. Основными сложностями являются удачный выбор функциональных пространств, в которых нужно искать решение краевых задач, и нахождение условий разрешимости. Как показывают примеры, теоремы о разрешимости краевых задач могут существенно отличаться от соответствующих результатов для классических уравнений. Основные цели представленной диссертации — рассмотрение специального класса мультианизотропных пространств Соболева $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}$, изучение свойств семейства построенных регуляризаторов в пространствах $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}$ и на их основе доказательство однозначной разрешимости регулярных гипоэллиптических уравнений в R^n, а также задачи Дирихле в R^n_+ в пространствах $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}$. Поэтому тема исследований является актуальной и представляет несомненный интерес.

Перейдем к описанию результатов диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы.

Во введении дается краткий обзор литературы и излагаются основные результаты диссертации.

В начале первой главы диссертации изучаются некоторые свойства вполне правильных многогранников, связанных с регулярными гипоэллиптическими операторами. Отметим, что использование многогранников оказалось очень удобным при изучении различных свойств гипоэллиптических уравнений. На их основе Автор доказывает важную теорему о функциональной размерности пространства решений регулярных гипоэллиптических уравнений. Эта теорема является аналогом известной теоремы В. Н. Маргаряна для гипоэллиптических уравнений. С использованием правильных многогранников определяется также класс мультианизотропных пространств Соболева $W_p^{\mathfrak{N}}(R^n)$. Пространства такого типа изучались в работах С. М. Никольского, Г. Г. Казаряна, Г. А. Карапетяна, В. П. Михайлова и др. Во втором параграфе Автор рассматривает пространства такого типа в случае, когда многогранник Ньютона имеет две вершины анизотропности и на основе интегрального представления функций доказывает теорему вложения.

Вторая глава является самой объёмной в диссертации. Она посвящена изучению свойств интегральных операторов, возникающих при построении приближенных решений класса регулярных гипоэллиптических уравнений в R^n и задачи Дирихле для таких уравнений в R^n_+.

Построение приближенных решений гипоэллиптических уравнений

$$P(D)u = f(x), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

основано на использовании специального интегрального представления суммируемых функций из работы Г. А. Карапетяна, усредняющее ядро которого определяется через символ оператора $P(D)$. Отметим, что впервые интегральное представление такого типа было построено в известной работе С. В. Успенского (1972 г.) при изучении квазиэллиптических операторов в R^n. На основе интегрального представления суммируемых функций приближенные решения уравнения (1) строятся в виде

$$u_h(x) = R_h f(x), \qquad h > 0.$$

44

Автор устанавливает оценки норм семейства интегральных операторов R_h, $h > 0$ в мультианизотропных пространствах $W^{\mathfrak{R}}_{p,\sigma}$. Основным результатом является доказательство фундаментальности этого семейства в различных парах пространств суммируемых функций.

Во второй части второй главы Автор описывает конструкцию приближенных решений задачи Дирихле для класса регулярных гипоэллиптических уравнений

$$\begin{aligned} &P(D)U = f(x), && x \in R^n_+, \\ &D^j_{x_n}U|_{x_n=0} = 0, && j = 0, 1, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Используя идею построения приближенных решений краевых задач для квазиэллиптических уравнений в R^n_+, а также интегральное представление суммируемых функций, приближенные решения задачи (2) строятся в виде следующей суммы интегральных слагаемых:

$$U_h(x) = R^+_h f(x) + R^-_h f(x) + \sum_{j=1}^{m} R_{j,h} f(x), \qquad h > 0.$$

Автор получает оценки норм семейств интегральных операторов $R^+_h + R^-_h$, $R_{j,h}$, $h > 0$, в мультианизотропных пространствах $W^{\mathfrak{R}}_{p,\sigma}$. Основным результатом является доказательство фундаментальности этих семейств в различных парах пространств суммируемых функций.

Третья глава диссертации посвящена изучению разрешимости регулярных гипоэллиптических уравнений (1) и задачи Дирихле для таких уравнений (2) в весовых мультианизотропных пространствах Соболева. Используя основные результаты из второй главы о фундаментальности семейств операторов R_h, $R^+_h + R^-_h$, $R_{j,h}$, $h > 0$, в соответствующих пространствах, Автор устанавливает сходимость последовательностей приближенных решений уравнения (1) и задачи (2) в пространствах $W^{\mathfrak{R}}_{p,\sigma}$. На основе используемого интегрального представления суммируемых функций показано, что пределы последовательностей $\{u_h(x)\}$ и $\{U_h(x)\}$ являются решениями уравнения (1) и задачи Дирихле (2) соответственно. Установлены оценки для норм решений и доказана единственность решений.

Отметим интересный факт о разрешимости уравнения (1) и задачи Дирихле (2), который является новым для рассматриваемого класса уравнений. А именно, из доказанных теорем вытекает, что эти задачи не всегда безусловно разрешимы в рассматриваемых пространствах, и для их разрешимости требуются дополнительные условия на правую часть $f(x)$ типа условий ортогональности некоторым полиномам. Это зависит от некоторых соотношений между порядками дифференциальных операторов, размерности n, степени суммируемости p и показателя веса σ. В частности, чем больше n, p и σ, тем меньшее число условий ортогональности требуется для разрешимости. При определенных соотношениях между указанными параметрами задачи являются безусловно разрешимыми.

В диссертации имеются отдельные погрешности редакционного характера, но они представляются несущественными для оценки проделанной работы. Однако, хотелось бы остановиться на двух, на мой взгляд, важных вопросах.

1. При доказательстве теорем о разрешимости уравнения (1) и задачи (2) Автор установил достаточные условия на правые части $f(x)$, при которых задачи имеют решения. В связи с этим возникает вопрос: насколько эти условия близки к необходимым условиям разрешимости?

2. Опираясь на развитую технику конструирования интегральных операторов R_h^+, R_h^-, $R_{j,h}$, и оценки их норм в пространствах $W_{p,\sigma}^{\mathfrak{R}}$, по-видимому, можно было бы исследовать разрешимость общих краевых задач в R_+^n, удовлетворяющих условию Лопатинского.

Указанные вопросы следует воспринимать как пожелания Автору для дальнейшей работы в этом направлении.

Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Автором получен ряд новых результатов, имеющих важное значение в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Следует отметить, что Автором продемонстрирована высокая аналитическая техника при выводе различных интегральных оценок. Результаты диссертации обоснованы полными доказательствами, своевременно опубликованы, неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах. По теме диссертации опубликовано 7 статей, изданных в журналах из списка ВАК, из них 5 статей в изданиях, индексируемых в Scopus. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

46

На основании сказанного считаю, что представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и ее автор Мкртчян (Петросян) Гегине Арамовна несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, математическая физика.

Главный научный сотрудник
Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН),

доктор физико-математических наук, профессор

Демиденко Геннадий Владимирович

Для документов
(ИМ СО РАН)

23 августа 2022 г.

Адрес: 630090, Россия, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, д. 4
Тел.: +7(383)3297578, email: demidenk@math.nsc.ru