ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

Мкртчян (Петросян) Гегине Арамовны

«Регулярные гипоэллиптические уравнения в мультианизотропных пространствах Соболева»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, математическая физика

Диссертационная работа Мкртчян (Петросян) Г.А. посвящена изучению корректности и построению приближенных решений задачи Дирихле в мультианизотропных пространствах для одного класса регулярных гипоэллиптических уравнений.

В историческом развитии теории дифференциальных уравнений выяснилось, что часто исследуемая задача дифференциальных уравнений (задача Коши, задача Дирихле и др.) не имеет классического решения, поэтому в начале прошлого века С.Л. Соболевым были введены понятия обобщённой производной и обобщённой функции (распределения). В работах С.Л. Соболева середины 30-ых годов было дано то определение обобщенных решений, которое стало общепринятым и в идейном плане основополагающим для развития теории уравнений с частными производными. Именно в его работах был заложен фундамент теории обобщённых функций. Широкое распространение теории обобщённых функций и ее интенсивное развитие началось в начале 50-х годов после выхода в свет фундаментальной монографии Л. Шварца, в которой содержалось дальнейшее развитие теории. Развитие теории обобщённых функций и синтез разных идей дали новые возможности и привели к быстрому развитию ее приложений в естествознании и, в частности, в вычислительной математике.

После введения С.Л. Соболевым классических (изотропных) соболевских пространств дифференцируемых (в смысле Соболева или в обобщенном смысле) функций, были введены анизотропные пространства Соболева-Лиувилля, мультианизотропные аналоги этих пространств, весовые соболевские пространства и другие.

В этих пространствах функции и их производные понимались как обобщенные функции, поэтому не имеют конкретного значения в точке и поэтому исследование дифференциальных уравнений численными методами становится невозможным. Для преодоления этого и многих других трудностей возникающих в этой области, в 30-ых годах прошлого века С.Л. Соболевым были доказаны теоремы вложения.

Обычно теоремы вложения доказываются либо на языке приближений, либо с помощью интегральных представлений.

В 20-ом веке не было получено такое интегральное представление дифференциальных функций с помощью обобщенных производных порядка $\{\alpha^j\}$, лежащий на вершинах вполне правильного многогранника. Такое представление было получено Г.А. Карапетяном в 21-ом веке, которое подтолкнуло к исследованию мультианизотропных пространств Соболева и задачи Дирихле в таких пространствах для гипоэллиптических операторов, введенных Л. Хёрмандером в середине 20-века.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении приведены основные обозначения и определения, используемые в работе, а также обзор исследований, посвященных изучению нормальной разрешимости регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных пространствах Соболева.

Первая глава посвящена некоторым свойствам регулярных гипоэллиптических операторов и интегральным представлениям для функций из мультианизотропных пространств Соболева с двумя вершинами анизотропности. Глава состоит из двух параграфов. В *первом параграфе* рассматриваются регулярные гипоэллиптические операторы и исследуются некоторые свойства вполне правильных многогранников. На основе полученных свойств устанавливается верхняя оценка для функциональной размерности пространства решений одного класса гипоэллиптических уравнений. Во *втором параграфе* исследуется специальное интегральное представление для функций из мультианизотропных пространств Соболева на $\mathbb{R}^n_+$ с двумя вершинами анизотропности и доказываются теоремы вложения для функций, принадлежащих вышеуказанным классам.

Вторая глава посвящена построению приближенных решений регулярных гипоэллиптических уравнений

$$P(D)U = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. (1)$$

В *первом параграфе* строятся приближенные решения регулярных гипоэллиптических уравнений (1) в виде

$$U_h := R_h f.$$

в мультианизотропных весовых пространствах Соболева на $\mathbb{R}_+^n$ и исследуются их свойства.

Во *втором параграфе* рассматривается задача Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений

$$\begin{cases} P\left(D_x, D_{x_n}\right)U = f(x, x_n), & x \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0, \\ \left.\dfrac{\partial^j U}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0} = 0, & j = 0,1,\dots,m-1. \end{cases} \quad (2)$$

в мультианизотропных пространствах Соболева на $\mathbb{R}_+^n$ и строятся приближенные решения задачи (2) в виде следующей суммы:

$$U_h(x, x_n) := U_h^+(x, x_n) + U_h^-(x, x_n) + \sum_{j=1}^{m} U_{jh}(x, x_n).$$

В *третьем параграфе* строятся приближенные решения задачи Дирихле (2) для регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных весовых пространствах Соболева на $\mathbb{R}_+^n$.

Третья глава посвящена исследованию нормальной разрешимости регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных пространствах Соболева. В *первом параграфе* доказывается однозначная разрешимость регулярных гипоэллиптических уравнений специального типа в мультианизотропных весовых функциональных пространствах Соболева на $\mathbb{R}_+^n$. Отметим, что существование

50

решений доказывается через построения приближенных решений с помощью мультианизотропных интегральных операторов. В *параграфе два* исследуется разрешимость задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных пространствах Соболева на $\mathbb{R}^n_+$. В *третьем параграфе* изучается корректная разрешимость задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных весовых пространствах Соболева на $\mathbb{R}^n_+$.

В работе использованы методы функционального анализа, дифференциальных уравнений с частными производными, интегральное представление функций и свойство аналитических функций.

Полученные результаты доказаны с математической точностью, могут быть использованы для исследования аналогичных задач для более общих операторов.

Результаты апробированы на международных и республиканских конференциях и семинарах. Основные результаты по теме кандидатской диссертации заложены в 7 статьях, которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК, из которых 5 статей - в издании, индексированном в Scopus, 12 публикаций - в тезисах докладов.

Думаю, что диссертационная работа полностью удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям, а Мкртчян (Петросян) Гегине достойна к присвоении ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности Ա.01.02 „Дифференциальные уравнения, математическая физика„.

Доктор физико-математических наук Л.П. Тепоян

Утверждаю подпись

Ученый секретарь Оганнисян