ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դավիթ Նորիկի Հարությունյան

Շաուֆլերյան տիպի թեորեմներ

Ա.01.06, ”Հանրահաշիվ և թվերի տեսություն” մասնագիտությամբ, ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսություն

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2023

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Davit Harutyunyan

Schauffler like theorems

SYNOPSIS

of the thesis for the degree of candidate of
physical and mathematical sciences in the specialty
A.01.06 – “Algebra and number theory”

Yerevan 2023

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

<u>Գիտական ղեկավար՝</u> ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Յու. Մ. Մովսիսյան

<u>Պաշտոնական ընդիմախոսներ՝</u> ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Է. Մ. Պողոսյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու
Մ. Ա. Յոլչյան

<u>Առաջատար կազմակերպություն՝</u> Հայկական Պետական Մանկավարժական Համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2023թ. հուլիսի 4-ին, ժ. 15:00-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈԿ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտությամբ խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեկ Մանուկյան 1):
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2023թ մայիսի 24-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար՝ Կ. Լ. Ավետիսյան

The topic of the thesis was approved in Yerevan State University

<u>Scientific advisor</u> doctor of phys.-math. sciences
Yu. M. Movsisyan

<u>Official opponents</u> doctor of phys.-math. sciences
E. M. Pogossian
candidate of phys.-math. sciences
M. A. Yolchyan

<u>Leading organization</u> Armenian State Pedagogical University

The defense will be held on July 4, 2023 at 15:00 at a meeting of the specialized council of mathematics 050, operating at the Yerevan State University (0025, 1 Alek Manukyan St, Yerevan).
The thesis can be found at the YSU library.
The synopsis was sent on May 24, 2023.

Scientific secretary
of specialized council K. L. Avetisyan

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Խնդրի արդիականությունը Երկրորդ կարգի տրամաբանական լեզվի և նրա բանաձևերի հետազոտությունը համարվում է ժամանակակից հանրահաշվի, մաթեմատիկական տրամաբանության և հանգունակների տեսության արդիական խնդիրներից [1, 2, 3, 4]:

Ռ. Շաուֆլերը երկրորդ համաշխարհային պատերազմի ժամանակ աշխատելով գերմանիայի կրիպտոգրաֆիկ կենտրոնում ստացել է երկրորդ կարգի զուգորդական նույնությանը բավարարող հակադարձելի հանրահաշիվների կիրառությունները կրիպտոգրաֆիայում (տես [5, 6, 7]), ապացուցելով հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1.1. (Շաուֆլեր) Դիցուք Q-ն ոչ դատարկ բազմություն է: Հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

- կամայական $(Q;X)$, $(Q;Y)$ քվազիխմբերի համար, գոյություն ունեն $(Q;X')$, $(Q;Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ ∀∃(∀)-նույնությունը՝

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z X(Y(x, y), z) = X'(x, Y'(y, z)), \tag{1.1}$$

- կամայական $(Q;X)$, $(Q;Y)$ քվազիխմբերի համար, գոյություն ունեն $(Q;X')$, $(Q;Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ ∀∃(∀)-նույնությունը՝

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z X(x, Y(y, z)) = X'(Y'(x, y), z), \tag{1.2}$$

- $|Q| \leq 3$:

Հետագայում Յու. Մ. Մովսիսյանը [8]-ում ընհանրացրել է Շաուֆլերի թեորեմը:

Թեորեմ 1.2. (Մովսիսյան) Դիցուք Q-ն ոչ դատարկ բազմություն է: Հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

- կամայական $(Q;X)$, $(Q;Y)$ լուպաների համար, գոյություն ունեն $(Q;X')$, $(Q;Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.1) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- կամայական $(Q;X)$, $(Q;Y)$ լուպաների համար, գոյություն ունեն $(Q;X')$, $(Q;Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.2) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- կամայական $(Q;X)$, $(Q;Y)$ լուպաների համար, գոյություն ունեն $(Q;X')$, $(Q;Y')$ լուպաներ այնպիսին, որ տեղի ունի (1.1) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- կամայական $(Q;X)$, $(Q;Y)$ լուպաների համար, գոյություն ունեն $(Q;X')$, $(Q;Y')$ լուպաներ այնպիսին, որ տեղի ունի (1.2) ∀∃(∀)-նույնությունը,

- $(Q; L_Q)$ հանրաշահիվում տեղի ունի հետևյալ գերնույնությունը՝

$$X(x, Y(y, z)) = X(Y(x, y), z),$$

- $(Q; L_Q)$ հանրաշահիվում տեղի ունի հետևյալ գերնույնությունը՝

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), z),$$

- կամայական $(Q; X)$ քվազիխմբի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$\forall X \exists X', Y' \forall x, y, z X(X(x, y), z) = X'(x, Y'(y, z)), \quad (1.3)$$

- կամայական $(Q; X)$ քվազիխմբի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$\forall X \exists X', Y' \forall x, y, z X(x, X(y, z)) = X'(Y'(x, y), z), \quad (1.4)$$

- $|Q| \leq 3$,

որտեղ L_Q-ն Q բազմության վրա որոշված բոլոր լուպաների բազմությունն է:

[9]-ում ապացուցվում է Շաուֆլերյան տիպի թեորեմ բոլոր խմբակերպերի համար:

Թեորեմ 1.3. (Կրապեժ) Դիցուք Q-ն ոչ դատարկ բազմություն է: Կամայական $(Q; X)$, $(Q; Y)$ խմբակերպերի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.2) $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը, այն և միայն այն դեպքում երբ $|Q| = 1$ կամ Q բազմությունն անվերջ է:

Ավելին, [8]-ում ապացուցվում է Շաուֆլերյան տիպի նոր՝ ավելի ընդհանուր, արդյունքներ:

Թեորեմ 1.4. (Մովսիսյան) Դիցուք Q-ն ոչ դատարկ բազմություն է: Հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

- կամայական $(Q; X)$, $(Q; Y)$ քվազիխմբերի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.1) $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը,
- կամայական $(Q; X)$, $(Q; Y)$ քվազիխմբերի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.2) $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը,
- կամայական $(Q; X)$, $(Q; Y)$ լուպաների համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.1) $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը,

- կամայական $(Q; X)$, $(Q; Y)$ լուպաների համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.2) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- կամայական $(Q; X)$ քվազիխմբի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.3) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- կամայական $(Q; X)$ քվազիխմբի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.4) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- $|Q| \leq 3$ կամ Q բազմությունն անվերջ է:

Հետևանք 1.1. Դիցուք Q-ն ոչ դատարկ բազմություն է: Հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

- կամայական $(Q; X)$ լուպաի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.3) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- կամայական $(Q; X)$ լուպաի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.4) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- $|Q| \leq 4$ կամ Q բազմությունն անվերջ է:

Հետևանք 1.2. Դիցուք Q-ն ոչ դատարկ բազմություն է: Հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

- կամայական $(Q; X)$, $(Q; Y)$ խմբակերպերի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.1) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- կամայական $(Q; X)$ խմբակերպի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.3) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- կամայական $(Q; X)$ խմբակերպի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ խմբակերպեր այնպիսին, որ տեղի ունի (1.4) ∀∃(∀)-նույնությունը,
- $|Q| = 1$ կամ Q բազմությունն անվերջ է:

Հետևանք 1.3. Դիցուք $(Q; \cdot)$-ը ոչ զուգորդական լուպա է: Հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

- Q բազմությունն անվերջ է:
- հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարումը ունի լուծում Q բազմությունում՝

$$x \cdot (y \cdot z) = A(B(x, y), z),$$

- հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարումը ունի լուծում Q բազմությունում՝

$$(x \cdot y) \cdot z = A(x, B(y, z)):$$

Հետևանք 1.4. Դիցուք $(Q; \cdot)$-ը և $(Q; \circ)$-ը ոչ իզոտոպ լուպաներ են: Հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

- Q բազմությունն անվերջ է:
- հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարումը ունի լուծում Q բազմությունում՝

$$x \cdot (y \circ z) = A(B(x, y), z),$$

- հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարումը ունի լուծում Q բազմությունում՝

$$(x \cdot y) \circ z = A(x, B(y, z)):$$

Հետևանք 1.5. Դիցուք $(Q; \cdot)$-ը և $(Q; \circ)$-ը ոչ իզոմորֆ լուպաներ են: Հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

- Q բազմությունն անվերջ է:
- հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարումը ունի լուծում Q բազմությունում՝

$$x \cdot (y \circ z) = A(B(x, y), z),$$

- հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարումը ունի լուծում Q բազմությունում՝

$$(x \cdot y) \circ z = A(x, B(y, z)):$$

[10]-ում ապացուցվում են նաև Շաուֆլերյան տիպի թեորեմներ մի շարք $\forall\exists(\forall)$-նույնությունների համար ևս (տես նաև [11, 12, 8, 13]):

Թեորեմ 1.5. Դիցուք Q-ն ոչ դատարկ բազմություն է: Հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

- կամայական $(Q; X)$, $(Q; Y)$ քվազիխմբերի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z X(Y'(x, y), z) = X'(x, Y(y, z)),$$

- կամայական $(Q; X)$, $(Q; Y)$ քվազիխմբերի համար, գոյություն ունեն $(Q; X')$, $(Q; Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z X(x, Y'(y, z)) = X'(Y(x, y), z),$$

- կամայական $(Q;X)$, $(Q;Y)$ քվազիխմբերի համար, գոյություն ունեն $(Q;X')$, $(Q;Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z Y'(x, X(y, z)) = X'(Y(x, y), z),$$

- կամայական $(Q;X)$, $(Q;Y)$ քվազիխմբերի համար, գոյություն ունեն $(Q;X')$, $(Q;Y')$ քվազիխմբեր այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z X(x, Y'(y, z)) = Y(X'(x, y), z),$$

- $|Q| \leq 3$:

[14]-ում ապացուցվում է Շաուֆլերի թեորեմի ընդհանրացումը n-տեղանի հանրահաշիվների համար՝

Թեորեմ 1.6. (Ուշան) Դիցուք $(Q;\Omega)$-ն n-տեղանի բոլոր հակադարձելի գործողությունների հանրահաշիվն է: Կամայական $A_{2i-1}, A_{2i} \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $A_{2j}, A_{2j-1} \in \Sigma, j \in \{1, ..., n\}/\{i\}$ այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ նույնությունները՝

$$A_{2i-1}(x_1, ..., x_{i-1}, A_{2i}(x_i, ..., x_{i+n-1}), x_{i+n}, ..., x_{2n-1}) =$$
$$A_{2j-1}(x_1, ..., x_{j-1}, A_{2j}(x_j, ..., x_{j+n-1}), x_{j+n}, ..., x_{2n-1}),$$

այն և միայն այն դեպքում, երբ $|Q| \leq 3$:

Երկրորդ կարգի բանաձևերի(լեզվի) մասին տես [15, 1, 2, 3]: Ներմուծենք երկու տեսակի հետևյալ երկրորդ կարգի փակ բանաձևերի դասերը՝

$$\forall X_1, \ldots, X_m \forall x_1, \ldots, x_n \quad (\omega_1 = \omega_2),$$

$$\forall X_1, \ldots, X_k \exists X_{k+1} \ldots, X_m \forall x_1, \ldots, x_n \quad (\omega_1 = \omega_2),$$

որտեղ ω_1, ω_2 բառեր են գրված՝ $X_1, \ldots, X_m$, ֆունկցիոնալ փոփոխականների և $x_1, \ldots, x_n$ առարկայական փոփոխականների համար: Այս բանաձևերը համապատասխանաբար կոչվում են $\forall(\forall)$-նույնություն կամ գերնույնություն և $\forall\exists(\forall)$-նույնություն:

Այս եկրրորդ կարգի բանաձևերի տեղի ունենալը(ճշմարտացիությունը) $(Q;\Sigma)$ հանրահաշվում հասկացվում է ըստ ֆունկցիոնալ փոփոխականների քվանտորների՝ $(\forall X_i)$ և $(\exists X_j)$, որոնք կարդացվում են «կամայական $X_i = A \in \Sigma$ համապատասխան տեղայնության գործողության համար» և «գոյություն ունի $X_j = A \in \Sigma$ համապատասխան տեղայնության գործողություն այնպիսին, որ»: Ենթադրվում է, որ տեղի ունի հետևյալ ներդրումը՝

$$\{|X_1|, \ldots, |X_m|\} \subseteq \{|A| \,|\, A \in \Sigma\},$$

որտեղ $|S|$-ը S բազմության տեղայնությունն է:

Ընդհանրապես, գերնույնությունները գրվում են նաև առանց քվանտորների, այսինքն՝ $\omega_1 = \omega_2$: Այսպիսի բանաձևերի մասին ավելի մանրամասն կարելի է ծանոթանալ [11]-ում:

Վ. Դ. Բելոուսովը իր [16] հոդվածում դիտարկում է հակադարձելի գործողությունների (քվազիխմբերի) հանրահաշիվներ որոնք բավարարում են հետևյալ երկրորդ կարգի զուգորդականության $\forall\exists(\forall)$-նույնությանը՝

$$\forall X, Y, \exists X', Y' \forall x, y, z (X(Y(x, y), z) = X'(x, Y'(y, z))),$$

և ցույց է տալիս, որ այսպիսի հանրահաշիվները կարելի է գծայնորեն ներկայացնել որևէ խմբի միջոցով, որտեղ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Հետագայում [10]-ում ապացուցվում է, որ հետևյալ զուգորդականության $\forall\exists(\forall)$-նույնություններին բավարարող $(Q; \Sigma)$ հակադարձելի հանրահաշիվը՝

$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z X(Y'(x, y), z) = X'(x, Y(y, z)),$$
$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z X(x, Y'(y, z)) = X'(Y(x, y), z),$$
$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z Y'(x, X(y, z)) = X'(Y(x, y), z),$$
$$\forall X, Y \exists X', Y' \forall x, y, z X(x, Y'(y, z)) = Y(X'(x, y), z),$$

նույնպես կլինի գծային՝ խմբի նկատմամբ:

Նմանատիպ արդյունքներ ապացուցվում են նաև n-տեղանի հակադարձելի հանրահաշիվների համար [17]-ում:

Թեորեմ 1.7. (Ուշան) Դիցուք $(Q; \Sigma)$-ն n-տեղանի հակադարձելի գործողությունների հանրահաշիվ է: Եթե կամայական $A_{2i-1}, A_{2i} \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $A_{2j}, A_{2j-1} \in \Sigma, j \in \{1, ..., n\}/\{i\}$ այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ նույնությունները՝

$$A_{2i-1}(x_1, ..., x_{i-1}, A_{2i}(x_i, ..., x_{i+n-1}), x_{i+n}, ..., x_{2n-1}) =$$
$$A_{2j-1}(x_1, ..., x_{j-1}, A_{2j}(x_j, ..., x_{j+n-1}), x_{j+n}, ..., x_{2n-1}):$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի որևէ երկտեղանի խումբ, որ այս հանրահաշվի բոլոր գործողությունները կլինեն գծային այդ խմբի վրա:

Դիսերտացիայի նպատակը

Թեզի հիմնական նպատակը քվազիխմբերի և հակադարձելի հանրահաշիվների վերաբերյալ հայտնի Շաուֆլերյան տիպի արդյունքների տարածումն է բաժանումով ռեգուլյար խմբակերպերի և հանրահաշիվների համար:

- Երկրորդ կարգի զուգորդականության նույնությանը բավարարող բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվների և r-հանրահաշիվների գծային ներկայացումը:

- Երկրորդ կարգի մեդիալության, պարամեդիալության նույնություններին բավարարող բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվների և r-հանրահաշիվների գծային ներկայացումը:

- Շաուֆլերյան տիպի թեորեմների ապացուցումը բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվներում:

- Երկրորդ կարգի Զուգորդականության ընդհանրացված նույնությանը բավարարող բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի հանրահաշիվների գծային ներկայացումը:

- Պարամեդիալության գերնույնությանը բավարարող բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի հանրահաշիվների գծային ներկայացումը:

- Շաուֆլերյան տիպի թեորեմի ապացուցումը բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի հանրահաշիվներում:

Հետազոտության մեթոդաբանությունը

Թեզում մենք օգտագործում ենք ունիվերսալ հանրահաշվի, քվազիխմբերի տեսության, բաժանումով ռեգուլյար խմբակերպերի արդյունքներ, ինչպես նաև պարամեդիալության, մեդիալության և ընդհանուր զուգորդականության նույնություններին վերաբերվող արդյունքներ:

Հետազոտության առարկան

Բաժանումով ռեգուլյար խմբակերպեր և քվազիխմբեր; ընդհանուր զուգորդականության, մեդիալության, պարամեդիալության նույնություններին բավարարող հանրահաշիվներ; n-տեղանի պարամեդիալ հանրահաշիվներ; ֆունկցիոնալ փոփոխականներով երեք տեղանի և n-տեղանի զուգորդական նույնություններին բավարարող երեք տեղանի և n-տեղանի հանրիաշիվներ; n-տեղանի Շաուֆլերյան տիպի թեորեմով բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվներ:

Գիտական նորարությունը

Թեզում ստացված հիմնական արդյունքները հետևյալներն են.

1. Բաժանումով ռեգուլյար երկտեղանի հանրահաշիվների և և r-հանրահաշիվների նկարագրումը զուգորդականության, մեդիալության և պարամեդիալության երկրորդ կարգի նույնություններով, որոնք ստացվում են էնդո-գծային որևէ խմբի նկատմամբ:

2. Շաուֆլերյան տիպի թեորեմների ձևակերպումը և ապացուցումը բաժանումով ռեգուլյար երկտեղանի հանրահաշիվներում:

3. Բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի հանրահաշիվների նկարագրումը զուգորդականության երկրորդ կարգի նույնություններով, որոնք կլինեն էնդո-գծայիին որևէ խմբի նկատմամբ:

4. Շաուֆլերյան տիպի թեորեմների ձևակերպումը և ապացուցումը բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի հանրահաշիվներում:

5. Բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի հանրահաշիվների նկարագրումը պարամեդիալության գերնույնությունով, որոնք ստացվում են էնդո-գծային աբելյան խմբի նկատմամբ:

Բոլոր հիմնական արդյունքները նոր են:

Տեսական և գործնական արժեքները

Հակադարձելի և բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվների տեսությունը հանրահաշվի զարգացող ուղղություններից մեկն է: Հայտնի է, որ այդպիսի հանրահաշվի տարրերից՝ քվազիխմբերը, ունեն լայն կիրառություն տեսական ֆիզիկայում, կոմբինատորիկայում(տես [18, 19, 20]), կրիպտոգրաֆիայում, դիսկրետ մաթեմատիկայում և համակարգչային գիտության ճյուղերում:

Ֆունկցիոնալ փոփոխականներով զուգորդական նույնություններին վերաբերող աշխատություններ կան ինչպես մաթեմատիկայի բնագավառում, այնպես էլ դրա կիրառություններում՝ մասնավորապես սոցիոլոգիական գիտություններում(տես [21, 22, 23]):

Թեզի կառուցվածքը Թեզը կազմված է երեք գլխից, եզրակացությունից և գրականությունից: Տպագրված հոդվածների քանակը երեքն է: Գրականության քանակը՝ 37: Թեզի ծավալն է 99 էջ:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գլուխ 2: Բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվներ

Այս գլխում մենք դիտարկում ենք երկրորդ կարգի ընդհանուր նույնություններին բավարարող բաժանումով և ռեգուլյար հանրահաշիվները, որոնք ստացվում են էնդո-գծային խմբի նկատմամբ:

Այնուհետև ձևակերպվում են Շաուֆլերյան տիպի թեորեմներ զուգորդականության, մեդիալության և պարամեդիալության $\forall\exists(\forall)$-նույնություններին բավարարող բաժանումով ռոգուլյար հանրահաշիվների համար:

Ձևակերպենք այս գլխի հիմնական արդյունքները:

Դիցուք Q բազմության վրա տրված է A երկտեղանի գործողություն, $(Q; A)$-ին կանվանենք (երկտեղանի) խմբակերպ:

Դիցուք $(Q; \cdot)$-ը խմբակերպ է, իսկ $a \in Q$: Նշանակենք $L_a(R_a)$-ով Q-ից Q հետևյալ արտապատկերումը՝ $L_a(x) = ax(R_a(x) = xa)$, և անվանենք a տարրով ծնված ձախ(աջ) արտապատկերումներ:

Սահմանում 2.1. Կասենք $(Q; \cdot)$-ը բաժանումով(կրճատումով) խմբակերպ է, եթե ցանկացած $a \in Q$ համար L_a-ն և R_a-ն սյուրյեկտիվ(ինյեկտիվ) արտապատկերումներ են:

Սահմանում 2.2. $(Q;\Sigma)$ երկտեղանի հանրահաշիվը կանվանենք բաժանումով (կրճատումով) հանրահաշիվ, եթե $(Q;A)$-ն բաժանումով(կրճատումով) խմբակերպ է ցանկացած $A\in\Sigma$ գործողության համար: Բաժանումով և կրճատումով հանրահաշիվը կոչվում է հակադարձելի հանրահաշիվ:

Սահմանում 2.3. Կասենք $(Q;\cdot)$-ը ձախ ռեգուլյար խմբակերպ է, եթե

$$c\cdot a=c\cdot b\Rightarrow R_a=R_b$$

որտեղ $a,b,c\in Q$:

Նույն կերպ սահմանվում է աջ ռեգուլյար խմբակերպը: Կասենք խմբակերպը ռեգուլյար է, եթե այն և՛ ձախ է, և՛ աջ ռեգուլյար է:

Սահմանում 2.4. $(Q;\Sigma)$ երկտեղանի հանրահաշիվը կոչվում է ռեգուլյար հանրահաշիվ, եթե $(Q;A)$-ն ռեգուլյար խմբակերպ է ցանկացած $A\in\Sigma$ գործողության համար:

Սահմանում 2.5. $(Q;\Sigma)$ բաժանումով ռեգուլյար երկտեղանի հանրահաշիվը կանվանենք r-հանրահաշիվ, եթե գոյություն ունի $A\in\Sigma$ հակադարձելի գործողություն:

Մեկ հակադարձելի գործողությամբ հանրահաշիվները ներմուծվել և ուսումնասիրվել են [11, 12] մենագրություններում q-հանրահաշիվներ անվան տակ:

Թեորեմ 2.3. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվ է, և $\forall A,C\in\Sigma,\quad\exists B,D\in\Sigma$, որ տեղի ունի հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(x,B(y,z))=C(D(x,y),z):$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $(Q;\cdot)$ խումբ, որ $(Q;\Sigma)$-ն կլինի էնդո-գծային այդ խմբի վրա: Ընդ որում $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.4. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-հանրհաշիվ է: Եթե կամայական $A,B\in\Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $C,D\in\Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(x,B(y,z))=C(D(x,y),z):$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ խումբ այնպիսին, որ կամայական $A\in\Sigma$ գործողություն կլնի էնդո-գծային այդ խմբի վրա: Ընդ որում $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.5. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-հանրհաշիվ է: Եթե կամայական $C,D\in\Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $A,B\in\Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(x,B(y,z))=C(D(x,y),z):$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ խումբ այնպիսին, որ կամայական $A \in \Sigma$ գործողություն կլնի էնդո-գծային այդ խմբի վրա, ավելին $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.6. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-հանրհաշիվ է: Եթե կամայական $A, D \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $C, B \in \Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(x, B(y,z)) = C(D(x,y),z):$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ խումբ այնպիսին, որ կամայական $A \in \Sigma$ գործողություն կլնի էնդո-գծային այդ խմբի վրա, ավելին $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.7. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-հանրհաշիվ է: Եթե կամայական $C, B \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $A, D \in \Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(x, B(y,z)) = C(D(x,y),z):$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ խումբ այնպիսին, որ կամայական $A \in \Sigma$ գործողություն կլնի էնդո-գծային այդ խմբի վրա: Ընդ որում $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.11. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-Հանրահաշիվ է: Եթե կամայական $A, B \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $C, D \in \Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(B(x,y), B(u,v)) = C(D(x,u), D(y,v)),$$

ապա գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ աբելյան խումբ այնպիսին որ Σ հանրահաշիվի կամայական գործողություն կլինի էնդո-գծային այդ խմբի նկատմամբ, ավելին $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.12. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-Հանրահաշիվ է: Եթե կամայական $C, D \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $A, B \in \Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(B(x,y), B(u,v)) = C(D(x,u), D(y,v)),$$

ապա գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ աբելյան խումբ այնպիսին որ Σ հանրահաշիվի կամայական գործողություն կլինի էնդո-գծային այդ խմբի նկատմամբ, ավելին $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.13. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-Հանրահաշիվ է: Եթե կամայական $A, B \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $C, D \in \Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(B(x,y), B(u,v)) = C(D(v,y), D(u,x)),$$

ապա գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ աբելյան խումբ այնպիսին, որ Σ հանրահաշիվի կամայական գործողություն կլինի էնդո-գծային այդ խմբի նկատմամբ: Ընդ որում $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.14. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-Հանրահաշիվ է: Եթե կամայական $C, D \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $A, B \in \Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(B(x,y), B(u,v)) = C(D(v,y), D(u,x)),$$

ապա գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ աբելյան խումբ այնպիսին, որ Σ հանրահաշիվի կամայական գործողություն կլինի էնդո-գծային այդ խմբի նկատմամբ: Ընդ որում ավելին $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.15. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-Հանրահաշիվ է: Եթե կամայական $A, C \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $B, D \in \Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(B(x,y), B(u,v)) = C(D(x,u), D(y,v)),$$

ապա գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ աբելյան խումբ այնպիսին որ Σ հանրահաշիվի կամայական գործողություն կլինի էնդո-գծային այդ խմբի նկատմամբ, ավելին $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.16. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն r-Հանրահաշիվ է: Եթե կամայական $A, C \in \Sigma$ գործողությունների համար գոյություն ունեն $B, D \in \Sigma$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենա հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնությունը՝

$$A(B(x,y), B(u,v)) = C(D(v,y), D(u,x)),$$

ապա գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ աբելյան խումբ այնպիսին որ Σ հանրահաշիվի կամայական գործողություն կլինի էնդո-գծային այդ խմբի նկատմամբ, ավելին $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 2.21. $(Q;R_Q)$ հանրահաշվում տեղի ունի հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնություններից որևէ մեկը՝

1. $\forall A, C \exists B, D \forall x, y, z A(x, B(y,z)) = C(D(x,y), z)$,

2. $\forall A, D \exists B, C \forall x, y, z A(x, B(y, z)) = C(D(x, y), z)$,

3. $\forall B, C \exists A, D \forall x, y, z A(x, B(y, z)) = C(D(x, y), z)$,

4. $\forall A, B \exists C, D \forall x, y, z A(x, B(y, z)) = C(D(x, y), z)$,

5. $\forall C, D \exists A, B \forall x, y, z A(x, B(y, z)) = C(D(x, y), z)$,

այն և միայն այն դեպքում, երբ $|Q| \leq 3$:

Թեորեմ 2.22. $(Q; G_Q)$ հանրահաշվում ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝

1. $\forall A, C \in G_Q \ \exists B, D \in G_Q$ այնպիսին որ տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$A(x, B(y, z)) = C(D(x, y), z),$$

   այն և միայն այն դեպում, երբ $|Q| = 1$,

2. $\forall A, D \in G_Q \ \exists B, C \in G_Q$ այնպիսին որ տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$A(x, B(y, z)) = C(D(x, y), z),$$

   այն և միայն այն դեպում, երբ $|Q| = 1$,

3. $\forall B, C \in G_Q \ \exists A, D \in G_Q$ այնպիսին որ տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$A(x, B(y, z)) = C(D(x, y), z),$$

   այն և միայն այն դեպում, երբ $|Q| = 1$,

4. կամայական Q բազմության համար, $\forall B, D \in G_Q \ \exists A, C \in G_Q$ այնպիսին որ տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$A(x, B(y, z)) = C(D(x, y), z):$$

   :

Թեորեմ 2.23. $(Q; R_Q)$ հանրահաշվում տեղի ունի հետևյալ $\forall\exists(\forall)$-նույնություններից որևէ մեկը՝

1. $\forall A, B \exists C, D \forall x, y, z A(B(x, y), B(u, v)) = C(D(x, u), D(y, v))$,

2. $\forall C, D \exists A, B \forall x, y, z A(B(x, y), B(u, v)) = C(D(x, u), D(y, v))$,

3. $\forall A, C \exists B, D \forall x, y, z A(B(x, y), B(u, v)) = C(D(x, u), D(y, v))$,

4. $\forall A, B \exists C, D \forall x, y, z A(B(x, y), B(u, v)) = C(D(v, y), D(u, x))$

5. $\forall C, D \exists A, B \forall x, y, z A(B(x,y), B(u,v)) = C(D(v,y), D(u,x))$,

6. $\forall A, C \exists B, D \forall x, y, z A(B(x,y), B(u,v)) = C(D(v,y), D(u,x))$,

այն և միայն այն դեպքում, երբ $|Q| \leq 3$:

Գլուխ 3: n-տեղանի բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվներ

Այս գլխում մենք դիտարկում ենք երկրորդ կարգի ընդհանուր նույնություններին բավարարող n-տեղանի հանրահաշիվներ:

Ձևակերպվում են պարամեդիալության գերնույնությանը բավարարող բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվների պայմանները, որոնց դեպքում հանրահաշիվը ստացվում է էնդո-գծային որևէ խմբի նկատմամբ:

Ձևակերպվում են երկրորդ կարգի ընդհանուր զուգորդականության նույնությանը բավարարող երեք տեղանի ինչպես նաև n-տեղանի բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվների պայմաններ, որոնց դեպքում հանրահաշիվը ստացվում է էնդո-գծային որևէ խմբի նկատմամբ:

Ինչպես նաև ձեակերվում է Շաուֆլերյան տիպի թեորեմ n-տեղանի բաժանումով ռեգուլյար հանրահաշիվների համար:

Այս գլխի հիմնական արդյունքները հետևյալն են՝

$(Q; f)$ n տեղանի խմբակերպը կանվանենք պարամեդիալ, եթե այն բավարարում է պարամեդիալության նույնությանը՝

$$f(f(x_{11},...,x_{n1}),...,f(x_{1n},...,x_{nn})) = f(f(x_{nn},...,x_{n1}),...,f(x_{1n},...,x_{11})).$$

$(Q; \Sigma)$ հանրահաշիվը կանվանենք պարամեդիալ, եթե այն բավարարում է պարամեդիալության գերնույնությանը՝

$$X(Y(x_{11},...,x_{n1}),...,Y(x_{1m},...,x_{nm})) = Y(X(x_{nm},...,x_{n1}),...,X(x_{1m},...,x_{11})).$$

Պարամեդիալ n-տեղանի խմբակերպերի որոշ տեսակներ ուսումնասիրվում են [24] հոդվածում, իսկ երկտեղանի պարամեդիալ հանրահաշիվների վերաբերյալ որոշ արդյունքներ ձևակերպված են [25] հոդվածում:

Ոչ դատարկ Q բազմությունը և նրա վրա որոշված n տեղանի A գործողության զույգը կանվանենք n-խմբակերպ:

$x_n, x_{n+1}, ..., x_m$ հաջորդականությունը կնշանակենք x_n^m-ով, որտեղ n, m-ը բնական թվեր են և $n \leq m$:. Եթե $n = m$, ապա x_n^m-ը կլինի հենց x_n տարրը: $x_m, x_{m-1}, ..., x_n$ հաջորդականությունը կնշանակենք ${}_n^m x$-ով, որտեղ n, m-ը բնական թվեր են և $n \leq m$: Եթե $n = m$, ապա ${}_n^m x$-ը կլինի հենց x_n տարրը: $a, a, ..., a(m$ հատ) հաջորդականությունը կնշանակենք a_m-ով:

Դիցուք $(Q; A)$-ն n-խմբակերպ է. Նշանակենք $L_i\left(a_1^n\right)$-ով Q-ից դեպի Q հետևյալ արտապատկերումը՝

$$L_i\left(a_1^n\right)x = A\left(a_1^{i-1} x a_{i+1}^n\right),$$

կամայական $x \in Q$: $L_i(a_1^n)$ արտապատկերումը կանվանենք a_1^n տարրով i-արտապատկերում:

Սահմանում 3.7. Դիցուք $(Q;A)$-ն n-խմբակերպ է: Կասենք $(Q;A)$-ն բաժանումով n-խմբակերպ է, եթե $L_i(a_1^n)$ i-արտապատկերումը սյուրյեկտիվ արտապատկերում է կամայական $a_1^n \in Q$ և կամայական $i = 1, ..., n$.

Նշանակենք $L_i^A\left(a_1^{|A|}\right)$-ով $(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվի $A \in \Sigma$ խմբակերպի i-արտապատկերում $a_1^{|A|} \in Q^{|A|}$ տարրով, որտեղ $|A|$-ն A գործողության տեղայնությունն է:

Սահմանում 3.8. $(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը կանվանենք բաժանումով, եթե $L_i^A\left(a_1^{|A|}\right)$ i-արտապատկերումը սյուրյեկտիվ արտապատկերում է կամայական $a_1^{|A|} \in Q^{|A|}$, կամայական $A \in \Sigma$ և կամայական $i = 1, ..., n$:

n-խմբակերպը կոչվում է i-ռեգուլյար, եթե՝

$$L_i(a_1^n)c = L_i(b_1^n)c \implies L_i(a_1^n) = L_i(b_1^n),$$

կամայական $a_1^n, b_1^n, c \in Q$:

n-խմբակերպը կոչվում է ռեգուլյար, եթե այն i-ռեգուլյար է կամայական $i = 1, ..., n$ համար:

$(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է i-ռեգուլյար, եթե՝ $L_i^A\left(a_1^{|A|}\right)c = L_i^A\left(b_1^{|A|}\right)c$ հետևում է, որ $L_i^A\left(a_1^{|A|}\right) = L_i^A\left(b_1^{|A|}\right)$: Եթե $(Q;\Sigma)$ հանրահաշիվը i-ռեգուլյար է կամայական $i = 1, ..., |A|$ համար, ապա այն կանվանենք ռեգուլյար:

Սահմանում 3.9. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի խմբակերպերի հանրահաշիվ է, իսկ $(Q;\Omega)$-ն բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի բոլոր խմբակերպերի հանրահաշիվն է: $A, B \in \Sigma$ գործողություններին կանվանենք i թույլ զուգորդական, եթե գոյություն ունեն $A_{2j}, A_{2j-1} \in \Omega, j \in \{1, ..., n\}\backslash\{i\}$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենան հետևյալ նույնությունները՝

$$A(x_1, ..., x_{i-1}, B(x_i, ..., x_{i+n-1}), x_{i+n}, ..., x_{2n-1}) =$$
$$A_{2j-1}(x_1, ..., x_{j-1}, A_{2j}(x_j, ..., x_{j+n-1}), x_{j+n}, ..., x_{2n-1}),$$

կամայական $j \in \{1, ..., n\}\backslash\{i\}$:

Սահմանում 3.10. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի խմբակերպերի հանրահաշիվ է: Կասենք $(Q;\Sigma)$-ն $\overline{iA}$-հանրահաշիվ է, եթե կամայական $A, B \in \Sigma$ գործողությունները լինեն i թույլ զուգորդական:

Սահմանում 3.11. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի խմբակերպերի հանրահաշիվ է: $A, B \in \Sigma$ գործողություններին կանվանենք i զուգորդական, եթե գոյություն ունեն $A_{2j}, A_{2j-1} \in \Omega, j \in \{1, ..., n\} \backslash \{i\}$ գործողություններ այնպիսին, որ տեղի ունենան հետևյալ նույնությունները՝

$$A(x_1, ..., x_{i-1}, B(x_i, ..., x_{i+n-1}), x_{i+n}, ..., x_{2n-1}) =$$
$$A_{2j-1}(x_1, ..., x_{j-1}, A_{2j}(x_j, ..., x_{j+n-1}), x_{j+n}, ..., x_{2n-1}),$$

կամայական $j \in \{1, ..., n\} \backslash \{i\}$:

Սահմանում 3.12. Դիցուք $(Q; \Sigma)$-ն բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի խմբակերպերի հանրահաշիվ է: Կասենք $(Q; \Sigma)$-ն iA-հանրահաշիվ է, եթե կամայական $A, B \in \Sigma$ գործողությունները լինեն i զուգորդական:

Թեորեմ 3.2. Դիցուք $(Q; A_1, ..., A_6)$ բաժանումով ռեգուլյար երեք տեղանի հանրահաշիվ է որը բավարարում է զուգորդականության հետևյալ նույնությանը՝

$$A_1(A_2(x, y, z), u, v) = A_3(x, A_4(y, z, u), v) = A_5(x, y, A_6(z, u, v)): \tag{1.5}$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի $(Q; \cdot)$ երկտեղանի խումբ այնպիսին, որ կամայական A_i գործողություն կլինի էպիտոպ այդ խմբին, ավելին՝

$$A_1(x, y, z) = R_1 x \cdot S_3 L_4 y \cdot L_5 L_6 z,$$
$$R_1 A_2(x, y, z) = R_1 R_2 x \cdot S_3 R_4 y \cdot L_5 R_6 z,$$
$$A_3(x, y, z) = R_1 R_2 x \cdot S_3 y \cdot L_5 L_6 z,$$
$$S_3 A_4(x, y, z) = R_1 S_2 x \cdot L_5 R_6 y \cdot L_5 S_6 z,$$
$$A_5(x, y, z) = R_1 R_2 x \cdot S_3 R_4 y \cdot L_5 z,$$
$$L_5 A_6(x, y, z) = R_1 L_2 x \cdot S_3 L_4 y \cdot L_5 L_6 z,$$

որտեղ L_i, S_i, R_i արտապատկերումները համապատասխանաբար A_i գործողության ձախ, կենտրոնական և աջ արտապատկերումներն են:

Թեորեմ 3.3. Դիցուք $(Q; A_i)$, $i = 1, ..., 2n$ բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի խմբակերպեր են որոնք բավարարում են հետևյալ նույնություններին՝

$$A_1(A_2(x_1, ..., x_n), x_{n+1}, ..., x_{2n-1}) = A_{2j-1}(x_1, ..., x_{j-1}, A_{2j}(x_j, ..., x_{j+n-1}), x_{j+n}, ..., x_{2n-1}), \tag{1.6}$$

կամայական $j = 2, ..., n$. Այդ դեպքում գոյություն ունի $(Q; A)$ n-տեղանի միավորով խումբ այնպիսին, որ կամայական A_i գործողություն կլինի էպիտոպ այդ խմբին, ավելին՝

$$A_{2j-1} = A(\{\alpha_i^j x_i\}_{i=1}^n),$$
$$A_{2j} = \alpha_j^j A(\{\beta_i^j x_i\}_{i=1}^n),$$

կամայական $j = 1, ..., n$:

Թեորեմ 3.4. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի $\overline{iA}$-համակարգային հանարիաշիվ է և գոյություն ունի $A \in \Sigma$ հակադարձելի n-տեղանի գործողություն: Այդ դեպքում գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ երկտեղանի խումբ այնպիսին, որ կամայական $A \in \Sigma$ գործողություն կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ այդ խմբի նկատմամբ՝

$$A(x_1,...,x_n) = \alpha_1 x_1 \cdot ... \cdot \alpha_{i-1}x_{i-1} \cdot \phi_i x_i \cdot \alpha_{i+1}x_{i+1} \cdot ... \cdot \alpha_n x_n \cdot,$$

որտեղ ϕ_i-ն $(Q;\cdot)$ խմբի սյուրյեկտիվ էնդոմորֆիզմ է, իսկ α_j որտեղ $j \in \{1,...,n\}\backslash\{i\}$ արտապատկերումները սյուրյեկտիվ են: Ըստ որում $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 3.5. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի (iA)-համակարգային հանարիաշիվ է և գոյություն ունի $A \in \Sigma$ հակադարձելի n-տեղանի գործողություն: Այդ դեպքում գոյություն ունի $(Q;\cdot)$ երկտեղանի խումբ այնպիսին, որ կամայական $A \in \Sigma$ գործողություն կլինի էնդո-գծային այդ խմբի նկատմամբ, այսինքն՝

$$A\left(x_1^n\right) = \phi_1^A x_1 \cdot ... \cdot \phi_n^A x_n \cdot b_A,$$

որտեղ ϕ_i^A արտապատկերումները $(Q;\cdot)$ խմբի սյուրյեկտիվ էնդոմորֆիզմներ են, իսկ $b_A \in Q$ որևէ տարր է: Ըստ որում $(Q;\cdot)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Թեորեմ 3.6. Դիցուք $(Q;\Omega)$-ն բոլոր բաժանումով ռեգուլյար n-տեղանի խմբակերպերի հանարիաշիվ է: $(Q;\Omega)$ կլինի (iA)-համակարգային հանրահաշիվ այն և միայն այն դեպքում, երբ $|Q| \leq 3$:

Թեորեմ 3.11. Դիցուք $(Q;\Sigma)$-ն բաժանումով ռեգուլյար պարամեդիալ հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում գոյություն ունի $(Q;+)$ աբելյան խումբ այնպիսին, որ կամայական $A \in \Sigma$ գործողություն կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$A\left(x_1^{|A|}\right) = \phi_1^A x_1 + \cdots + \phi_{|A|}^A x_{|A|} + b_A,$$

որտեղ ϕ_i^A արտապատկերումները $(Q;+)$ խմբի սյուրյեկտիվ էնդոմորֆիզմներ են այնպիսին, որ $\phi_i^A\phi_j^A = \phi_{n+1-j}^A\phi_{n+1-i}^A$ կամայական $i,j = 1,...,n$ և $b_A \in Q$: Ըստ որում $(Q;+)$ խումբը որոշվում է միարժեքորեն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

Հեղինակի տպագրած հոդվածները

1. Harutyunyan, D.N. On Some Associative Formula with Functional Variables. J. Contemp. Mathemat. Anal. 56, 1–4 (2021). https://doi.org/10.3103/S1068362321010040

2. Harutyunyan, D. N. On Regular Paramedial Division Algebras. Proceedings of the YSU A: Physical and Mathematical Sciences, 56(3 (259), 107–115 (2022). https://doi.org/10.46991/PYSU:A/2022.56.3.107

3. Movsisyan, Y.M., Harutyunyan, D.N. Schauffler-Type Theorems. J. Contemp. Mathemat. Anal. 58, 116–124 (2023). https://doi.org/10.3103/S1068362323020073

4. Harutyunyan, D. N. LINEARITY OF n-ARY ASSOCIATIVE ALGEBRAS. Proceedings of the YSU A: Physical and Mathematical Sciences, 57(1 (260), 9–22 (2023). https://doi.org/10.46991/PYSU:A/2023.57.1.009

Գրականություն

[1] А. И. Мальцев. Некоторые вопросы теории классов моделей. *Тр. IV Всесоюзного математического съезда*, 1:169–198, 1963.

[2] А. Чёрч. *Введение в математическую логику. Т. 1.* ИЛ, 1961.

[3] Г. Кейслер, Ч. Чэн. *Теория моделей.* Мир, 1977.

[4] Alfred Tarski. Contributions to the theory of models. II. *Indag. Math. (Proc.)*, 57:582–588, 1954.

[5] R. Schauffler. Eine anwendung zyklischer permutationen and ihretheorie. *Ph.D. Thesis*, 1948.

[6] R. Schauffler. Über die bildung von codewörtern. *Arch. elekt. Übertragung*, 10:303–314, 1956.

[7] R. Schauffler. Die associativität im ganzen. *besonders bei Quasigruppen.*, 67:428–435, 1957.

[8] Yu. Movsisyan. On a theorem of Schauffler. *Math. Notes*, 53(2):172–179, February 1993.

[9] A. Krapež. Generalized associativity on grupoids. *Publications de l'Institut Mathématique*, 28(42)(48):105–112, 1980.

[10] Yu. Movsisyan. *Hyperidentities: Boolean And De Morgan Structures.* World Scientific Publishing, Singapore, Singapore, October 2022.

[11] Yu. Movsisyan. *Introduction to the theory of algebras with hyperidentities(in Russian).* Yerevan State University Press, 1986.

[12] Yu. Movsisyan. *Hyperidentities and hypervarieties in algebras(in Russian).* Yerevan State University Press, 1990.

[13] Yu. Movsisyan. Hyperidentities in algebras and varieties. *Russ. Math. Surv.*, 53(1):57–108, February 1998.

[14] Я. Ушан, М. Жижович. n-арний аналогон теоремы Шауфлера. *Publ. Inst. Math*, 19(33):167–172, 1975.

[15] А. И. Мальцев. *Алгебраические системы.* Наука, 1970.

[16] V. D. Belousov. Globally associative systems of quasigroups. *Mat. Sb. (N.S.)*, 55(97)(2):221–236, 1961.

[17] Я. Ушан. Ассоциативныв в целом системы п-арных квазигрупп (Постровния ia-систем. Одно обобщение теоремы Хоссу-Глускина). *Publ. Inst. Math*, 19(33):155–165, 1975.

[18] A. D. Keedwell, J. Denes. *Latin Squares and their Applications.* North-Holland, Oxford, England, 2 edition, July 2015.

[19] V. Shcherbacov. Quasigroups in cryptology. *Computer Science Journal of Moldova*, 50(2):193–228, 2009.

[20] M. H. Damm. Total anti-symmetrische quasigruppen. 2004.

[21] J. Aczél. *On mean values. Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:392–400, 1948.

[22] J. Aczél. *Remarques algebriques sur la solution donner par M.Frechet a l'equation de Kolmogoroff. Pupl. Math. Debrecen*, 4:33–42, 1955.

[23] J. Aczél. *A Short Course on Functional Equations Based Upon Recent Applications to the Social and Behavioral Sciences. Theory and decision library, Series B: Mathematical and statistical methods, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo*, 1987. ISBN 978-90-277-2377-2.

[24] A. Ehsani, Yu. Movsisyan. A representation of paramedial n-ary groupoids. *Asian-Eur. J. Math.*, 07(01):1450020, March 2014.

[25] S. Davidov. On paramedial division groupoids. *Asian-Eur. J. Math.*, 09(01):1650008, March 2016.

Заключение

Диссертация посвящена регулярным бинарным алгебрам с делением и регулярным n-арным алгебрам с делением, удовлетворяющим тождествам второго порядка ассоциативности, медиальности и парамедиальности. Отметим, что исследование логического языка второго порядка и его формул является актуальной задачей современной алгебры, математической логики и теории моделей.

Глава 2 посвящена регулярным бинарным алгебрам с делением и r-алгебрам, удовлетворяющим тождествам второго порядка ассоциативности, медиальности и парамедиальности.

- Получена эндолинейность над бинарной группой регулярных бинарных алгебр с делением и r-алгебр, удовлетворяющих тождествам второго порядка ассоциативности, медиальности и парамедиальности.

- Доказаны теоремы типа Шауфлера для регулярных бинарных алгебр с делением, которые удовлетворяют тождествам второго порядка ассоциативности, медиальности и парамедиальности.

Глава 3 посвящена регулярным n-арным алгебрам с делением, удовлетворяющим тождествам ассоциативности второго порядка, и регулярным n-арным алгебрам с делением, удовлетворяющим сверхтождеству парамедиальности.

- Получена эндолинейность над бинарной группой регулярных n-арных алгебр с делением, удовлетворяющих тождествам ассоциативности второго порядка.

- Доказана теорема типа Шауфлера для регулярных n-арных алгебр с делением, которые удовлетворяют тождествам второго порядка ассоциативности.

- Получена эндолинейность над бинарной группой регулярных n-арных алгебр с делением, удовлетворяющих сверхтождеству парамедиальности.

Annotation

The dissertation is devoted to regular division binary algebras and regular division n-ary algebras which are satisfying the second-order identities of associativity, mediality, and paramediality. The study of the second-order language and its formulas is considered one of the topical problems of modern algebra, mathematical logic and model theory.

The Chapter 2 is devoted to regular division binary algebras and r-algebras which are satisfying the second-order identities of associativity, mediality, and paramediality.

- Obtained the endo-linearity over a binary group of regular division binary algebras and r-algebras which are satisfying to the second-order identites of associativity, meidality, and paramediality.

- Proved Schauffler like theorems for regular division binary algebras which are satisfying the second-order identites of associativity, meidality, and paramediality.

The Chapter 3 is devoted to regular division n-ary algebras which are satisfying the second-order identities of associativity, and regular division n-ary algebras which are satisfying the hyperidentity of paramediality.

- Obtained the endo-linearity over a binary group for regular division n-ary algebras satisfying the second-order identities of associativity.

- Proved Schauffler like theorem for regular division n-ary algebras which are satisfying the second-order identites of associativity.

- Obtained the endo-linearity over a binary group for regular division n-ary algebras satisfying the hyperidentity of paramediality.