ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Անի Լևոնի Խաչատրյան

Միակության և վերականգման հարցեր օրթոգոնալ սպլայն համակարգերի համար:

Ա.01.01 – «Մաթեմատիկական անալիզ» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման համար

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2023

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Ani Levon Khachatryan

Uniqueness and reconstruction for orthogonal spline systems.

SYNOPSIS

of the thesis for the degree of candidate of
physical and mathematical sciences in the speciality
01.01.01- “Mathematical analysis”

YEREVAN - 2023

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Կ.Ա. Քեռյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Մ. Փասսենբրուններ
	Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Կ.Ա. Նավասարդյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի Ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կկայանա 2023թ. սեպտեմբերի 5-ին, ժ. 15:00-ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈԿ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2023թ. հուլիսի 12-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Կ.L. Ավետիսյան

The topic of the thesis was approved at Yerevan State University

Scientific supervisor:	Dr. of Phys. Math. Sciences K.A. Keryan
Official referees:	Dr. Habil. M. Passenbrunner
	Dr. of Phys. Math. Sciences K.A. Navasardyan
Leading organization:	Institute of Mathematics of NAS RA.

The dissertation defence will take place on September 5th, 2023 at 15:00 during the meeting of 050 specialized council of Supreme Certifying Committee at Yerevan State University at the following address: 1 Alex Manoogian, Yerevan 0025.

The thesis is available at the library of Yerevan State University.

The synopsis was sent on July 12th, 2023.

Scientific secretary of specialized council
Dr. of Phys. Math. Sciences K.L. Avetisyan

Overview

Relevance of the topic.

The trigonometric system is the first example of orthogonal systems of functions. It has played an important role in various branches of mathematics (harmonic analysis, number theory, mathematical physics, etc.). It is well known that the Fourier series of a continuous function can be divergent (see e.g. [3]). In 1910 A. Haar [24] constructed an orthonormal system such that the Fourier series of any continuous function f with respect to that system uniformly converges to f. Nevertheless the Haar system does not form a basis for $C[0,1]$, since its functions are discontinuous. The first example of an orthonormal basis for $C[0,1]$ was constructed by Ph. Franklin in 1928 ([12]). The Franklin system is a complete orthonormal system of continuous, piecewise linear functions (with dyadic knots).

The systematic investigations of the Franklin system were started by Z. Ciesielski with his remarkable papers [8] and [9]. Since then, the Franklin system has been studied by many authors from different points of view. The basic properties of this system, including exponential estimates for the Franklin functions and L^p-stability on dyadic blocks, have been obtained by Z. Ciesielski in [8] and [9]. These properties turned out to be an important tool in further investigations of the Franklin system. It is known that this system is a basis in $C[0,1]$ and L^p for $1 \le p < \infty$. The unconditionality of the Franklin system in $L^p, 1 < p < \infty$, has been proved by S. V. Bochkarev in [6]. Moreover, the Franklin system is an unconditional basis in all reflexive Orlicz spaces ([5]). The existence of an unconditional basis in H^1 has been first proved by B. Maurey [29], but the proof was non-constructive. The first explicit construction of an unconditional basis in H^1 is due to L. Carleson [7]. Then, P. Wojtaszczyk has obtained a characterization of the BMO space in terms of the coefficients of a function in the Franklin system and proved that the Franklin system is an unconditional basis in the real Hardy space H^1 ([37]). The unconditionality of the Franklin system in real Hardy spaces $H^p, 1/2 < p \le 1$, has been obtained by P. Sjölin and J. Strömberg ([35]).

The Franklin system has had important applications in various problems of analysis. In particular, the constructions of bases in spaces $C^1(I^2)$ (see [10], [34]) and $A(D)$ (see [5]) are based on this system. Here $C^1(I^2)$ is the space of all continuously-differentiable functions $f(x,y)$ on the square $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ with the norm

$$\|f\| = \max |f(x,y)| + \max \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \max \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|,$$

and $A(D)$ denotes the space of analytic functions on the open disc $D = \{z : |z| < 1\}$ that are continuously extendable up to the boundary. The norm of a function $f \in A(D)$ is defined by

$$\|f\| = \max_{|z|\le 1} |f(z)|.$$

The questions of existence of bases in $C^1(I^2)$ and $A(D)$ were posed by S. Banach [2].

Further investigations showed that Haar and Franklin systems share a lot of properties. Nevertheless, the proofs of properties of Franklin system essentially differ from that of Haar system. In particular, a Cantor type uniqueness theorem for Franklin series was obtained quite recently ([16]). Note that there are a lot of properties of the Haar system, that are neither proved nor disproved for the Franklin system. For example, it is not known how one can reconstruct the coefficients of an everywhere convergent Franklin series. The analogous question for the Haar system was studied back in 1960s by V.A. Skvorcov [36].

It is well known that there are trigonometric series converging almost everywhere to zero and having at least one non-zero coefficient. This also applies to the series in other classical orthogonal systems, for instance, to the series in Haar, Walsh and Franklin systems.

The uniqueness problem and reconstruction of coefficients of series by various orthogonal systems has been considered in a number of papers. Uniqueness theorems for almost everywhere convergent or summable trigonometric series were obtained by A. Aleksandrov in the paper [1] and by G. Gevorkyan in [14], under some additional conditions imposed on the series. In this papers, there were obtained Fourier type formulas expressing coefficients in terms of the sum of the series via A-integral.

Generalizations of these results were obtained in several directions. G. Gevorkyan proved the analogues of these theorems for Franklin and Haar series in [13] and [15]. Afterwards V. Kostin [28] extended these results to the case of generalized Haar series corresponding to a bounded sequence $\{p_n\}$. Then K. Keryan [27] showed that similar results hold even for more general integral then A-integral, i.e for AH-integrals, introduced by K. Yoneda in [40] Further this result was extended to the regular martingale setting by M. Ginovyan and K. Keryan in [23].

Then generalizations of these results for univariate and multivariate Franklin series were obtained by G. Gevorkyan, K.Keryan, M. Poghosyan, and K. Navasardyan in the papers [17], [18], [26] and [32].

In the thesis uniqueness and reconstruction of coefficients problems are considered for orthonormal spline systems of arbitrary order k corresponding to ”regular” knots using both A-integrals and AH-integrals. Let's mention that Franklin system is one of the simplest orthonormal spline system. it is orthonormal spline systems of order $k = 2$ corresponding to dyadic sequence of knots.

The aim and objectives of the thesis. The main aim of the present thesis is to study uniqueness and reconstruction of orthonormal spline systems. The following are the main goals:

1. To describe a class of subsequences and coefficient reconstruction formulas for a Franklin series converging in measure with the majorant of the subsequence of the partial sums satisfying a condition.

2. To recover the coefficients of a multivariate Ciesielski series from its sum if the cubic partial sums of that series converge in measure and the majorant of partial sums satisfies some necessary condition.

3. To describe sequences so that for the corresponding orthonormal spline system certain coefficient reconstruction formulas are valid, provided that the orthonormal spline series converge in measure to a function and the majorant of partial sums satisfies some necessary condition.

Research methods. In the thesis the methods of metric theory of functions, functional analysis, harmonic analysis, and mathematical analysis are used. Some of the methods are modifications/generalizations of stopping time for martingales adapted to the setting of splines.

Scientific novelty. All of the main results are new. Below are listed the results:

1. If the subsequence of partial sums $\sigma_{q_k}(x)$ of a Franklin series converge in measure to a function f, the ratio $\frac{q_{k+1}}{q_k}$ is bounded and the majorant of partial sums $\sigma_{q_k}(x)$ satisfies to a necessary condition, then the coefficients of the series are restored by the function f via AH integral and its generalization.

2. If the cubic partial sums of a multivariate Ciesielski series converge in measure to a function and the majorant of partial sums satisfies some necessary condition, then the coefficients of multivariate Ciesielski series are recovered by means of its sum via A integral and its generalization.

3. If the partial sums of an orthonormal spline series converge in measure to a function and the majorant of partial sums satisfies some necessary condition, provided that the spline system corresponds to a ”regular” sequence, then recovery formulas are given for coefficients of orthonormal spline series by means of its sum via A integral and its generalization. Additionally, it is proved that the regularity of the sequence is essential.

Theoretical and practical value. All the results and methods represent theoretical value. The methods are applied and can be extended to be further applied in theories of orthogonal series, harmonic analysis, and martingales.

It is proved that if f is a sum of almost everywhere (a.e.) convergent Haar, Walsh or Franklin series with a regular majorant of the partial sums, then the coefficients of that series can be reconstructed from truncations of the function f.

Publications. The main results of the thesis have been published in 3 scientific articles. The list of the articles is given at the end of the Synopsis.

The structure and the volume of the thesis. The thesis consists of introduction, 3 chapters, a conclusion, and a list of references. The number of references is 44. The volume of the thesis is 65 pages.

The Main Content of the Thesis

In Introduction we recall several results concerning the uniqueness problem and reconstruction of coefficients of series by various orthogonal systems. Uniqueness theorems for almost everywhere convergent or summable trigonometric series were obtained in the papers [1] and [14], under some additional conditions imposed on the series. Results on uniqueness and restoration of coefficients for series by Haar, Franklin, generalized Haar systems and regular martingales have been obtained, for instance, by G. Gevorkyan, M. Ginovyan, K.Keryan, V.Kostin, M. Poghosyan, and K. Navasardyan in the papers [13], [15], [17], [18], [23], [26], [27], [28] and [32].

To formulate some of these results let's start with giving the definition of the Franklin system.
The orthonormal Franklin system consists of piecewise linear and continuous functions. This system was constructed by Franklin [12] as the first example of a complete orthonormal system, which is a basis in $\mathbb{C}[0,1]$.
Let $n = 2^\mu + \nu$, $\mu \geq 0$, where $1 \leq \nu \leq 2^\mu$. Denote

$$s_{n,i} = \begin{cases} \frac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{for } \ 0 \leq i \leq 2\nu, \\ \frac{i-\nu}{2^\mu}, & \text{for } \ 2\nu < i \leq n. \end{cases} \tag{1}$$

By S_n we denote the space of functions that are continuous and piecewise linear on $[0,1]$ with nodes $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$, that is $f \in S_n$ if $f \in C[0,1]$, and it is linear on each closed interval $[s_{n,i-1}, s_{n,i}]$, $i = 1, 2, \cdots, n$. It is clear, that $\dim S_n = n+1$, and the set $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$ is obtained by adding the point $s_{n,2\nu-1}$ to the set $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Hence, there exists a unique function $f_n \in S_n$, which is orthogonal to S_{n-1} and $\|f_n\|_2 = 1$. Setting $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$ for $x \in [0,1]$, we obtain an orthonormal system $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, which was defined equivalently by Franklin [12] .
Here we quote a result by G. Gevorkyan [13] on restoration of coefficients of series by Franklin system. Specifically, in [13] it was proved that if the Franklin series $\sum_{n=0}^\infty a_n f_n(x)$ converges a.e. to a function $f(x)$ and

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left(\lambda \cdot |\{x \in [0,1] : \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_k(x)| > \lambda\}| \right) = 0,$$

where $|A|$ denotes the Lebesgue measure of a set A and

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j f_j(x)$$

then the coefficients a_n of the Franklin series can be reconstructed by the following formula,

$$a_n = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^1 \left[f(x)\right]_\lambda f_n(x)dx,$$

where

$$\left[f(x)\right]_\lambda = \begin{cases} f(x), & \text{if } \ |f(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{if } \ |f(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Similar result on uniqueness is also obtained for the Haar system (see [15]).
Afterwards Gevorkyan's result was extended by V. Kostin [28] to the series by generalized Haar system. Consider the d-dimensional Franklin series

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),$$

where $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$ is a vector with non-negative integer coordinates, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in [0,1]^d$ and

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f_{n_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{n_d}(x_d).$$

The following theorem for multiple Franklin series was proved in [18].

Theorem 0.0.A. ([18]) If the partial sums

$$\sigma_{2^k}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}: n_i \le 2^k, i=1,\cdots,d} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

converge in measure to a function f and

$$\lim_{m\to\infty} \left(\lambda_m \cdot |\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \sup_k |\sigma_{2^k}(\mathbf{x})| > \lambda_m\}| \right) = 0$$

for some sequence $\lambda_m \to +\infty$, then for any $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} \left[f(\mathbf{x})\right]_{\lambda_m} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

In this theorem instead of the partial sums $\sigma_{2^k}(\mathbf{x})$ one can take cubic partial sums $\sigma_{q_k}(\mathbf{x})$, where $\{q_k\}$ is any increasing sequence of natural numbers, for which the ratio q_{k+1}/q_k is bounded. The following theorem is proved in [31] .

Theorem 0.0.B. ([31]) Let $\{q_k\}$ be an increasing sequence of natural numbers such that the ratio q_{k+1}/q_k is bounded. If the partial sums $\sigma_{q_k}(\mathbf{x})$ converge in measure to a function f and there exists a sequence $\lambda_m \to +\infty$ so that

$$\lim_{m\to\infty} \left(\lambda_m \cdot |\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \sup_k |\sigma_{q_k}(\mathbf{x})| > \lambda_m\}| \right) = 0$$

then for any $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} \left[f(\mathbf{x})\right]_{\lambda_m} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Note that similar questions for series by Franklin system was considered by K. Keryan in [26].

The general Franklin systems were introduced by Z. Ciesielski and A. Kamont [11], which enabled the extensions of results of the Franklin system to orthonormal spline systems with arbitrary knots in the case of piecewise linear systems, i.e. general Franklin systems (orthonormal spline systems of order 2).

Similar result on uniqueness is also obtained for the d-dimensional general Franklin system (see [21]).

Theorem 0.0.C. ([21]) If the partial sums

$$S_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}:m_i\le\mathbf{n}} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}),$$

converge in measure to a function $f(x)$ and

$$\lim_{p\to\infty}\left(\lambda_p\cdot|\{\mathbf{x}\in[0,1]^d : \sup_{\mathbf{n}}|S_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})|>\lambda_p\}|\right)=0,$$

for some sequence $\lambda_p\to+\infty$, then for any $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$

$$a_{\mathbf{m}} = \lim_{p\to\infty}\int_{[0,1]^d}\left[f(\mathbf{x})\right]_{\lambda_p} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

where $\mathbf{m} = (m_1,\cdots,m_d)\in\mathbb{N}_0^d$ is a vector with non-negative integer coordinates, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_d)\in[0,1]^d$ and

$$f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot f_{m_d}(x_d).$$

It should be noted that in 2016 Z. Wronicz [38] proved that there exists a non-trivial Franklin series for which a subsequence of its partial sums converges to zero. Recently he showed that if the 2^n-th subsequence of partial sums converges to 0 with coefficients $a_n = o(\sqrt{n})$, then all the coefficients are 0.

Other results on uniqueness and restoration of coefficients for series by Franklin and generalized Franklin systems have been obtained in the papers [19], [25], [26], and [32].

In Chapter 1 we deal with a truncation of a function by other functions instead of constants, and we get a generalization of Theorem 0.0.B.

Let functions $h_m(x):[0,1]\to\mathbb{R}$, satisfy the following conditions:

$$0\le h_1(x)\le h_2(x)\le\cdots\le h_m(x)\le\cdots,\ \lim_{m\to\infty}h_m(x)=\infty, \tag{2}$$

there exists dyadic points

$$0=t_{m,0}<t_{m,1}<t_{m,2}<\cdots<t_{m,n_m}=1,$$

so that the intervals

$$I_k^m = [t_{m,k-1},t_{m,k}),\qquad k=1,\cdots,n_m,$$

are dyadic as well, i.e. I_k^m is of the form

$$\mathcal{D}=\left\{\left[\frac{i}{2^j},\frac{i+1}{2^j}\right),0\le i\le 2^j-1, j\ge 0\right\}$$

and the function $h_m(x)$ is constant on those intervals,

$$h_m(x)=\lambda_k^m,\qquad x\in I_k^m,\quad k=1,\cdots,n_m.$$

Moreover

$$\inf_{m,k}\int_{I_k^m}h_m(x)dx = \inf_{m,k}|I_k^m|\lambda_k^m>0, \tag{3}$$

$$\sup_{m,k}\left(\frac{\lambda_k^m}{\lambda_{k-1}^m}+\frac{\lambda_{k-1}^m}{\lambda_k^m}\right)<+\infty \tag{4}$$

and

$$\sup_{m,k}\left(\frac{|I_k^m|}{|I_{k-1}^m|}+\frac{|I_{k-1}^m|}{|I_k^m|}\right)<+\infty. \tag{5}$$

In other words, for any function h_m the interval $[0,1]$ can be partitioned into dyadic intervals, so that the values of the function on neighbouring intervals are equivalent to each other and so are the lengths of neighbouring intervals. The following theorem is proved in [26] .

Theorem 1.1.A. Let $h_m(x)$ be sequence of functions satisfying conditions (2)- (4). If the partial sums $\sigma_{2^\nu}=\sum_{n=0}^{2^\nu}a_nf_n$ converge in measure to a function f and

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\{x\in[0,1];\quad \sup_\nu|\sigma_\nu(x)|>h_m(x)\}}h_m(x)dx=0,$$

then for any $n\in\mathbb{N}_0$

$$a_n=\lim_{m\to\infty}\int_0^1\big[f(x)\big]_{h_m(x)}f_n(x)dx.$$

where

$$\big[f(x)\big]_{\lambda(x)}=\begin{cases}f(x), & \text{if } |f(x)|\le\lambda(x),\\ 0, & \text{if } |f(x)|>\lambda(x).\end{cases}$$

Now we are in position to state the main result of Chapter 1, which is proved in [1*].

Theorem 1.1.1. Let $h_m(x)$ be sequence of functions satisfying conditions (2)- (4), and $\{q_k\}$ be an increasing sequence of natural numbers such that the ratio q_{k+1}/q_k is bounded. If the partial sums $\sigma_{q_k}(x)$ converge in measure to a function f and

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\{x\in[0,1];\quad \sup_k|\sigma_{q_k}(x)|>h_m(x)\}}h_m(x)dx=0, \tag{6}$$

then for any $n\in\mathbb{N}_0$

$$a_n=\lim_{m\to\infty}\int_0^1\big[f(x)\big]_{h_m(x)}f_n(x)dx. \tag{7}$$

To prove Theorem 1.1.1. the following two lemmas are used.

Lemma 1.1.2. Let $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ and $h(x)=\lambda_k$, if $x\in I_k:=[t_{k-1},t_k)$ and $I_k\in\mathcal{D}$, when $k=1,\cdots,n$. Moreover $\gamma>0$

$$\frac{1}{\gamma}\le\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\le\gamma,\ \text{when } k=1,\cdots,n-1, \tag{8}$$

then there exists points $0=\tilde{t}_0<\tilde{t}_1<\cdots<\tilde{t}_s=1$ such that $h(x)=\tilde{\lambda}_l,\ \ x\in\tilde{I}_l=[\tilde{t}_{l-1},\tilde{t}_l)\in\mathcal{D},\ l=1,\cdots s$. Besides that

$$\frac{1}{2\gamma}\le\frac{|\tilde{I}_l|}{|\tilde{I}_{l+1}|}\le 2\gamma, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\gamma}\le\frac{\tilde{\lambda}_l}{\tilde{\lambda}_{l+1}}\le\gamma,\ \text{when } l=1,\cdots,s-1, \tag{10}$$

$$\min_l\int_{\tilde{I}_l}h_m(x)dx=\min_k\int_{I_k}h_m(x)dx>0. \tag{11}$$

The proof of the Lemma 1.1.2 can be found in [26].

Lemma 1.1.3. Let $h_m(x)$ be sequence of functions satisfying conditions (2) - (4), then there exists dyadic points $0 = \tilde{t}_{m,0} < \tilde{t}_{m,1} < \cdots < \tilde{t}_{m,\tilde{n}_m} = 1$ so that the intervals $\tilde{I}_k^m = [\tilde{t}_{m,k-1}, \tilde{t}_{m,k}) \in \mathcal{D},\ k = 1, \cdots \tilde{n}_m$ are dyadic as well and the function $h_m(x)$ is constant on those intervals,

$$h_m(x) = \tilde{\lambda}_k^m, \text{ if } x \in \tilde{I}_k^m,\ k = 1, \cdots, \tilde{n}_m$$

and the conditions (3) - (5) are satisfied.

In Chapter 2 we generalize Theorem 0.0.A. for multiple Ciesielski series.
We are concerned with orthonormal spline systems of order k with dyadic partitions. Let $k \geq 2$ be an integer. For n in the range $-k+2 \leq n \leq 1$, let $\mathcal{S}_n^{(k)}$ be the space of polynomials of order not exceeding $n+k-1$ (or degree not exceeding $n+k-2$) on the interval $[0,1]$ and $\{f_n^{(k)}\}_{n=-k+2}^{1}$ be the collection of orthonormal polynomials in $L^2 \equiv L^2[0,1]$ such that the degree of $f_n^{(k)}$ is $n+k-2$. For $n \geq 2$, let $n = 2^\nu + j$, where $\nu \geq 0$, $1 \leq j \leq 2^\nu$. Denote

$$s_{n,i} = \begin{cases} 0, & -k+1 \leq i \leq 0 \\ \frac{i}{2^{\nu+1}}, & 1 \leq i \leq 2j \\ \frac{i-j}{2^\nu}, & 2j+1 \leq i \leq n-1 \\ 1, & n \leq i \leq n+k-1, \end{cases}$$

and let $\mathcal{T}_n$ be the ordered sequence of points $s_{n,i}$. Note that $\mathcal{T}_n$ is obtained from $\mathcal{T}_{n-1}$ by adding the point $s_{n,2j-1}$. In that case, we also define $\mathcal{S}_n^{(k)}$ to be the space of polynomial splines of order k with grid points $\mathcal{T}_n$. For each $n \geq 2$, the space $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$ has codimension 1 in $\mathcal{S}_n^{(k)}$ and, therefore, there exists a function $f_n^{(k)} \in \mathcal{S}_n^{(k)}$, that is orthogonal to the space $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$ and $\|f_n^{(k)}\|_2 = 1$. Observe that this function $f_n^{(k)}$ is unique up to the sign.
The system of functions $\{f_n^{(k)}\}_{n=-k+2}^{\infty}$ is called the Ciesielski system of order k.
Let us note that the case $k = 2$ corresponds to orthonormal systems of piecewise linear functions, i.e., the Franklin system.
Let d be a natural number. Consider the d-dimensional Ciesielski series

$$\sum_{\mathbf{n} \in \Lambda^d} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \tag{12}$$

where $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_d) \in \Lambda^d$ is a vector with integer coordinates,
$\Lambda := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -k+1\}$, $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in [0,1]^d$ and

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f_{n_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{n_d}(x_d).$$

Denote by $\sigma_{2^\mu}(\mathbf{x})$ the cubic partial sums of the series (12) with indices 2^μ, that is

$$\sigma_{2^\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}: n_i \leq 2^\mu, i=1,\cdots,d} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}). \tag{13}$$

The main result of Chapter 2 is the following theorem, proved in [2*]:

Theorem 2.1.1. If the partial sums $\sigma_{2^\mu}(\mathbf{x})$ converge in measure to a function f and

$$\lim_{q \to \infty} \left(\lambda_q \cdot |\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \sup_\mu |\sigma_{2^\mu}(\mathbf{x})| > \lambda_q\}| \right) = 0 \tag{14}$$

for some sequence $\lambda_q \to +\infty$, then for any $\mathbf{n} \in \Lambda^d$

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{q\to\infty} \int_{[0,1]^d} \left[f(\mathbf{x})\right]_{\lambda_q} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{15}$$

In Chapter 3 we are concerned with orthonormal spline systems of order k corresponding to the k regular partitions.
Let $\mathcal{T} = (t_n)_{n=2}^{\infty}$ be a dense sequence of points in the open unit interval $(0,1)$, such that each point occurs at most k times. Moreover, define $t_0 := 0$ and $t_1 := 1$. Such point sequences are called k admissible.
For n in the range $-k+2 \le n \le 1$, let $\mathcal{S}_n^{(k)}$ be the space of polynomials of order not exceeding $n+k-1$ (or degree not exceeding $n+k-2$) on the interval $[0,1]$ and $\{f_n^{(k)}\}_{n=-k+2}^{1}$ be the collection of orthonormal polynomials in $L^2 \equiv L^2[0,1]$ such that the degree of $f_n^{(k)}$ is $n+k-2$.
For $n \ge 2$, let $\mathcal{T}_n$ be the ordered sequence of points consisting of the grid points $(t_j)_{j=0}^{n}$ repeated according to their multiplicities and where the knots 0 and 1 have multiplicity k, i.e.,

$$\mathcal{T}_n = (0 = \tau_{-k+1}^n = \cdots = \tau_0^n < \tau_1^n \le \cdots \le \tau_{n-1}^n < \tau_n^n = \cdots = \tau_{n+k-1}^n = 1).$$

In that case, we also define $\mathcal{S}_n^{(k)}$ to be the space of polynomial splines of order k with points $\mathcal{T}_n$. For each $n \ge 2$, the space $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$ has codimension 1 in $\mathcal{S}_n^{(k)}$, therefore there exists a function $f_n^{(k)} \in \mathcal{S}_n^{(k)}$, that is orthogonal to the space $\mathcal{S}_{n-1}^{(k)}$ and $\|f_n^{(k)}\|_2 = 1$. Observe that this function $f_n^{(k)}$ is unique up to the sign.
The system of functions $\{f_n^{(k)}\}_{n=-k+2}^{\infty}$ is called the orthonormal spline system of order k corresponding to the sequence $\mathcal{T}$.
Note that the case $k = 2$ corresponds to orthonormal systems of piecewise linear functions, i.e. general Franklin systems.
Let's define $P_n^{(k)}$ as the orthogonal projection operator onto $\mathcal{S}_n^{(k)}$ with respect to the ordinary inner product on $[0,1]$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, i.e.,

$$\langle P_n^{(k)} f, s\rangle = \langle f, s\rangle, \ \ \forall s \in \mathcal{S}_n^{(k)}.$$

We will frequently omit the parameter k and write f_n, $\mathcal{S}_n$, P_n instead of $f_n^{(k)}$, $\mathcal{S}_n^{(k)}$, $P_n^{(k)}$ respectively.
We will use the notation $A(t) \lesssim_k B(t)$ to indicate the existence of a constant $C_k > 0$, such that $A(t) \le C_k \cdot B(t)$, where C_k depends on the parameter k.

Definition 3.1.1. For an integrable function f, the Hardy-Littlewood maximal function is defined as

$$\mathcal{M}(f,x) := \sup_{I: I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt,$$

with the supremum taken over all intervals I containing x. Consider a series

$$\sum_{n\in\Lambda} a_n f_n(x), \tag{16}$$

where $\Lambda := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge -k+1\}$.
Let $\{n_q\}$ be an increasing sequence of natural numbers, denote

$$\Lambda_q := \{-k+1, \cdots, n_q\}.$$

Definition 3.1.2. An admissible sequence $\mathcal{T}$ is called k regular for n_q with a parameter $\gamma > 1$, if

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{|\Delta_i^{n_q}|}{|\Delta_{i-1}^{n_q}|} \le \gamma, \ \ -k+1 \le i \le n_q - 1, \ \ q \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

where $\Delta_i^n = [\tau_i^n, \tau_{i+k}^n]$.
We will also be interested in sequences $\mathcal{T}$ for which

$$\frac{|\Delta_i^{n_q}|}{|\Delta_j^{n_{q+1}}|} \leq \gamma, \text{ for any } i, j, q \text{ so that } \Delta_i^{n_q} \supset \Delta_j^{n_{q+1}}. \tag{18}$$

Denote by $S_{n_q}(x)$ the n_q-th partial sums of the series (16), that is

$$S_{n_q}(x) := \sum_{n=-k+2}^{n_q} a_n f_n(x) \text{ and } S^*(x) := \sup_q |S_{n_q}(x)|. \tag{19}$$

The main results of Chapter 3 are the following theorems, which are stated in [3*]:

Theorem 3.1.3. Let the partition $\mathcal{T}$ be a k regular for n_q with a parameter $\gamma > 1$ and satisfy condition (18). If the partial sums $S_{n_q}(x)$ converge in measure to a function $f(x)$ and

$$\lim_{p\to\infty}\left(\lambda_p \cdot |\{x \in [0,1] : \sup_q |S_{n_q}(x)| > \lambda_p\}|\right) = 0, \tag{20}$$

for some sequence $\lambda_p \to +\infty$, then for any $n \in \Lambda$

$$a_n = \lim_{p\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_{\lambda_p} f_n(x)dx. \tag{21}$$

Theorem 3.1.4. shows the necessity of condition (18) in Theorem 3.1.3.

Theorem 3.1.4. Let the partition $\mathcal{T}$ be a k regular for n_q, which doesn't satisfy condition (18) for any γ. Then for some subsequence $\{n_{m_q}\}$, there exists a series $\sum_{n\in\Lambda} a_n f_n(x)$, such that its partial sums $S_{n_{m_q}}(x)$ converge a.e. to some function $f(x)$, and

$$\lim_{p\to\infty}\left(\lambda_p \cdot |\{x \in [0,1] : \sup_q |S_{n_{m_q}}(x)| > \lambda_p\}|\right) = 0, \tag{22}$$

for some sequence $\lambda_p \to +\infty$, but not all the coefficients a_n, $n \in \Lambda$ are recovered by formulas (21). Particularly

$$a_{-k+2} \neq \lim_{p\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_{\lambda_p} f_{-k+2}(x)dx.$$

Theorem 3.1.5. shows the necessity of k regularity for n_q in Theorem 3.1.3.

Theorem 3.1.5. Let the partition $\mathcal{T}$ be $(k+1)$ regular for n_q, and not k regular for n_q. Then there exists a subsequence $\{n_{m_q}\}$ and a series $\sum_{n\in\Lambda} a_n f_n(x)$, such that its partial sums $S_{n_{m_q}}(x)$ converge a.e. to some function $f(x)$ and

$$\lim_{p\to\infty}\left(\lambda_p \cdot |\{x \in [0,1] : \sup_q |S_{n_{m_q}}(x)| > \lambda_p\}|\right) = 0, \tag{23}$$

for some sequence $\lambda_p \to +\infty$, but not all the coefficients a_n, $n \in \Lambda$ are recovered by formulas (21). Particularly

$$a_{-k+2} \neq \lim_{p\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_{\lambda_p} f_{-k+2}(x)dx.$$

References

[1] A.B. Aleksandrov, *A-integrability of the boundary values of harmonic functions.* Math. Notes, **30** (1981), 515–523.

[2] S. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Chelsea, reprint 1955.

[3] N. Bari, *A Treatise on Trigonometric Series,* Pergamon Press, 1964.

[4] W. Böhm, *Inserting new knots into B-spline curves.* Computer-Aided Design. (1980), No. 4, 199-201.

[5] S. V. Bochkarev, *Existence of a basis in the space of functions analytic in the disk, and some properties of Franklin's system,* Math. USSR-Sb., **24** (1974), no. 1, 1–16.

[6] S. V. Bochkarev, *Some inequalities for the Franklin series,* Anal. Math., **1**, (1975), 249–257.

[7] L. Carleson, *An explicit unconditional basis in* H^1. Bull. Sci. Math. (2) **104** (1980), no. 4, 405–416.

[8] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system,* Studia Math., **23** (1963), 141 – 157.

[9] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system, II,* Studia Math., **27** (1966), 289 – 323.

[10] Z. Ciesielski, *A construction of a basis in* $C^1(I^2)$, Studia Math. , **33** (1969), no. 2, 243–247.

[11] Z. Ciesielski, A. Kamont, *Projections onto piecewise linear functions,* Funct. Approx. Comment. Math., **25** (1997), 129–143. Dedicated to Roman Taberski on the occasion of his 70th birthday.

[12] Ph. Franklin *A Set of Continuous Orthogonal Functions.* Math. Ann.,(1928), 522-528.

[13] G. G. Gevorkyan, *Uniqueness of Franklin series.* Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR, **46** (1989), 609–615.

[14] G. G. Gevorkyan, *On the uniqueness of trigonometric series.* Sb. Math., **68** (1991), 325–338.

[15] G. G. Gevorkyan, *On uniqueness of additive functions of dyadic cubes and series by Haar systems* J. Contemp. Math. Analysis, (1995), No. 5, 2–13.

[16] G. G. Gevorkyan, *On the uniqueness of series in the Franklin system*, Sbornik: Mathematics **207** (2016), no. 12, 1650–1673.

[17] G. G. Gevorkyan, K.A. Navasardyan *On Haar series of A-integrable functions* J. Contemp. Math. Analysis, **52** (2017), 149–160.

[18] G. G. Gevorkyan, M. P. Poghosyan, *On Recovering of Coefficients of a Franklin Series with the "Good" Majorant of Partial Sums.* J. Contemp. Math. Analysis, **52** (2017), 254–260.

[19] G. G. Gevorkyan, *Uniqueness Theorem for Multiple Franklin Series.* Math. Notes, **101** (2017), 219–229.

[20] G. G. Gevorkyan, K. A. Keryan, M. P. Poghosyan, *Convergence to infinity for orthonormal spline series.* Acta Mathematica Hungarica, **162** (2020), 604–617.

[21] G. G. Gevorkyan, K.A. Navasardyan *Uniqueness of general Franklin series.* J. Contemp. Math. Analysis, **53** (2018), 223–231.

[22] G. Gevorkyan, A. Kamont, K. Keryan, M. Passenbrunner, *Unconditionality of orthogonal spline systems in H^1.* Studia Mathematica, **226** (2015), 123–154.

[23] M. Ginovyan, K. Keryan, *Reconstruction of martingales and applications to multiple Haar series.* Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, **55** (2018), 542–558.

[24] A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann. , **69** (1910), 331–371

[25] K. A. Keryan, *A On recovery of a Franklin series from its sum,* Proc. of the Yerevan State University, Physics & Mathematics, **51** (2017), 151–157.

[26] K. A. Keryan, *A uniqueness theorem for Franklin series.* J. Contemp. Math. Analysis, **52** (2017), 92–101.

[27] K. A. Keryan, *Uniqueness theorem for additive functions and its applications to orthogonal series,* Mathematical notes, **97** (2015), 362–375.

[28] V. V. Kostin, *Reconstructing coefficients of series from certain orthogonal systems of function.* Mathematical Notes, **73** (2003), 662–679.

[29] B. Maurey, *Isomorphismes entre espaces H^1.* Acta Math. **145** (1980), no. 1-2, 79–120.

[30] D. Menshoff, *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Comptes Ren. Acad. Sci., Paris, **163** (1916), 433–436.

[31] K.A. Navasardyan, *Uniqueness Theorems for Multiple Franklin Series.* Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences, **51** (2017), 241–249.

[32] K.A. Navasardyan, *On a Uniqueness Theorem for the Franklin System.* Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences, **52** (2018), 93–100.

[33] M. Passenbrunner, A. Shadrin, *On almost everywhere convergence of orthogonal spline projections with arbitrary knots.* Journal of Approximation Theory, **180** (2014), 77–89.

[34] S. Schonefeld, *Schauder bases in spaces of differentiable functions,* Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 586–590.

[35] P. Sjölin and J. O. Strömberg, *Basis properties of Hardy spaces.* Ark. Mat., **21** (1983), 111–125.

[36] V. A. Skvorcov, *Calculation of the coefficients of an everywhere convergent Haar series*, Mathematics of the USSR-Sbornik **4** (1968), no. 3, 317–327.

[37] P. Wojtaszczyk, *The Franklin system is an unconditional basis in H_1,* Arkiv fur Matematik, **20** (1982), no. 1, 293–300.

[38] Z. Wronicz, *On a problem of Gevorkyan for the Franklin system*, Opuscula Math., **36** (2016), no. 5, 681–687.

[39] Z. Wronicz, *Uniqueness of series in the Franklin system and the Gevorkyan problems*, Opuscula Math., **41** (2021), no. 2, 269–276

[40] K. Yoneda, *On generalized A-integrals.* I Proc. Japan Acad., **45** (1969), no. 3, 159–163.

[41] A. Zygmund, *Trigonometric series,* Volume I & II Combined, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2002).

The author's publications

[1*] K. Keryan, A. Khachatryan, *A Uniqueness theorem for Franklin series*, J. Contemp. Math. Analysis, **55** (2020), no. 3, 166–178.
[2*] A. Khachatryan, *A Uniqueness Theorem for Multiple Orthonormal Spline Series.* J. Contemp. Mathemat. Anal. **56** (2021), 118–127.
[3*] K. Keryan, A. Khachatryan, *A uniqueness theorem for orthonormal spline series.* Reports of NAS RA, **123** (2023), 7-11.

Ամփոփում

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից և երեք գլուխներից:
Առաջին գլուխը նվիրված է Ֆրանկլինի դասական համակարգով շարքի գումարից շարքի վերականգման հարցին: Նշենք, որ Ֆրանկլինի դասական համակարգի ֆունկցիաները հանդիսանում են կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաներ, այլ կերպ ասած, երկրորդ կարգի սպլայններ: Ներկայացված է ֆունկցիայի Լեբեգի ինտեգրալի ընդհանրացում հանդիսացող AH ինտեգրալը: Այս դեպքում f ֆունկցիայի «ինտեգրալը» սահմանվում է որպես նրա՝ անվերջի ձգտող h_m ֆունկցիաներով սահմանափակումների ինտեգրալների սահման:
Նկարագրվել են h_m ֆունկցիաների դասեր, որոնց համար ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը. եթե Ֆրանկլինի շարքի $\sigma_{q_k}(x)$ մասնակի գումարների հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է f ֆունկցիային, $\frac{q_{k+1}}{q_k}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, և մասնակի գումարների մաժորանտը՝ $\sup_k \sigma_{q_k}(x)$ գերազանցում է h_m ֆունկցիային «փոքր բազմության» վրա, երբ m ձգտում է անվերջի, ապա տվյալ Ֆրանկլինի շարքի a_n գործակիցը վերականգնվում է Ֆուրիեի տիպի բանաձևի միջոցով՝ f ֆունկցիայի h_m ֆունկցիաներով սահմանափակումների և Ֆրանկլինի n-րդ ֆունկցիայի արտադրյալի ինտեգրալի սահմանն է m-ն անվերջի ձգտելիս:
Մասնավորապես, որպես $h_m(x)$ ֆունկցիաներ կարելի է վերցնել հաստատուն ֆունկցիաները՝ $h_m(x) = \lambda_m, x \in [0,1]$, որտեղ $\lambda_m \to \infty$, երբ $m \to \infty$:
Երկրորդ գլխում ուսումնասիրվում է Չիսելսկու համակարգով բազմապատիկ շարքի գումարից շարքի վերականգման հարցը: Նշենք, որ Չիսելսկու համակարգը հանդիսանում է Ֆրանկլինի դասական համակարգի ընդհանրացում, որը նույնպես ծնված է երկուական հաջորդականությամբ, բայց նրա ֆունկցիաները հանդիսանում են բարձր կարգի սպլայններ:
Ցույց է տրված, որ եթե Չիսելսկու բազմապատիկ շարքի 2^μ խորանարդային մասնակի գումարները՝

$$\sigma_{2^\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}: n_i \le 2^\mu, i=1,\cdots,d} a_{\mathbf{n}} f_{n_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{n_d}(x_d)$$

ըստ չափի զուգամիտում են f ֆունկցիային և շարքի այդ մասնակի գումարների մաժորանտը՝ $\sup_\mu \sigma_{2^\mu}(\mathbf{x})$ գերազանցում է λ_m հաստատունին $o(1/\lambda_m)$ չափ ունեցող բազմության վրա, երբ m ձգտում է անվերջի, ապա տվյալ Չիսելսկու շարքի a_n գործակիցը վերականգնվում է Ֆուրիեի տիպի բանաձևի միջոցով՝ f ֆունկցիայի λ_m հաստատուններով սահմանափակումների և Չիսելսկու n-րդ ֆունկցիայի արտադրյալի ինտեգրալի սահմանն է m-ն անվերջի ձգտելիս:
Երրորդ գլուխը նվիրված է բարձր կարգի օրթոնորմալ սպլայն համակարգերով միապատիկ շարքի գումարից շարքի վերականգման հարցին: Նշենք, որ այս համակարգերը հանդիսանում են Չիսելսկու համակարգի ընդհանրացում, որն արդեն ծնված է ոչ թե երկուական հաջորդականությամբ, այլ օրինակ կամայական իրարից տարբեր անդամներով [0,1] հատվածի հաջորդականությամբ:
Դիտարկված են օրթոնորմալ սպլայն համակարգը ծնող «ռեգուլյար» հաջորդականություններ, որոնց համար հարևան B-սպլայնների կրիչների երկարությունների հարաբերությունը սահմանափակ է և իրար հաջորդող տրոհումներին համապատասխան B-սպլայնների կրիչների երկարությունները միմյանց համեմատական են, եթե կրիչներից մեկն ընկած է մյուսի մեջ:
Ապացուցվել է, որ եթե «ռեգուլյար» հաջորդականությամբ ծնված օրթոնորմալ սպլայն համակարգով շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է f ֆունկցիային և շարքի այդ մասնակի գումարների մաժորանտը

գերազանցում է λ_m հաստատունին $o(1/\lambda_m)$ չափ ունեցող բազմության վրա, երբ m ձգտում է անվերջի, ապա տվյալ շարքի a_n գործակիցը վերականգնվում է Ֆուրիեի տիպի բանաձևի միջոցով՝ f ֆունկցիայի λ_m հաստատուններով սահմանափակումների և օրթոնորմալ սպլայն համակարգի n-րդ ֆունկցիայի արտադրյալի ինտեգրալի սահմանն է m-ն անվերջի ձգտելիս։
Բացի այդ ցույց է տրվել, որ վերջին թեորեմում «ռեգուլյար» հաջորդականության վերև նշված պահանջներից երկուսն էլ էական են. պայմաններից որևէ մեկին չբավարարող հաջորդականությունների համար կառուցվել են նրանց համապատասխան օրթոնորմալ սպլայն համակարգով շարքերի օրինակներ, որոնց համար բավարարված են թեորեմի մնացած պայմանները, սակայն գործակիցների վերականգման վերը նշված բանաձևերը ճշմարիտ չեն։

Заключение

Диссертация состоит из введения и трех глав.

Первая глава посвящена вопросу восстановления ряда по сумме ряда с помощью классической системы Франклина. Заметим, что функции классической системы Франклина являются кусочно-линейными функциями, другими словами, сплайнами второго порядка. Представлен интеграл AH, являющийся обобщением интеграла Лебега от функции. В этом случае "интеграл" функции f определяется как предел интегралов от ее ограничений с функциями h_m, которые стремятся к бесконечности.

Описаны классы функций h_m, для которых верно следующее утверждение:

если последовательность частичных сумм ряда Франклина $\sigma_{q_k}(x)$ сходится по мере к функции f, последовательность $\frac{q_{k+1}}{q_k}$ ограничена, а мажоранта частичных сумм $\sup_k \sigma_{q_k}(x)$ превосходит функцию h_m на "малом множестве", когда m стремится к бесконечности, то коэффициент a_n заданного ряда Франклина можно восстанавить используя формулу типа Фурье: он является пределом интегралов от произведения ограничений функции f функциями h_m и n-ой функцией Франклина при стремлении m к бесконечности.

В частности, в качестве функций $h_m(x)$ можно взять постоянные функции $h_m(x)$: $h_m(x) = \lambda_m, x \in [0,1]$, где $\lambda_m \to \infty$, когда $m \to \infty$.

Во второй главе исследуется вопрос восстановления рядов по сумме кратных рядов по системе Чисельского. Обратите внимание, что система Чисельского является обобщением классической системы Франклина, которая также рождается из двоичной последовательности, но ее функции представляют собой сплайны высокого порядка.

Показано, что если 2^μ кубические частичные суммы кратного ряда Чисельского

$$\sigma_{2^\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}: n_i \le 2^\mu, i=1,\cdots,d} a_{\mathbf{n}} f_{n_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{n_d}(x_d)$$

сходятся по мере к функции f и мажоранте этих частичных сумм $\sup_\mu \sigma_{2^\mu}(\mathbf{x})$ превышает константу λ_m на множестве меры $o(1/\lambda_m)$, когда m стремится к бесконечности, то коэффициент a_n данного ряда Чисельского восстанавливается по формуле типа Фурье: он является пределом интегралов от произведения ограничений функции f константами λ_m и n-ой функцией Чисельского при стремлении m к бесконечности.

Третья глава посвящена вопросу восстановления рядов по сумме обычных (однократных) рядов по ортонормированными системами сплайнов высокого порядка. Заметим, что эти системы являются обобщением системы Чисельского, которые рождаются не из двоичной последовательности, а, например, из произвольной последовательности отрезка [0,1] с различными членами.

Рассматриваются «регулярные» последовательности, порождающие ортонормированную систему сплайнов, для которых ограничено отношение длин носителей соседних B-сплайнов и длины носителей B-сплайнов, соответствующих последовательным разбиениям, пропорциональны друг другу, если один из носителей лежит внутри другого.

Доказано, что если последовательность частичных сумм ряда по ортонормированной системе сплайнов, порожденной «регулярной» последовательностью, сходится по мере к функции f и мажоранта этих частичных сумм превышает константу $lambda_m$ на множестве меры $o(1/\lambda_m)$, когда m стремится к бесконечности, то коэффициент a_n данного ряда восстанавливается по формуле типа Фурье: он является пределом интегралов от произведения ограничений функции f константами λ_m и n-ой функцией ортонормированной системы сплайнов при стремлении m к бесконечности.

Кроме того, было показано, что оба указанных выше требования к «регулярной» последовательности в последней теореме существенны: для последовательностей, не удовлетворяющих одному из условий, построены примеры рядов по соответствующим им ортонормированным системам сплайнов, для которых выполняются остальные условия теоремы, но приведенные выше формулы восстановления коэффициентов неверны.