ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Թամազյան Հակոբ Արամի

Արտածումների Բարդության Հետազոտում Ասույթային Հաշվի Մի Շարք Հայտնի և Նոր Կառուցված Համակարգերում

Ա.01.09. «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության սեղմագիր

Երևան 2024

Ատենախոսության թեման հաստատվել է **Երևանի պետական համալսարանում**:

Գիտական ղեկավար՝

ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Ա. Չուբարյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Է. Մ. Պողոսյան

ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Հ. Ռ. Բոլիբեկյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայ-Ռուսական /Սլավոնական/ համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2024 թ. հունիսի 17-ին, ժամը 15:00-ին, ԵՊՀ-ում գործող ՀՀ ԲՈԿ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ա. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2024 թ. մայիսի 15-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝

Կ. Լ. Ավետիսյան

Ատենախոսության ընդհանուր նկարագիրը

Սույն ատենախոսությունում ուսումնասիրված են արտածման հիմնական բնութագրիչների գնահատականները ասույթային հաշվի տարբեր հայտնի համակարգերում, ինչպես նաև նոր կառուցված համակարգերում:

Թեմայի արդիականությունը: Արտածումների բարդության տեսության ամենահիմնական խնդիրներից մեկը հանդիսանում է դասական ասույթային հաշվի համար գտնել արդյունավետ արտածման համակարգ: Կարծիք կա, որ ասույթային հաշվի արդյունավետ համակարգի համար պետք է գոյություն ունենա այնպիսի բազմանդամ, որ ցանկացած նույնաբանության արտածման երկարությունը չգերազանցի այդ բազմանդամի արժեքը բանաձևի երկարությունից: Cook-ի և Reckhow-ի[1] աշխատության մեջ այդպիսի համակարգերը անվանվել են սուպեր համակարգեր և ապացուցվել է, որ գոյություն ունի դասական ասույթային հաշվի սուպեր համակարգ այն և միայն այն դեպքում, երբ $NP = coNP$, հետևաբար ասույթային բանաձևերի բարդության հայտանիշերի հետազոտումը տարբեր արտածման համակարգերում կապված են բարդությունների տեսության հիմնական $P \stackrel{?}{=} NP$ խնդրի հետ:

Բանաձևերի արտածումների բարդությունները գնահատվում են մի շարք եղանակներով, որոնցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է արտածման էֆֆեկտիվությունը արտահայտող կարևոր բնութագրիչ: Բանաձևի արտածման հիմնական երկու բնութագրիչներն են՝ նրա հնարավոր կարճագույն արտածման երկարությունը (size), արտածման հնարավոր նվազագույն քայլերի քանակը (steps): Հայտնի են արտածումների երկու հիմնական տարբերակներ՝ գծային և ծառատիպ, որոնցում միևնույն բանաձևերի միևնույն արտածման բնութագրիչները կարող են լինել էապես տարբեր: Արտածման համակարգերի համար կարևոր նկարագիր է հանդիսանում այն փաստը, թե գոյություն ունի արդյոք արտածման տրված տարատեսակի համար ցանկացած նույնաբանություն արտածող արդյունավետ ալգորիթմ ըստ արտածման բնութագրիչներից որևէ մեկի: Հետևաբար, հետազոտության շրջանակներում կարիք է առաջացել կառուցել առկա արտածման համակարգերի բաղդատում, ինչպես նաև նոր համակարգերի կառուցում:

Կիրառական նշանակություններ: Ունենալով տեսական նշանակություն, այս հետազոտություններն ունեն կիրառություն թեորեմների ապացույցների ավտոմատացման ընթացակարգում: Համակարգչային գիտության, կրիպտոգրաֆիայի, ինչպես նաև արհեստական բանականության և մեքենայական ուսուցման արագ զարգացող ոլորտներում արտածումների տեսությունը ծառայում է որպես հիմնարար հենասյուն՝ առաջարկելով առաջխաղացման համար կարևոր

---

[1] S. A. Cook and R. A. Reckhow, The relative efficiency of propositional proof systems, Journal of Symbolic Logic, vol. 44, pp. 36–50, 1979

գործիքներ: Համակարգչային գիտության շրջանակներում այն կարևոր դեր է խաղում ալգորիթմների վերլուծության և ստուգման մեջ՝ ապահովելով ծրագրային ապահովման և համակարգերի ճիշտ և արդյունավետ գործարկումը: Օրինակ, Prolog տրամաբանական ծրագրավորման լեզուն, որը հիմնված է ֆորմալ տրամաբանության վրա, ցույց է տալիս արտածումների տեսության կիրառումը ծրագրերի կառուցման մեջ, որոնք արդյունավետորեն լուծում են տրամաբանական խնդիրները եզրակացության միջոցով: Կրիպտոգրաֆիայում արտածումների տեսությունը կենտրոնական նշանակություն ունի անվտանգ ծածկագրային արձանագրությունների կառուցման և վերլուծության համար՝ տրամադրելով անվտանգության մաթեմատիկական երաշխիքներ տարբեր տեսակի հարձակումներից: Արհեստական բանականության և մեքենայական ուսուցման ոլորտներում արտածումների տեսությունը կառուցում է տարբեր մոդելների տրամաբանության վրա հիմնված եզրահանգումներ, ընդ որում Prolog-ի նման լեզուները նպաստում են տրամաբանական եզրակացությունների ալգորիթմների զարգացմանը և օգնում են ավելի արդյունավետ մեքենայական ուսուցման մոդելների նախագծմանը:

Հետազոտության նպատակը և խնդիրները: Ատենախոսական աշխատանքի նպատակն է արտածումների որոշ հայտնի համակարգերում արտածումների տարատեսակներում տարբեր բարդության բնութագրիչների հետազոտությունը, ինչպես նաև նոր համակարգերի կառուցումը, նպատակ ունենալով արտածման համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման ճշգրտումը: Մասնավորապես, դիտարկվել են հետևյալ խնդիրները.

- ասույթային հաշվի սուպեր անվանը հավակնող մի շարք համակարգերում արտածումների բարդության հարաբերությունները,
- արտածման ոչ սուպեր նոր համակարգերի կառուցումը, դրանց հատկությունների ուսումնասիրումը և հարաբերությունը ասույթային որոշ հայտնի արտածման համակարգերի հետ,
- դասական տրամաբանության Ֆրեգեի համակարգերում արտածման բարդության ստորին գնահատականի ճշգրտումը:

Հետազոտման մեթոդները: Ատենախոսությունում օգտագործվել են մաթեմատիկական տրամաբանության, հաշվարկելիության բարդության տեսության, ինչպես նաև կոմբինատոր օպտիմիզացիայի մեթոդները:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթներն են.

1. Ապացուցված է ասույթային հաշվի ծավալիչների ավելացմամբ սեկվենցիալ **QPK** համակարգի և մի շարք այլ համակարգերի գծային արտածումների բազմանդամային համարժեքությունը ըստ արտածումների երկարության և ըստ արտածման քայլերի:

2. Կառուցված է լոկալ որոշիչ սեկվենցիալ համակարգերի ընտանիք (**DS**), որոնք համեմատվել են պնդումների ապացուցման ավտոմատացման համար կիրառվող մի շարք հայտնի դասական ասույթային արտածման համակարգերի հետ: Ընդհանրացնելով դասական տրամաբանության համար սահմանված որոշիչ կոնյունկտի գաղափարը՝ մոդալ տրամաբանության համար սահմանվել է **E**$_{\mathbf{mod}}$ արտածման համակարգը, որում և որոշ բանաձևերի համար տրվել են արտածման բնութագրիչների գնահատականները:
3. Ֆրեգեի ցանկացած համակարգի համար ստացված է արտածումների երկարությունների ստորին սուպեր-քառակուսային գնահատական, մինչ այժմ հայտնի քառակուսային գնահատականի փոխարեն:

Գիտական նորույթը: Ատենախոսության շրջանակներում կատարված հետազոտություններում ստացված բոլոր արդյունքները նոր են՝ ապացուցված թեորեմների հիման վրա հնարավոր է եղել պարզել որոշ համակարգերի տեղը հայտնի բաղդատման աղյուսակում, կառուցվել են կարևոր հատկություններ ունեցող նոր արտածման համակարգեր, ինչպես նաև կատարվել է դասական տրամաբանության Ֆրեգեի համակարգերում արտածման երկարությունների ստորին գնահատականի ճշգրտում :

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը: Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքները ունեն տեսական բնույթ և միևնույն ժամանակ ունեն արտահայտված կիրառական ուղղվածություն: Արտածման համակարգերում արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատումը ունի լայն կիրառություն թեորեմների ապացույցների ավտոմատացման գործընթացում, հետևաբար նաև մեքենայական ուսուցման հետ առնչվող ուսումնասիրություններում, ինչպես նաև այնպիսի ոլորտներում, ինչպիսիք են փորձագիտական համակարգերը, արհեստական բանականությունը, կրիպտոգրաֆիան, ծրագրային ապահովման ստուգման և սինթեզման խնդիրները:

Հրապարակումներ: Ատենախոսության հետազոտությունների վերաբերյալ տպագրվել են 8 գիտական աշխատություններ, որոնց ցանկը բերվում է սույն թեզում օգտագործված գրականության ցանկի վերջնամասում:

Ստացված արդյունքների փորձարկումը: Ատենախոսության արդյունքները քննարկվել և զեկուցվել են տարբեր սեմինարների և գիտաժողովների ժամանակ ինչպիսիք են՝

- Logic Colloquium 2023, European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, University of Milan, Italy 2023.
- CSIT 2023, 14th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia.
- ԵՊՀ ԻԿՄ ֆակուլտետի ընդհանուր գիտական սեմինարին:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլուխներից, ամփոփումից, օգտագործված գրականության ցանկից, որը ներառում է 38 աշխատանք, ինչպես նաև երեք հավելվածներից: Ատենախոսության ծավալը 90 էջ է:

Ատենախոսության համառոտ բովանդակություն

1-ին գլխում տրված են որոշ հասկացությունների սահմանումներ, որոնց վրա հիմնված են ատենախոսության արդյունքները:

Հետազոտության հետագա քայլերի համար կօգտագործենք տրամաբանական փոփոխականների, ասույթային հաշվի բանաձևերի և նույնաբանությունների հայտնի գաղափարները:

1.1 Արտածման բարդության բնութագրիչները

$|\varphi|$-ով կնշանակենք φ բանաձևի երկարությունը, սահմանված որպես բոլոր տրամաբանական գործողությունների մուտքերի քանակը: Ակնհայտ է, որ բանաձևի ընդհանուր երկարությունը, որը ներառում է բոլոր տրամաբանական գործողությունները և փոփոխականների մուտքերը, սահմանափակված է $|\varphi|$-ից կախված գծային ֆունկցիայով:

Հետևելով Y. Filmus և համահաղինակներ[2] աշխատությանը, ներմուծենք արտածման բարդության բնութագրիչների որոշ գաղափարներ: Դիցուք Φ-ն որևէ արտածման համակարգ է՝ իր հենասույթներով և իր արտածման կանոններով: Φ համակարգում արտածումը **(գծային)** սահմանենք որպես տողերի հաջորդականություն, որտեղ ցանկացած տող կամ հենասույթ է կամ ստացվել է նախորդ տողերի վերջավոր բազմությունից Φ-ի որոշակի արտածման կանոնով: Հայտնի է, որ Φ համակարգում արտածումները կարող են ներկայացվել նաև **ծառի** տեսքով, որտեղ ցանկացած բանաձև կարող է մասնակցել առավելագույնը մեկ անգամ որպես արտածման նախադրյալ:

Սահմանում 1.1.1: Φ-արտածման երկարությունը /**l–բարդություն/**, հավասար է արտածման բոլոր տողերի երկարությունների գումարին: Φ-արտածման քայլերի քանակը /**t-բարդություն/**, հենասույթների և արտածման կանոնի կիրառումների քանակն է:

Դիցուք ունենք Φ-արտածման համակարգը և φ նույնաբանությունը: $t_{\varphi}^{\Phi}(l_{\varphi}^{\Phi})$-ով կնշանակենք Φ համակարգում φ-ի բոլոր արտածումների t-բարդությունների (l-բարդությունների) **փոքրագույն արժեքը**:

---

[2] Y. Filmus, M. Lauria, J. Nordstrom, N. Thapen, N. Ron-Zewi, Space Complexity in Polynomial Calculus, 2012 IEEE Conference on Computational Complexity (CCC), 334-344, 2012

Ատենախոսությունում դիտարկվելու են տարբեր համակարգերում արտածումների բարդության բնութագրիչների վերին և ստորին գնահատականներ, որոնց համար կօգտագործենք հետևյալ ընդունված նշանակումները՝
եթե $\exists c_1 \exists k_1,\ \forall x > k_1,\ |f(x)| \geq c_1|g(x)|$, ապա կգրենք $f(x) = \Omega(g(x))$,
եթե $\exists c_2 \exists k_2,\ \forall x > k_2,\ |f(x)| \leq c_2|g(x)|$, ապա կգրենք $f(x) = O(g(x))$:
Այդ երկու պայմանների իրագործման դեպքում կգրենք $f(x) = \theta(g(x))$:

Սահմանում 1.1.2: Դիցուք M-ը նույնաբանությունների որևէ բազմություն է: M բազմության Φ-արտածումները կանվանենք t-բազմանդամորեն (l-բազմանդամորեն) սահմանափակ, եթե գոյություն ունի $p()$ բազմանդամ այնպիսին, որ $t_\varphi^\Phi \leq p(|\varphi|)$ ($l_\varphi^\Phi \leq p(|\varphi|)$) ցանկացած φ-ի համար M-ից:

Այս տերմիններով Cook-ի և Reckhow-ի վերոհիշյալ պնդումը հետևյալն է՝ $NP = coNP$ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի դասական ասույթային հաշվի l-բազմանդամորեն սահմանափակ համակարգ:

1.2. Արտածման համակարգերի համեմատումը

Հաջորդ գլուխներում տրվելու են այն արտածման համակարգերի սահմանումները, որոնք այդ գլխում համեմատվելու են ըստ արտածումների բարդության բնութագրիչների: Հետևելով Cook-ի և Reckhow-ի վերոհիշյալ հոդվածի տանք համեմատման համար ներմուծված հետևյալ գաղափարների սահմանումները:

Դիցուք տրված են Φ_1 և Φ_2 արտածման համակարգերը:

Սահմանում 1.2.1: Կասենք Φ_1 համակարգը $p\text{–}t$-հանգեցվում է ($p-l$-հանգեցվում է) Φ_2-ին, եթե գոյություն ունի այնպիսի $\mathrm{p}()$ բազմանդամ, որ և Φ_1-ում, և Φ_2-ում արտածելի յուրաքանչյուր φ բանաձևի համար $t_\varphi^{\Phi_2} \leq p\left(t_\varphi^{\Phi_1}\right)$ ($l_\varphi^{\Phi_2} \leq p\left(l_\varphi^{\Phi_1}\right)$):

Սահմանում 1.2.2: Φ_1 և Φ_2 համակարգերը $p\text{–}t$-համարժեք են ($p-l$-համարժեք են), եթե Φ_1-ը $p\text{–}t$-հանգեցվում է ($p-l$-հանգեցվում է) Φ_2-ին և Φ_2-ը $p\text{–}t$-հանգեցվում է ($p-l$-հանգեցվում է) Φ_1-ին:

Սահմանում 1.2.3: Եթե Φ_1 համակարգը $p\text{–}l$-հանգեցվում է ($p-t$-հանգեցվում է) Φ_2-ին և գոյություն ունի φ_n բանաձևերի այնպիսի հաջորդականություն, որ բավական մեծ n-երի համար գործում է $l_{\varphi_n}^{\Phi_1} = \Omega(2^{l_{\varphi_n}^{\Phi_2}})$ ($t_{\varphi_n}^{\Phi_1} = \Omega(2^{t_{\varphi_n}^{\Phi_2}})$), ապա կասենք, որ Φ_2 համակարգն ունի ցուցչային *l-արագացում (t-արագացում)* Φ_1 համակարգի նկատմամբ:

2-րդ գլխում ապացուցված է ասույթային հաշվի ծավալիչների ավելացմամբ սեկվենցիալ համակարգի և մի շարք այլ համակարգերի գծային արտածումների բազմանդամային համարժեքությունը ըստ արտածումների երկու բնութագրիչների:

Հարկ է նշել, որ այս փաստը որպես **բաց խնդիր** նշված է Alasdair Urquhart[3]-ի հոդվածում:

2.1. Դիտարկված համակարգերը

Նախ տանք այս գլխում հետազոտված դասական ասույթային հաշվի համակարգերի սահմանումները:

Սեկվենցիալ համակարգեր

PK ասույթային հաշվի սեկվենցիալ համակարգը առաջարկվել է G. Gentzen-ի[4] կողմից: **PK** համակարգում արտածման ամեն տող սեկվենտ է, որն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$A_1, \dots, A_n \to B_1, \dots, B_m$$

որտեղ $A_1, \dots, A_n$ և $B_1, \dots, B_m$ բանաձևերի հաջորդականություններ են:

PK համակարգի հենասույթն է $A \to A$ սեկվենտը, որտեղ A-ն կամայական ասույթային բանաձև է:

A, B ասույթային բանաձևերի և Γ, Δ բանաձևերի հաջորդականությունների համար արտածման կանոնները հետևյալն են՝

- Տրամաբանական կանոններ՝

$$\supset\to \frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \supset B, \quad \Gamma \to \Delta}; \qquad \to\supset \frac{A, \Gamma \to B, \Delta}{\Gamma \to A \supset B, \Delta};$$

$$\vee\to \frac{A, \Gamma \to \Delta \text{ և } B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta}; \qquad \to\vee \frac{\Gamma \to A, \Delta \text{ կամ } \Gamma \to B, \Delta}{\Gamma \to A \vee B, \Delta};$$

$$\&\to \frac{A, \Gamma \to \Delta \text{ կամ } B, \Gamma \to \Delta}{A\&B, \Gamma \to \Delta}; \qquad \to\& \frac{\Gamma \to A, \Delta \text{ և } \Gamma \to B, \Delta}{\Gamma \to A\&B, \Delta};$$

$$\neg\to \frac{\Gamma \to A, \Delta}{\neg A, \Gamma \to \Delta}; \qquad \to\neg \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \neg A, \Delta},$$

որտեղ $A \supset B$, $A \vee B$, $A\&B$, $\neg A$ հանդիսանում են սեկվենտի գլխավոր բանաձևեր:

- Կառուցվածքային կանոններ՝

---

[3] Alasdair Urquhart, Proof Theory, Chapter 3, Boolean Models and Methods in Mathematics, Computer Science, and Engineering, Cambridge University Press, pp. 79-98, 2010

[4] G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Mathematische Annalen, vol. 112, pp. 493-565, 1936

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma' \to \Delta'}$$

որտեղ $\Gamma \subseteq \Gamma'$ և $\Delta \subseteq \Delta'$:

- Հատույթի կանոնը՝

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}:$$

Առանց հատույթի կանոնի **PK** արտածման համակարգը կնշանակենք **PK⁻**:

SPK արտածման համակարգը ստացվում է **PK** համակարգին ավելացնելով տեղադրման կանոնը՝

$$S_p^{\mathrm{B}} \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A(p)}{\Gamma \to \Delta, A(B)},$$

որտեղ p փոփոխականի բոլոր մուտքերը փոխարինվում են B բանաձևով, ինչպես նաև p փոփոխականը չի մասնակցում Γ-ում և Δ-ում:

QPK արտածման համակարգում ներմուծված են ծավալիչներ ըստ ասույթային փոփոխականների և **PK** համակարգին ավելացվում են ծավալիչների արտածման կանոնները՝

$$\exists\to \frac{A(q), \Gamma \to \Delta}{(\exists p)A(p), \Gamma \to \Delta}; \qquad \to\exists \frac{\Gamma \to \Delta, A(B)}{\Gamma \to \Delta, (\exists p)A(p)};$$

$$\forall\to \frac{A(B), \Gamma \to \Delta}{(\forall p)A(p), \Gamma \to \Delta}; \qquad \to\forall \frac{\Gamma \to \Delta, \mathrm{A}(q)}{\Gamma \to \Delta, (\forall p)A(p)},$$

որտեղ B-ն ցանկացած ասույթային բանաձև է: Նաև գործում են հետևյալ պայմանները՝ $\to\exists$ և $\to\forall$ կանոնների ներքևում p փոփոխականը չպետք է լինի ազատ, և p փոփոխականի բոլոր մուտքերը $A(p)$-ում պետք է փոխարինվեն q փոփոխականով, իսկ $\to\exists$ և $\forall\to$ կանոններում B բանաձևը չպետք է պարունակի փոփոխականներ, որոնք գտվում են ինչ-որ ծավալիչի ազդեցության տիրույթում:

PMon արտածման համակարգի սեկվենտներում օգտագործվում են միայն մոնոտոն տրամաբանական ֆունկցիաները, հետևաբար $\supset\to$, $\to\supset$, $\neg\to$ և $\to\neg$ արտածման կանոնները կիրառելի չեն այս համակարգում:

Ֆրեգեի համակարգեր

Ֆրեգեի **F** համակարգերում օգտագործվում են հաշվելի թվով տրամաբանական փոփոխականներ և որոշակի տրամաբանական գործողությունների վերջավոր, ֆունկցիոնալ լրիվ համակարգ: Բանաձևերը սահմանվում են ընդունված եղանակով՝ տրամաբանական փոփոխականներից, տրամաբանական գործողություններից և փակագծերից: Արտածման կանոնները տրվում են հետևյալ սխեմայով՝ $\frac{A_1, A_2 \dots, A_n}{B}$, որտեղ $A_1, A_2 \ldots A_n$-ը և B-ն բանաձևեր են (առանց նախադրյալներ՝ $n = 0$ դեպքում, արտածման կանոնները հենասույթների սխեմաներ են)։ Ֆրեգեի համակարգերը անհակասելի են և լրիվ, ինչը նշանակում է, որ ցանկացած $\frac{A_1, A_2 \ldots, A_n}{B}$ արտածման կանոնի համար, եթե $A_1, A_2 \ldots A_n$ բանաձևերը փոփոխականների արժեքների որևէ հավաքածուի վրա ընդունում են «ճիշտ» արժեքը, ապա B-ն այդ հավաքածուի վրա նույնպես ընդունում են «ճիշտ» արժեքը, և **F** համակարգն արտածում է ցանկացած նույնաբանություն։

SF արտածման համակարգը ստացվում է Ֆրեգեի համակարգին ավելացնելով տեղադրման կանոնը՝ $\frac{A(p)}{A(B)}$, որտեղ p փոփոխականի բոլոր մուտքերը փոխարինվում են B բանաձևով։

2.2. Արտածման բարդությունների հարաբերությունները դիտարկված համակարգերում

Բանաձևերի մեկ ընտանիքի համար Ա. Կարբոնեի[5] կողմից համեմատված են **ծառատիպ** արտածումների քայլերի քանակը հիշատակված համակարգերում և հայտնաբերված է **QPK** համակարգի գերակայությունը։ Ապացուցված է, որ այն ունի $\boldsymbol{t}$ **–ցուցչային** արագացում **SF**, **SPK** և **PK** համակարգերի նկատմամբ, իսկ վերջինները, իրենց հերթին, ունեն t –ցուցչային արագացում **PK⁻** համակարգի նկատմամբ։ Այս արդյունքը առիթ հանդիսացավ **QPK** համակարգի հանդեպ հետազոտումների բուռն հետաքրքրությունների համար։ Կարբոնեն դիտարկել է F_n՝ $\rightarrow p \supset p^{2^n}$ սեկվենտների հաջորդականությունը, որտեղ p ասույթային փոփոխականի համար p^m բանաձևը մակածման եղանակով սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $p^0 \equiv p$ և $p^{i+1} \equiv (p^i \& p^i)$ կամայական $i \geq 1$ համար։

[3] աշխատությունում այդ նույն համակարգերի և բանաձևերի ընտանիքի համար ստացվել են **գծային** արտածումների քայլերի բոլորովին այլ հարաբերություններ՝

Թեորեմ 2.2.1: Եթե բավարար մեծ n-ի համար F_n-ը հանդիսանում է $\rightarrow p \supset p^{2^n}$ սեկվենտը, ապա

1. Գոյություն ունի F_n սեկվենտի գծային արտածում $O(n)$ քայլերով **QPK** համակարգում,
2. Գոյություն ունի F_n սեկվենտի գծային արտածում $O(n)$ քայլերով **SPK** համակարգում,

[5] A. Carbone, Quantified propositional logic and the number of lines of tree-like proofs, Studia Logica, vol. 64, pp. 315-321, 2000

3. F_n սեկվենտի գծային արտածման քայլերի քանակը **PK** համակարգում $\theta(2^n)$ է,
4. F_n սեկվենտի գծային արտածման քայլերի քանակը **PK¯** համակարգում $\theta(2^n)$ է:

Այսպիսով, պարզվել է, որ գծային արտածումների դեպքում F_n սեկվենտների համար **QPK** համակարգը չունի որևէ առավելություն **SPK** համակարգի նկատմամբ, ինչպես նաև **PK** համակարգը չունի առավելություն **PK¯** համակարգի նկատմամբ, որն իր հերթին չունի առավելություն առավել թույլ, մոնոտոն **PMon** համակարգի նկատմամբ: Ապացուցված է նաև ստացված արդյունքների իսկությունը բանաձևերի որոշ այլ ընտանիքների, ինչպես նաև այլ համակարգերի համար:

Այնուհետև, [4] և [5] աշխատություններում առավել խորը ուսումնասիրությունների արդյունքում ապացուցված է, որ գծային արտածումների դեպքում **QPK** արտածման համակարգը չունի որևէ էական առավելություն **SPK** և **SF** համակարգերի նկատմամբ:

Թեորեմ 2.2.2: **QPK** համակարգում առանց ծավալիչների յուրաքանչյուր նույնաբանության n քայլերի քանակ ունեցող գծային արտածման համար գոյություն ունի այդ նույնաբանության գծային արտածում **SPK** համակարգում, որի քայլերի քանակը $O(n^2)$ է:

Թեորեմ 2.2.3: **QPK** համակարգում առանց ծավալիչների յուրաքանչյուր նույնաբանության s երկարություն ունեցող գծային արտածման համար գոյություն ունի այդ նույնաբանության գծային արտածում **SPK** համակարգում, որի երկարությունը $O(s^5)$ է:

Հետևանք: Քանի որ **SPK** և **SF** համակարգերը բազմանդամորեն համարժեք են, ապա **QPK** համակարգում ցանկացած առանց ծավալիչների նույնաբանության գծային արտածում կարելի է ձևափոխել **SF** համակարգում գծային արտածման այնպես, որի քայլերի քանակը և երկարությունն ունենան ամենաշատը բազմանդամային աճ:

Այսպիսով, Urquhart-ի վերոհիշյալ հոդվածում նշված բաց խնդիրը լուծվել է:

3-րդ գլխում կառուցված են արտածման որոշ նոր համակարգեր, ուսումնասիրված են դրանց հատկությունները, ինչպես նաև հարաբերությունները այլ հայտնի արտածման համակարգերի հետ:

Այս գլխում ուսումնասիրված համակարգերի համար հայտնի են արտածումների բարդությունների ստորին ցուցչային գնահատականներ, հետևաբար դրանք չեն կարող հավակնել սուպեր լինելու, սակայն իրենց թե՛ հենասույթների, թե՛ արտածման կանոնների պարզության շնորհիվ ունեն լայն կիրառություններ թեորեմների ապացույցների ավտոմատացման գործընթացներում:

3.1. Դիտարկված հայտնի համակարգերը

Նախ տանք այս գլխում ուսումնասիրված հայտնի համակարգերի սահմանումները, ապա նոր համակարգերի սահմանումները և դրանց հարաբերությունների ուսումնասիրության արդյունքները:

Որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարը

Այստեղ տրվում է **որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարը**, որն առաջին անգամ ներկայացվել է Ա. Չուբարյանի[6] աշխատության մեջ: Հետևելով այդ աշխատությանը, նախ և առաջ տանք հետևյալ սահմանումները.

Սահմանում 3.1.1: Ասույթային հաշվի յուրաքանչյուր ψ բանաձևի համար հետևյալ տարրական ձևափոխումներից յուրաքանչյուրը կանվանենք **փոխարինման-կանոն՝**

$$0\&\psi = 0; \quad \psi\&0 = 0; \quad 1\&\psi = \psi; \quad \psi\&1 = \psi; \quad \psi\&\neg\psi = 0; \quad \neg\psi\&\psi = 0; \quad \psi\&\psi = \psi;$$
$$0 \vee \psi = \psi; \quad \psi \vee 0 = \psi; \quad 1 \vee \psi = 1; \quad \psi \vee 1 = 1; \quad \psi \vee \neg\psi = 1; \quad \neg\psi \vee \psi = 1; \quad \psi \vee \psi = \psi;$$
$$0 \supset \psi = 1; \quad \psi \supset 0 = \neg\psi; \quad 1 \supset \psi = \psi; \quad \psi \supset 1 = 1; \quad \psi \supset \neg\psi = \neg\psi; \quad \neg\psi \supset \psi = \psi; \quad \psi \supset \psi = 1;$$
$$\neg 0 = 1; \qquad \neg 1 = 0; \qquad \neg\neg\psi = \psi.$$

Փոխարինման-կանոնի կիրառման արդյունքում կանոնի ձախ մասի տեսքն ունեցող ցանկացած ենթաբանաձև կարող է փոխարինվել աջ մասի տեսքն ունեցող համապատասխան ենթաբանաձևով:

Դիցուք φ-ն ասույթային հաշվի որևէ բանաձև է, իսկ $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ բազմությունը այդ բանաձևի փոփոխականների բազմությունը: $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\}$-ով $(1 \le m \le n)$ նշանակենք P–ի որևէ ենթաբազմություն:

Փոփոխականները և դրանց ժխտումները կանվանենք լիտերալներ: K կոնյունկտը իրենից ներկայացնում է լիտերալների բազմություն (կոնյունկտը չի կարող պարունակել փոփոխականը և այդ փոփոխականի ժխտումը միաժամանակ):

Սահմանում 3.1.2: Տրված $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \in E^n$-ի համար $K^\sigma = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\}$ կոնյունկտը կանվանենք φ-1-որոշիչ (φ-0-որոշիչ), եթե ամեն p_{i_j}-ին $\sigma_j (1 \le j \le m)$ վերագրելուց հետո, կիրառելով փոխարինման կանոնները, կստանանք φ-ի արժեքը 1 (0) անկախ մնացած փոփոխականների արժեքներից:

φ-1-որոշիչ կոնյունկտը և φ-0-որոշիչ կոնյունկտը կանվանենք φ-որոշիչ կամ որոշիչ φ-ի համար:

[6] A. Chubaryan, Relative efficiency of proof systems in classical propositional logic, Izv. NAN Armenii Mat. and Yournal of CMA(AAS), vol. 37, no 5, pp. 71-84, 2002

Սահմանում 3.1.3: $D=\{K_1,K_2,\ldots,K_l\}$ ԴՆՁ-ն կանվանենք որոշիչ ԴՆՁ (ոԴՆՁ) φ-ի համար, եթե D-ն ու φ-ն հավասար են և ցանկացած K_j կոնյունկտ $(1\leq j\leq l)$ 1-որոշիչ է φ-ի համար:

E արտածման համակարգ կրճատման կանոնով

Այս համակարգը սահմանված է Ա.Չուբարյանի վերոհիշյալ հոդվածում: **E** համակարգի հենասույթները ֆիքսված չեն, բայց ցանկացած φ բանաձևի համար նրա որևէ ոԴՆՁ-ի յուրաքանչյուր կոնյունկտ կարող է դիտարկվել որպես հենասույթ:

Միակ արտածման կանոնը կրճատման կանոնն է (**ε**-կանոն)՝ $\frac{K_1\cup\{p\}\quad K_2\cup\{\bar{p}\}}{K_1\cup K_2}$, որտեղ K_1-ը և K_2-ը կոնյունկտներ են, իսկ p–ն՝ փոփոխական:

E-ում արտածում հանդիսանում է կոնյունկտների վերջավոր հաջորդականությունը, եթե կամայական կոնյունկտ կամ հենասույթ է, կամ ստացվել է հաջորդականության նախորդ կոնյունկտներից ε-կանոնով:

Ակնհայտ է, որ $D=\{K_1,K_2,\ldots,K_l\}$ ԴՆՁ-ն նույնաբանություն է, եթե $\{K_1,K_2,\ldots,K_l\}$ հենասույթներից կարելի է արտածել դատարկ կոնյունկտը ($\emptyset$) ε-կանոնով:

E համակարգում ներմուծենք տեղադրման կանոնը կոնյունկտների $\mathfrak{C}$ բազմության համար հետևյալ կերպ՝ $\frac{\mathfrak{C}}{S(\mathfrak{C})_p^A}$, որտեղ $S(\mathfrak{C})_p^A$-ով նշանակում ենք $\mathfrak{C}$ բազմության կոնյունկտներում p ասույթային փոփոխականի բոլոր մուտքերի փոխարինումը A բանաձևով: A բանաձևի համար **ընդհանրացված կրճատման ε-կանոն** կսահմանենք հետևյալը՝ $\frac{K_1\cup\{A\}\quad K_2\cup\{\bar{A}\}}{K_1\cup K_2}$, որտեղ A-ն լիտերալ է կամ տեղադրվող բանաձևը: **E** համակարգը տեղադրման կանոնի և ընդհանրացված կրճատման կանոնի ավելացմամբ կանվանենք **SE** համակարգ: Եթե տեղադրման կանոնում A բանաձևի համար առկա է սահմանափակում, ըստ որի նրանում առկա տրամաբանական գործողությունների մուտքերի քանակը մեծ չէ $\boldsymbol{k}$-ից, ապա այդպիսի **E** համակարգը կնշանակենք **S$_k$E**-ով:

Ռեզոլյուցիոն R համակարգ

Ռեզոլյուցիոն R համակարգը արտածում է φ բանաձևը նրա ժխտման կոնյունկտիվ նորմալ ձևի (ԿՆՁ) հերքման մեթոդով: Ֆորմալ սահմանմամբ՝ ԿՆՁ բանաձև կանվանենք $K=\{D_1,D_2,\ldots,D_s\}$ դիզյունկտների հավաքածուն, որտեղ որպես դիզյունկտ դիտարկվում է լիտերալների հավաքածուն: R համակարգում հենասույթները ֆիքսված չեն: Որոշակի $K=\{D_1,D_2,\ldots,D_s\}$ ԿՆՁ-ի համար յուրաքանչյուր D_i դիզյունկտ կարող է համարվել հենասույթ: Ռեզոլյուցիոն համակարգի միակ արտածման կանոնը հետևյալն է՝ $\frac{D_1\cup\{p\}\quad D_2\cup\{\bar{p}\}}{D_1\cup D_2}$, որտեղ D_1 և D_2 դիզյունկտներ են, իսկ p-ն՝ փոփոխական:

$K = \{D_1, D_2, \ldots, D_s\}$ ԿՆՁ-ն կոչվում է հերքվող այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի դատարկ դիզյունկտի արտածում $\{D_1, D_2, \ldots, D_s\}$ հենասույթներից: Այսպիսով, յուրաքանչյուր բանաձևի ժխտմանը որոշակի եղանակով համապատասխանեցվում է $K = \{D_1, D_2, \ldots, D_s\}$ ԿՆՁ, որի հերքելիությունը համարժեք է տրված բանաձևի նույնաբանություն հանդիսանալուն:

SE և **S$_k$E** համակարգերի նման կսահմանենք ընդհանրացված ռեզոլյուցիոն կանոնով **SR** և **S$_k$R** համակարգերը համապատասխանաբար տեղադրման կանոնով և սահմանափակ տեղադրման կանոնով:

N. Arai[7] աշխատության համաձայն սահմանենք **PK^k** համակարգը, որը հանդիսանում է հատույթի կանոնով **PK** համակարգը, որտեղ հատույթի բանաձևում տրամաբանական գործողությունների մուտքերի քանակը մեծ չէ $\boldsymbol{k}$-ից:

3.2. Նոր կառուցված համակարգերը և դրանց հատկությունները

Հիմնվելով Ցեյտինի[8] հոդվածում սահմանված հայտնի ձևափոխության վրա [6,7] աշխատություններում, կամայական φ բանաձևի համար կառուցվել է նրա **լոկալ** որոշիչ սեկվենտների համակարգը՝ նախ ամեն ոչ տարրական ենթաբանաձևին համապատասխանեցվում է նոր փոփոխական այնպես, որ իր ժխտմանը կհամապատասխանեցվի այդ փոփոխականի ժխտումը, ապա որոշիչ սեկվենտների համակարգը կկառուցվեն հետևյալ եղանակով՝

1. Եթե $B \vee C$, B, C ենթաբանաձևերին համապատասխանեցված են α, β, γ փոփոխականները, ապա սեկվենտների համակարգը կլինի $\{\beta \to \alpha;\ \gamma \to \alpha;\ \bar{\beta}, \bar{\gamma} \to \bar{\alpha}\}$:
2. Եթե $B \& C$, B, C ենթաբանաձևերին համապատասխանեցված են α, β, γ փոփոխականները, ապա սեկվենտների համակարգը կլինի $\{\bar{\beta} \to \bar{\alpha};\ \bar{\gamma} \to \bar{\alpha};\ \beta, \gamma \to \alpha\}$:
3. Եթե $B \supset C$, B, C ենթաբանաձևերին համապատասխանեցված են α, β, γ փոփոխականները, ապա սեկվենտների համակարգը կլինի $\{\bar{\beta} \to \alpha;\ \gamma \to \alpha;\ \beta, \bar{\gamma} \to \bar{\alpha}\}$:

DS համակարգի հենասույթները ֆիքսված չեն, սակայն ցանկացած φ բանաձևի համար վերևում նկարագրված որոշիչ սեկվենտները կարող են ծառայել հենասույթներ:

Արտածման կանոններն են՝

---

[7] N. Arai, A proper hierarchy of propositional sequent calculi, Theoretical Science, vol. 159, pp. 343-354, 1996
[8] G. Tseytin, On the complexity of derivation in propositional logic, Studies in Constructive Mathematics and Mathematical Logic, vol. 2, pp. 115-125, 1968

$$\text{Հատույթի կանոն:}\ \frac{\Gamma \to p \quad p \to \Delta}{\Gamma \to \Delta};$$

$$\neg\to\ \frac{\Gamma \to \Delta, p}{\bar{p}, \Gamma \to \Delta}; \qquad\qquad \to\neg\ \frac{p, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \bar{p}},$$

որտեղ p-ն լիտերալ է, և եթե այն որևէ փոփոխականի ժխտումն է, ապա $\bar{p}$-ն է փոփոխական: Նկատենք, որ **DS** համակարգը կարող է օգտագործել վերջին երկու կանոններից միայն մեկը:

Եթե φ բանաձևին համապատասխանեցված է s փոփոխականը, ապա $\to s$ սեկվենտը կարտածվի **DS**-ում այն և միայն այն դեպում, երբ φ-ն նույնաբանություն է:

Ատենախոսությունում ապացուցված են՝

Թեորեմ 3.2.1: DS համակարգը p-համարժեք է **R** համակարգին:

Թեորեմ 3.2.2: DS համակարգը $p-l$-համարժեք է **E** համակարգին:

Այսպիսով, ապացուցվել է, որ որոշիչ ԴՆՁ-ների վրա հիմնված և լոկալ որոշիչ սեկվենտների վրա հիմնված համակարգերը համարժեք են, հետևաբար որոշիչ կոնյունկտը ըստ էության, հանդիսանում է Ցեյտինյան հայտնի ձևափոխությամբ սահմանված ենթաբանաձևերի լոկալ որոշիչների ընդհանրացումը ողջ բանաձևի համար:

Յիմնվելով նախկինում ստացված որոշ հայտնի արդյունքների վրա, ստացվել են հետևյալ պնդումները՝

Պնդում 3.2.1: DS համակարգը $p-l$-համարժեք է **PK^{-}** համակարգին:

Պնդում 3.2.2: Ցանկացած $k \geq 0$ համար **S$_k$DS** համակարգը $p-l$-համարժեք է **PK^k** համակարգին:

Պնդում 3.2.3: Ցանկացած $k \geq 0$ համար **S$_{k+1}$DS** համակարգն ունի ցուցչային l-արագացում **S$_k$DS** համակարգի նկատմամբ ծառատիպ արտածումների համար:

Պնդում 3.2.4: SDS համակարգը $p-l$-համարժեք է **PK** համակարգին:

Պնդում 3.2.5: SDS համակարգը $p-l$-համարժեք է Ֆրեգեի համակարգերին:

3.3. Մոդալ տրամաբանության նոր համակարգը

Կրճատման կանոնով և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի հիման վրա **E** տիպի համակարգեր արդեն կառուցված են դասական, ինտուիցիոնիստական, մինիմալ և բազմարժեք տրամաբանությունների համար: Այս համակարգերը կապված են ռեզոլյուցիոն համակարգերի հետ, սակայն նշված համակարգերի նախապատվությունը կայանում է նրանում, որ շատ նույնաբանությունների դասերի արտածման բարդությունների համար հեշտությամբ ստացվում է դրանց ստորին ցուցչային սահմանները:

Այս աշխատությունում սահմանվում է **E** արտածման համակարգը ասույթային մոդալ տրամաբանության համար[9]: Ընդհանրացված են նախկինում ոչ մոդալ տրամաբանությունների համար ներմուծված որոշիչ կոնյունկտի և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի, ինչպես նաև կրճատման կանոնի գաղափարները և դրանց հիման վրա կառուցված է **E**$_{\mathbf{mod}}$ արտածման համակարգը: Նույնաբանությունների որոշակի հաջորդականությունների համար հեշտորեն ստացված է ցուցչային կարգի ստորին գնահատական նկարագրված համակարգում արտածման նվազագույն քայլերի քանակի համար:

4-րդ գլխում ապացուցված է, որ նույնաբանությունների որոշակի հաջորդականության համար արտածումների երկարությունների ստորին գնահատականը սուպեր-քառակուսային է Ֆրեգեի յուրաքանչյուր համակարգում: Ֆրեգեի համակարգերում n երկարությամբ նույնաբանությունների համար հայտնի էին վերին ցուցչային գնահատականը և միայն $\Omega(n^2)$ ստորին գնահատականը արտածման երկարության համար ու $\Omega(n)$ ստորին գնահատականը արտածման քայլերի համար: Ան. Չուբարյանի, Արմ. Չուբարյանի և Ա. Ճիտոյանի[10] կողմից ստացվել էր սուպեր-գծային գնահատական արտածման քայլերի համար: Ատենախոսությունում արտածումների աջակողմյան հատվածության գաղափարը ընդհանրացվել է Ֆրեգեի յուրաքանչյուր համակարգի համար և որոշակի դասի նույնաբանությունների համար գնահատվել են արտածումների քայլերը, հիմնվելով «անկախ էական ենթաբանաձևերի» մուտքերի մաքսիմալ խորությունների գումարի մեծության վրա:

Դիտարկելով հետևյալ նույնաբանությունները $\varphi_n = TTM_{n,2^n-1}$, որտեղ

$$TTM_{n,m} = \vee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E^n} \&_{1\le j\le m} \vee_{1\le i\le n} p_{ij}^{\sigma_j} \quad (n \ge 1, 1 \le m \le 2^n - 1),$$

ապացուցվել է հետևյալ պնդումը՝

Թեորեմ 4.4: Ցանկացած Ֆրեգեի համակարգում նույնաբանությունների φ_n հաջորդականության համար արտածման երկարությունների ստորին սահմանը $\Omega(|\varphi_n|^3/\log_2{}^2(|\varphi_n|))$ է :

[9] Фейс Р., Модальная логика, Главная редакция физ-мат литературы изд-ва «Наука», М. 1974

[10] An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, A. Tshitoyan, On lower bounds for steps and sizes of proofs in Frege systems, In: Proceedings of CSIT-2015, Yerevan, 2015

Հիմնական արդյունքները և հետևությունները

Ատենախոսությունում ուսումնասիրված են տարբեր հայտնի և նոր կառուցված տրամաբանական համակարգերում արտածման բնութագրիչների հարաբերությունները: Մասնավորապես, ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

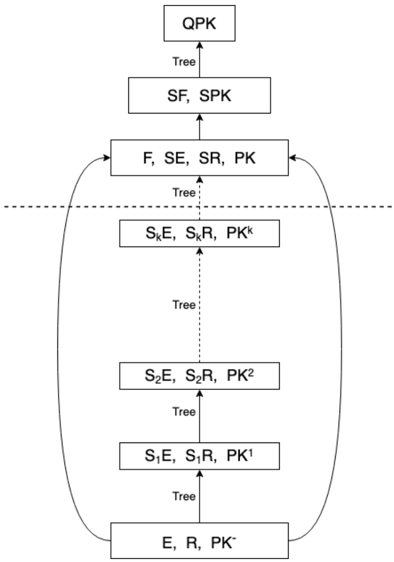
1. Առաջին անգամ ապացուցվել է, որ առավել կիրառվող գծային արտածումների դեպքում ասույթային հաշվի ծավալիչների ավելացմամբ սեկվենցիալ **QPK** արտածման համակարգը բազմանդամորեն համարժեք է **SPK** և **SF** համակարգերին և´ ըստ արտածման քայլերի, և´ ըստ արտածման երկարությունների:

2. Ցեյտինի հայտնի ձևափոխության հիման վրա կառուցված է դասական տրամաբանության լոկալ որոշիչ սեկվենցիալ **DS** արտածման համակարգը, ինչպես նաև սահմանված է տեղադրման կանոնով **SDS** և սահմանափակ տեղադրման կանոնով $\mathbf{S_kDS}$ արտածման համակարգերը և դրանք համեմատվել են մի շարք հայտնի ասույթային արտածման համակարգերի հետ, ինչի արդյունքում կատարվել է արտածման համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման որոշակի ճշգրտում: Ապացուցված է, որ **DS** համակարգը բազմանդամորեն համարժեք է ռեզոլյուցիոն համակարգին, **SDS** համակարգը բազմանդամորեն համարժեք է Ֆրեգեի համակարգերին, իսկ յուրաքանչյուր **k**-ի համար $\mathbf{S_{k+1}DS}$ համակարգերում ծառատիպ արտածումների քայլերի քանակը ցուցաբերում է ցուցչային արագացում $\mathbf{S_kDS}$ համակարգերում նույն բանաձևերի արտածումների համեմատությամբ: Ընդհանրացված են որոշիչ կոնյունկտի, որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի, ինչպես նաև կրճատման կանոնի գաղափարները մոդալ տրամաբանության համար և դրանց հիման վրա կառուցված է նոր $\mathbf{E_{mod}}$ արտածման համակարգը: Այս համակարգը հնարավորություն է տալիս նույնաբանությունների որոշակի հաջորդականությունների արտածման նվազագույն քայլերի քանակի համար հեշտորեն ստանալ ցուցչային կարգի ստորին գնահատական:

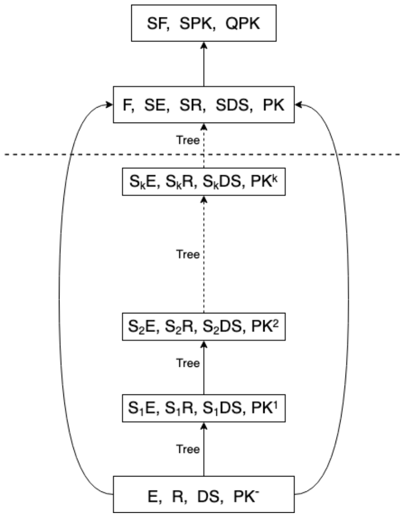
3. Ֆրեգեի բոլոր համակարգերի համար ստացված է արտածումների երկարությունների ստորին **սուպեր-քառակուսային** գնահատական: նույնաբանությունների որոշակի φ_n հաջորդականության համար արտածման երկարությունների ստորին սահմանը $\Omega(|\varphi_n|^3/\log_2{}^2(|\varphi_n|))$ է:

Առաջին և երկրորդ կետերի արդյունքները առավել տեսանելի են դասական տրամաբանության արտածման համակարգերի բաղդատման հետևյալ երկու մասնակի աղյուսակներում՝

Հայտնի աղյուսակը



Ճշգրտված աղյուսակը



Աղյուսակի կետագծերից վերև գտնվող համակարգերից ոչ մեկի համար ներկա պահին գտնված չէ այնպիսի նույնաբանություն, որն ունենա արտածման երկարության ստորին ցուցչային գնահատական:

Նույն վանդակում գտնվող համակարգերը $p-l$-համարժեք են, իսկ մի վանդակից մյուս վանդակը ձգվող սլաքը ցույց է տալիս, որ երկրորդ վանդակում գտնվող համակարգերն ունեն ցուցչային արագացում առաջինում գտնվող համակարգերի նկատմամբ: Եթե սլաքի կողքին գրված է «Tree», ապա առկա է ցուցչային արագացում ծառատիպ արտածումների երկարությունների համար, հակառակ դեպքում ցուցչային արագացումը վերաբերում է գծային արտածումներին:

F, **SE**, **SR, SDS, PK** համակարգերը պարունակող վանդակից ներքև գտնվող սլաքները ցույց են տալիս ցուցչային l-արագացում **ծառատիպ** արտածումների համար: Այդ վանդակից **SF**, **SPK** համակարգերը պարունակող վանդակ ձգվող սլաքը ցույց է տալիս ցուցչային t-արագացում **գծային** արտածումների համար: Ձախ աղյուսակում **SF**, **SPK** և **QPK** համակարգերը պարունակող վանդակների միջև գտնվող սլաքը նշանակում է, որ առկա է ցուցչային t-արագացում **ծառատիպ** արտածումների համար, իսկ երկրորդ աղյուսակում այդ համակարգերը գտնվում են միևնույն վանդակում, քանի որ համաձայն ատենախոսությունում ստացված արդյունքների այդ համակարգերը և՛ $p-l$-համարժեք են, և՛ $p-t$-համարժեք են ըստ **գծային** արտածումների:

Թեզի շրջանակներում տպագրված աշխատությունները՝

[1] A. A. Chubaryan, H. A. Tamazyan, On Lower Bounds for Proofs Sizes in Frege Systems, ՀՀ ԳԱԱ Զեկույցներ, vol. 119(2), pp. 116-121, 2019.

[2] A. A. Chubaryan, H. A. Tamazyan, A. S. Tshitoyan, Some improvement of lower bounds for steps and sizes of proofs in Frege systems, Sciences of Europe, vol. 1(37), pp. 39-44, 2019.

[3] А. А. Тамазян, А. А. Чубарян, Об отношениях сложностей выводов в ряде систем исчисления высказываний, Математические вопросы кибернетики и вычислстельной техники, vol. 54, pp. 138-146, 2020.

[4] H. A. Tamazyan, The Relationship Between the Proof Complexities of Linear Proofs in Quantified Sequent Calculus and Substitution Frege Systems, Mathematical Problems of Computer Science, vol. 59, pp. 27–34, 2023.

[5] Hakob Tamazyan, Comparison of proof complexities for linear proofs in quantified sequent calculus and substitution sequent calculus, Logic Colloquium 2023, ASL, Milan, Book of Abstracts, p.173, 2023.

[6] H. A. Tamazyan, A. A. Chubaryan, A Hierarchy of Determinative Sequent Systems with Different Substitution Rules, Proceedings of CSIT-2023, Yerevan, pp. 32-34, 2023.

[7] H. A. Tamazyan, A. A. Chubaryan, A Hierarchy of Determinative Sequent Systems with Different Substitution Rules, ISSN 1054-6618, Pattern Recognition and Image Analysis, Part I: “MATHEMATICAL LOGIC AND PATTERN RECOGNITION”, Vol. 34, No. 1, pp. 20–30, 2024.

[8] H. A. Tamazyan, Some New Proof System for Propositional Modal Logic, ՀՀ ԳԱԱ Զեկույցներ, vol. 124(1), pp. 7-12, 2024.

Investigation of Proof Complexities in Various Known and Newly Constructed Propositional Calculus Systems

Abstract

This dissertation studies the main complexity characteristics of proofs in both some known propositional systems of classical logic and a number of newly constructed systems, which made it possible to introduce a number of refinements into the well-known hierarchy of propositional systems. It explores the total size of formulas and the number of formulas in both linear proofs and tree-like proofs.

Propositional proof systems have long been considered significantly trivial objects for research, but in recent decades, due to a series of results obtained, the importance of research into the proof complexities specifically in propositional systems has surged dramatically. Interest in these problems is fueled by two directions: problems of automating theorem proving, one of the main problems of creating artificial intelligence, and one of the fundamental problems of computational complexity theory – the relationship between the known classes P and NP.

Cook and Reckhow in their aforementioned work proved that the existence of a propositional system that is polynomially bounded in the proof size is equivalent to the class NP coinciding with its complement. For many propositional systems ("weak" ones), examples of formulas with an exponential lower bound on the minimum size of proofs have been identified, i.e., they do not claim the status of systems for solving the named problem but for more traditional systems, particularly for Frege systems and even for systems with quantifiers, this question remains open, making the research of proof complexities in these systems very important. The research of proof complexities in "weak" systems is driven by other interests. One of them is associated with solving the SATISFIABILITY problem (SAT problem). Research on this problem is conducted, in particular, in Resolution and Cut-free Sequence systems, providing information on potentially necessary resources for solving the problem, hence research in these systems is also important. Given the relatively simple strategy for finding proofs in these systems, they are also very useful in automating proof.

The solutions to the aforementioned problems also have practical applications in fields such as Machine Learning, Cryptography, Hardware Design Formal Verification, Artificial Intelligence, Data Mining, etc., making these researches very relevant.

The main results of the dissertation are as follows:

1. For the first time, polynomial equivalence of the linear proofs of the quantified sequential propositional system **QPK** and the well-known systems **SPK** (sequential system with cut and substitution rules) and **SF** (Frege systems with substitution rule) has been proven, allowing for a refinement of the position of **QPK** system in the known hierarchy of propositional systems of classical logic.
2. Based on the well-known Tseytin transformation, a local determinative sequential system of classical logic **DS**, polynomially equivalent to the resolution system, as well as the **SDS** system (**DS** with substitution rule), polynomially equivalent to Frege systems, and **S$_k$DS** systems with substitution rule, where the number of logical connectives in the substituted formula is limited by the number $\boldsymbol{k}$, have been constructed. For the latter, an exponential speed-up of steps in tree-like proofs in **S$_{k+1}$DS** over the systems **S$_k$DS** systems has been established. Further, notions of determinative conjunct and determinative disjunctive normal, as well as the elimination rule, have been generalized for modal logic, based on which a new system for modal logic, **E$_{mod}$** has been constructed, in which lower exponential bounds of proof complexities for a series of formulas have been obtained.
3. For the proof sizes in any Frege system, a superquadratic lower bound has been obtained: for the proof sizes of a certain sequence of tautologies φ_n, $\Omega(|\varphi_n|^3/\log_2{}^2(|\varphi_n|))$ lower bound has been obtained.

Исследование Сложностей Выводов в Ряде Известных и Вновь Построенных Системах Исчисления Высказываний

Резюме

В настоящей диссертации исследованы основные сложностные характеристики выводов как в некоторых известных пропозициональных системах классической логики, так и в ряде вновь построенных системах, что позволило ввести ряд уточнений в известную иерархию пропозициональных систем. Исследованы суммарная длина формул и количество формул как в линейных выводах, так и в выводах в виде дерева.

Пропозициональные системы выводов долгое время пользовались репутацией существенно тривиальных объектов для исследований, однако за последние десятилетия в связи с рядом полученных результатов резко возросла значимость исследований сложностей выводов именно в пропозициональных системах. Интерес к этим задачам подогревается двумя направлениями: проблемами автоматизции доказательств теорем, одной из основных задач создания искусственного интеллекта, а также одной из фундаментальных проблем теории сложности вычислений – соотношением известных классов **P** и **NP**.

Cook и Reckhow в упомянутой выше работе доказали, что существование полиномиально ограниченной по длине выводов пропозициональной системы равнозначно совпадению класса **NP** со своим дополнением. Для многих пропозициональных систем («слабых») выявлены примеры формул с экспоненциальной нижней оценкой минимальной длины выводов, т.е. они не претендуют на статус систем для решения названной проблемы, но для более традиционных систем, в частности для систем Фреге и даже для систем с кванторами, этот вопрос пока открыт, следовательно исследования сложностей выводов именно в последних очень важны. Исследования сложностей выводов в «слабых» системах вызваны иными интересами. Один из них связан с решением проблемы ВЫПОЛНИМОСТИ (SAT problem). Исследования этой проблемы проводятся в частности в системах *Resolution, Cut-free Sequence,* что дает информацию о потенциально необходимых для решения проблемы ресурсах, а значит, исследования в этих системах также важны. В связи с относительно простой стратегией поиска выводов в названных системах, они весьма полезны также при автоматизации доказательств.

Решения вышеперечисленных проблем имеют также **практическое применение** в таких областях, как Machine Learning, Cryptography, Hardware Design

Formal Verification, Artificial Intelligence, Data Mining, и т.д., следовательно, эти исследования весьма актуальны.

Основные результаты диссертации следующие:

1. Впервые доказана полиномиальная эквивалентность линейных выводов квантифицированной секвенциальной пропозициальной системы **QPK** и известных систем **SPK** (секвенциальной системы с правилами сечения и подстановки) и **SF** (систем Фреге с правилом подстановки), что позволяет уточнить место системы **QPK** в известной иерархии пропозициональных систем классической логики.
2. На основе известной трансформации Цейтина постоена локально определяющая секвенциальная система классической логики **DS**, полиномиально эквивалентная системе резолюций, а также система **SDS (DS** с правилом подстановки**),** полиномиально эквивалентная системам Фреге, и системы **S_kDS** с правилом подстановки, где количество логических связок в подставляемой формуле ограничено числом $\boldsymbol{k}$**,** для которых в выводах в виде дерева установлено экспоненциальное ускорение шагов в системах **S_{k+1}DS** относительно систем **S_kDS.** Далее обобщены для модальной логики введённые ранее для классической логики понятия определяющего коньюнкта, определяющей дизьюнктивной нормальной формы и правила эллиминации, на основе которых построена новая система для модальной логики **E_{mod},** в которой для ряда формул получены нижние экспоненциальные оценки сложностей выводов**.**
3. Для длин выводов в произвольной ситеме Фреге получена суперквадратичная оценка: для длин выводов некоторой последовательности тавтологий φ_n получена оценка $\Omega(|\varphi_n|^3/\log_2{}^2(|\varphi_n|))$.