ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՄԻՔԱՅԵԼ ԱՐԹՈՒՐԻ ԽԱՉԱՏՈՒՐՅԱՆ

ՆԵՐԴՐՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՍՈԲՈԼԵՎԻ ՄՈՒԼՏԻԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա.01.02. - «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, մաթեմատիկական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

ԵՐԵՎԱՆ 2024

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХАЧАТУРЯН МИКАЕЛ АРТУРОВИЧ

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.02 - "Дифференциальные уравнения, математическая физика"

Ереван 2024

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայ-Ռուսական (Սլավոնական) Համալսարանի գիտական խորհրդի հ. 6 նիստում (20.11.2023թ):

<u>Գիտական ղեկավար`</u> - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Վ. Ն. Մարգարյան

<u>Պաշտոնական ընդդիմախոսներ`</u> - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Գ. Վ. Դեմիդենկո

- ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ա. Գ. Թումանյան

<u>Առաջատար կազմակերպություն</u> - Հայաստանի Հանրապետության Գիտությունների ազգային ակադեմիայի մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2024թ. հունիսի 13-ին ժամը 15:00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե` ք.Երևան, 3750025, փ. Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Ե Պ Հ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 02.05.2024թ.

050 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր` Կ. Լ. Ավետիսյան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета Российско-Армянского (Славянского) Университета (№ 6, 20.11.2023г).

<u>Научный руководитель</u> - доктор физ.-мат. наук, профессор В. Н. Маргарян

<u>Официальные оппоненты</u> - доктор физ.-мат. наук, профессор Г. В. Демиденко

- кандидат физ.-мат. наук А. Г. Туманян

<u>Ведущая организация</u> - Институт математики Национальной академии наук Республики Армения

Защита диссертации состоится 13-го июня 2024г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском государственном университете.

Адрес: г. Ереван, 3750025, ул. Алек Манкуяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрГУ.

Автореферат разослан 02.05.2024г.

Ученый секретарь
специализированного совета 050,
доктор физ.-мат. наук, профессор К. Л. Аветисян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Историческое развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными показало, что многие задачи в общем случае не имеют классического решения, то есть решения, тождественно удовлетворяющего уравнению и непрерывно дифференцируемого по всем частным производным до максимального порядка, входящего в уравнение. Это привело к понятию обобщённого решения дифференциальных уравнений в начале XX века, данное С.Л. Соболевым и Л. Шварцем. Понятия обобщённого решения и обобщенной производной, включающие в себе стандартные аналоги этих понятий как частный случай, значительно способствовали прогрессу теории, привели к развитию естественных наук и вычислительной математики. Важным и основополагающим шагом в этом направлении стала работа Соболева 1936 года (см. [1]), в которой из классов функций, позже названных пространствами Соболева, были введены обобщённые решения основных видов линейных уравнений в частных производных второго порядка, таких как волновое уравнение, уравнение Лапласа и уравнение теплопроводности. В современной математике пространства Соболева остаются центральным и естественным инструментом в теории уравнений с частными производными, позволяющий исследовать задачи с широким спектром правых частей и коэффициентов уравнений.

Впервые теоремы вложения для пространств Соболева были получены им же в 30-е годы прошлого столетия. Позднее эти результаты были изложены Соболевым в его монографии 1950 года (см. [2]). В дальнейшем теория вложения пространств типа Соболева сложилась как новое направление в математике, которое кроме эффективного применения в теории дифференциальных уравнений с частными производными, представляло также самостоятельный интерес с точки зрения теории функций. В своих исследованиях С. Л. Соболев изучил так называемое изотропное пространство $W_p^l(G)$, где l натуральное число а G область, удовлетворяющий условию конуса. Соболев получил теоремы вложения этих пространств в пространства $C(G)$, $L_q(G)$ $(q \geq p)$ а также теоремы о следах. Затем эти исследования были дополнены результатами В. И. Кондрашова и В. П. Ильина. Теоремы вложения важны в анализе дифференциальных уравнений для доказательства существования, единственности и регулярности их решений, а также помогают их изучению численными методами, обеспечивая теоретические основания для сходимости этих методов.

В дальнейшем активно продолжалось построение и исследование различных шкал пространств дифференцируемых функций типа Соболева, многие из которых тем или иным образом расширяли и обобщали классические изотропные пространства Соболева. Изучение анизотропных пространств Соболева $W_p^{\vec{l}}(G)$, где $\vec{l} = (l_1, \ldots, l_n)$, было начато Л. Н. Слободецким (см. [3, 4]) и развилось в работах различных авторов – О. В. Бесова, В. П. Ильина, П. И. Лизоркина, В. А. Солонникова, С. В. Успенского и других. Л. Н. Слободецким была построена при $p = 2$ полная теория анизотропных пространств Соболева $W_2^{\vec{l}}(\mathbb{R}^n)$ с целыми и дробными показателями дифференцируемости, содержащая прямые и обратные теоремы вложения, относящиеся к многообразиям меньшего числа измерений (теоремы о следах). П. И. Лизоркиным было замечено, что пространства Соболева-Слободецкого $W_p^{\vec{l}}(\mathbb{R}^n)$ при $p \neq 2$ и нецелом показателе дифференцирования не совпадают с пространствами функций, лиувиллевские дробные производные которых суммируемы в степени p, что означало не совсем подходящую их роль в качестве обобщения $W_p^{\vec{l}}(\mathbb{R}^n)$ на нецелые показатели дифференцирования. В связи с этим обстоятельством П. И. Лизоркиным рассмотрены пространства $L_p^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ (см. [5, 6]). Лизоркин показал, что пространства $L_p^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ полностью характеризуются бесселевым потенциалом функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$, изучение которых берет свое начало еще в работах Ароншайна и Кальдерона (см. [7, 8]). В работе [9] Гальярдо охарактеризовал при $1 \leq p < \infty$ следы функций из пространства Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ на $(n-1)$-мерных сечениях $\mathbb{R}^n$. О. В. Бесов с помощью методов аппроксимации построил теорию пространств $B_{p,\theta}^l(\mathbb{R}^n)$ (см. [10]), которые интересны тем, что они образуют замкнутую систему относительно теорем вложения. С другой стороны эти пространства имеют тесную связь с пространствами Соболева, совпадая при соответствующем выборе параметров с $W_2^{\vec{l}}(\mathbb{R}^n)$, а также с пространствами следов на $\mathbb{R}^m$ (где $m < n$) функций из $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$.

В 1950-х годах Л. Хёрмандер ввёл класс гипоэллиптических дифференциальных операторов, расширяющий классы эллиптических и полуэллиптических операторов. Оказалось, что характеристический многогранник $\mathfrak{N}$ этих операторов обладает более сложной структурой и может быть произвольным вполне правильным многогранником (см. [11]). В связи с этими особенностями стало актуальным исследование новых мультианизотропных пространств типа Соболева $W_p^{\mathfrak{N}}(G)$. Эти пространства обобщают анизотропные пространства Соболева и порождаются вполне правильным многогранником $\mathfrak{N}$. Впервые пространства такого типа изучались в работах С. М. Никольского, В. П. Михайлова, Г. Г. Казаряна. Г. Г. Казаряном впервые были рассмотрены вопросы полноты бесконечно дифференцируемых финитных функций в $W_p^{\mathfrak{N}}(G)$. Им же, используя геометрические характеристики вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$, изучались свойства гипоэллиптических операторов $P(D)$ с характеристическим многогранником $\mathfrak{N}$. Необходимость изучения мультианизотропных пространств и получения теорем вложения для них неоднократно подчёркивалась академиками С. М. Никольским и О. В. Бесовым. Долгое время решение этой задачи было затруднено из-за отсутствия удачного интегрального представления функций данного класса. В 2016 году Г. А. Карапетян впервые получил удачное интегральное представление для этих функций в работе [12]. В период с 2016 по 2019 годы Г. А. Карапетян опубликовал серию работ (см. [13 - 17]), в которых заложились основы и была продвинута теория вложения мультианизотропных пространств Соболева. В работе [18], следуя идеям работ [5, 6] П. И. Лизоркина, Г. А. Карапетяном введены мультианизотропные бесселевы потенциалы, а на основе их – мультианизотропные пространства Соболева дробного порядка, и доказаны теоремы вложения.

В серии работ Г. В. Демиденко (см. [19-24]) рассматривалась корректная разрешимость задачи Дирихле для эллиптических и полуэллиптических уравнений, где используя специальное интегральное представление, разработанное С. В. Успенским (см. [25]), строится приближенное решение задачи. После того, как Г. А. Карапетян получил интегральное представление функции, охватывающее все его частные производные по мультииндексам, являющимися вершинами заданного вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$, открылись новые перспективы для изучения гипоэллиптических уравнений с использованием аналогичных методов. В цикле работ Г. А. Карапетяна и Г. А. Петросян (см. [26-28]), применяя полученное интегральное представление, была исследована задача Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений как в полупространстве, так и во всем пространстве, получены условия корректной разрешимости этой задачи. Отметим также, что в работах [29-31] А. А. Дарбинян и А. Г. Туманян исследовали вопросы нётеровости регулярных полуэллиптических операторов (анализ конечномерности ядра и коядра этих операторов). В рамках этих работ также были установлены априорные оценки, и проведено исследование стабильности индекса полуэллиптических операторов в специальных анизотропных весовых пространствах Соболева. В работах [32, 33] А. Г. Туманян расширила эти результаты на гипоэллиптические операторы, изучая их в мультианизотропных весовых пространствах Соболева.

В 1951 году Л. Гординг описал класс дифференциальных операторов, для которых не характеристическая задача Коши $P(D)u = f$ имела единственное обобщенное решение, когда правая часть уравнения бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем (см. [34]). Такие операторы Гординг назвал гиперболическими. Их множество содержал гиперболические по Петровскому операторы. Вопрос описания более широких классов операторов, для которых задача Коши корректно разрешима, изучался многими авторами. Оказалось, что условия корректной разрешимости для более общих классов операторов, могут быть найдены в пространствах типа Жевре. Изучение дифференциальных операторов проводится в двойственном пространстве Жевре, которое обычно называется пространством ультрараспределений. В работе [35] Ларсоном введено понятие s-гиперболических операторов и соответствующие пространства Жевре, где они разрешимы. Вопросы корректной разрешимости задачи Коши в подходящих классах Жевре рассмотрены в работах С. Мизохаты, С. Л. Свенсона, О. Лиса, Л. Родино и Д. Кальво. Многие из этих результатов приведены в монографии [36] Л. Родино. В работах [37-39] В. Н. Маргаряном и Г. Г. Казаряном введены и изучены гиперболические с весом операторы. В этих работах введено понятие весовой функции гиперболичности, которое порождено вполне правильным многогранником $\mathfrak{N}$, исследованы свойства гиперболических с весом операторов и получены достаточные условия корректной разрешимости задачи Коши в соответствующих мультианизотропных пространствах Жевре.

Во многих вопросах анализа дифференциальных операторов с частными производными естественным образом возникает вопрос сравнения пары дифференциальных операторов. Это понятие наряду с понятием доминирования операторов приведено в монографии [40] Хёрмандера. С помощью этих концепций в той же монографии были получены эквивалентные условия гиперболичности по Гордингу для оператора P, главная часть P_m символа которого гиперболична по Гордингу. Эти условия сформулированы на основе сравнений P_m с младшими однородными частями символа оператора P. Аналогично, гиперболичность с весом, введённая Маргаряном и Казаряном, имеет эквивалентное определение на языке сравнения многочленов. Отметим, что сравнение дифференциальных операторов является важной, но сложной задачей в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Среди многочисленных других применений эти понятия используются в вопросах существования и гладкости решений дифференциальных уравнений, а также для нахождения априорных оценок. Вопросы такого характера, изначально связанные с изучением гипоэллиптических операторов, а затем как вопросы, представляющие самостоятельный интерес, были многократно изучены в работах Г. Г. Казаряна, а позднее В. Н. Маргаряна и Г. Г. Тонояна.

Данная диссертационная работа посвящена изучению мультианизотропных пространств Соболева $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$. В рамках исследования были получены теоремы вложения разных метрик и разных измерений для этих пространств. Также были рассмотрены вопросы, связанные сравнением с мультианизотропным весом дифференциальных операторов. Полученные результаты применены в исследовании гипоэллиптических и гиперболических операторов. Классы этих операторов актуальны как в математике так и в естественных науках.

Исходя из вышеизложенных фактов можно считать, что тематика диссертационной работы является весьма актуальной.

Цель работы. Основной целью настоящей диссертации является:

- Получение новых теорем вложения разных метрик для мультианизотропного пространства Соболева $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$.

- Получение прямых и обратных теорем вложения разных размерностей (теоремы о следах) для функций из мультианизотропного пространства Соболева $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ для определенного класса вполне правильных многогранников $\mathfrak{N}$.

- Изучение задачи Дирихле $P(D_x, D_{x_3})u = f(x, x_3)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $x_3 > 0$ с неоднородными граничными условиями $D_{x_3}^s\big|_{x_3=0} = \varphi_s(x)$ $(s = 0, \cdots, m-1)$, где $f \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $P(D_x, D_{x_3})$ – мультианизотропный регулярный оператор специального вида с вполне правильным характеристическим многогранником $\mathfrak{N}$.

- Нахождение достаточных условий на языке кратности нулей подмногочленов, при которых многочлен P от двух переменных является $h_{\mathfrak{N}}$-гиперболическим, когда его главная часть гиперболична по Гордингу, где $\mathfrak{N}$ заданный вполне правильный многогранник.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы метод интегральных представлений функций, метод мультипликаторов Фурье, различные методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, обоснованы строгими математическими доказательствами.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический и практический интерес. Они могут быть использованы в теории гипоэллиптических и гиперболических операторов, в различных задачах естествознания, которые приводятся к уравнениям с операторами из данных классов.

Основные положения, выносимые на защиту. На основе проведенных исследований автором выносятся на защиту следующие положения:

- Продолжая серию работ Г. А. Карапетяна, посвященных теоремам вложения для мультианизотропных функциональных пространств Соболева $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, когда некоторое вполне определенное число, называемое показателем вложения, меньше единицы, получены новые теоремы вложения, где показатель вложения равен единице.

- Получены прямые и обратные теоремы вложения разных размерностей (теоремы о следах) для функций из мультианизотропного пространства Соболева $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ для определенных классов вполне правильных многогранников $\mathfrak{N}$. Для получения результатов было введено понятие мультианизотропного пространства Соболева дробного порядка $W_2^{q\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2)$, где $q > 0$ произвольное рациональное число.

- Применяя полученные результаты о следах функций из мультианизотропных пространств Соболева $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ и используя результаты работ Г. А. Петросян и Г. А. Карапетяна, посвященных задаче Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений с однородными граничными условиями, получены условия корректной разрешимости уже для неоднородных задач в соболевском пространстве $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$.

- Получены новые результаты, касающиеся сравнения с весом однородных многочленов двух переменных, с помощью которых на языке кратности нулей подмногочленов найдены достаточные условия, при которых многочлен P от двух переменных является $h_{\mathfrak{N}}$-гиперболическим, когда его главная часть гиперболична по Гордингу.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях

- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2019". Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова(апрель 2019, Москва, Россия). Тема доклада "Предельные теоремы вложения для мультианизотропных функциональных пространств"

- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2020". Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова(ноябрь 2020, Москва, Россия). Тема доклада "Прямые и обратные теоремы вложения разных измерений для одного класса мультианизотропных пространств Соболева"

- Third international conference Mathematics in Armenia, dedicated to the 80^{th} anniversary of foundation of Armenian National Academy of Sciences, Ереванский Государственный Университет(июль 2023, Ереван, Армения). Тема доклада "On correct solvability of Dirichlet problem in a half-space for regular equations with non-homogeneous boundary conditions"

- Годичные научные конференции РАУ. Секция: Математика и механика (2018, 2019, 2022, 2023)

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 статьях, которые изданы в журналах, входящих в перечень КВОН, из которых 2 статьи – в издании, индексированном в Scopus, 5 публикаций – в тезисах докладов. Их перечень приведён в конце диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, включающего 64 наименования. В конце диссертации приведён список статей и тезисов конференций. Общий объем диссертации составляет 92 страницы.

Содержание работы

Во **введении** приводится обзор исследований, посвящённых пространствам Соболева, теоремам вложения в этих пространствах, вопросам разрешимости регулярных гипоэллиптических и гиперболических уравнений, а также теории сравнения дифференциальных операторов. Обосновывается актуальность темы диссертационной работы. Также приводится краткий обзор содержания и основных результатов диссертации.

В дальнейшем нумерация результатов совпадает с нумерацией в соответствующих главах диссертационной работы.

Первая глава посвящена теоремам вложения разных метрик в мультианизотропных пространствах Соболева. Продолжая серию работ Г. А. Карапетяна [12-17], где изучается случай, когда некоторое вполне определённое число, называемое показателем вложения, меньше единицы, получены новые теоремы вложения, где показатель вложения равн единице.

Для конечного набора $A \subset \mathbb{Q}_+^n$ через $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ обозначим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки A. Многогранник $\mathfrak{N}$(A) называется характеристическим многогранником набора A.

Многогранник $\mathfrak{N}$ называется вполне правильным (см. напр. [11]), если он имеет вершину в начале координат, отличные от начала координат вершины на каждой оси координат, и внешние нормали всех $(n-1)$-мерных некоординатных граней имеют положительные компоненты.

Вершины вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$, отличные от нуля, назовём главными вершинами и обозначим через r^i $(i = 1, 2, \ldots, I_{\mathfrak{N}})$. Через $\mathfrak{N}^i$ $(i = 1, \cdots, J_{\mathfrak{N}})$ обозначим $(n-1)$-мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{N}$. Пусть μ^i $(i = 1, \cdots, J_{\mathfrak{N}})$ такая внешняя нормаль грани $\mathfrak{N}^i$, что уравнение гиперплоскости, содержащей данную грань, задается формулой $(x, \mu^i) = 1$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$, главные вершины которого являются мультииндексы α^i $(i = 1, 2, \cdots, I_{\mathfrak{N}})$, и числа $p > 1$ обозначим

$$W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) := \{f : f \in L_p(\mathbb{R}^n), D^{\alpha^i} f \in L_p(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots, I_{\mathfrak{N}}\}.$$

Это множество с нормой

$$\|f\|_{W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)} := \sum_{i=1}^{I_{\mathfrak{N}}} \left\| D^{\alpha^i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

называется мультианизотропным пространством С. Л. Соболева.

В первой главе рассматривается n-мерный вполне правильный многогранник $\mathfrak{N}$, который имеет n главных вершин $\alpha^i = (0, \cdots, l_i, \cdots, 0)$, $(i = 1, \cdots, n)$, лежащих на координатных осях, и одну вершину анизотропности $\alpha^{n+1} = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, причем предполагается, что $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{N}$ имеет n некоординатных граней размерности $n-1$. Пусть $\mathfrak{N}^i$ $(i = 1, \cdots, n)$ – грань, содержащая точки $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\} \backslash \{\alpha^i\}$, а μ^i – её внешняя нормаль. Пусть $\beta \in \mathfrak{N}$ произвольный мультииндекс, для которого $\max\limits_{j=1,\cdots,n} \gamma_j/(\beta_j+1)$ достигается для единственного j, $1 \leq j \leq n$.

В **первом параграфе первой главы** с использованием специального интегрального представления, охватывающего все обобщенные производные функции, соответствующие главным вершинам многогранника $\mathfrak{N}$, и с помощью оценок специальных усредняющих мультианизотропных ядер, доказана следующая теорема вложения для $\mathfrak{N}$ и β, описанных выше.

Теорема 1.1.3. *Пусть для чисел p, q $(1 < p \leq q < \infty)$ и мультииндекса β*

$$\chi = \max_{i=1,\ldots,n} \left(|\mu^i| + (\beta, \mu^i)\right) - |\mu^1| \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1.$$

Тогда $D^\beta W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$, то есть любая функция $f \in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенную производную $D^\beta f$, принадлежащую классу $L_q(\mathbb{R}^n)$, при этом с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$ имеет место неравенство

$$\left\|D^\beta f\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \sum_{i=1}^{n+1} \left\|D^{\alpha^i} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \forall f \in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n).$$

Во **втором параграфе первой главы** с помощью теоремы П.И. Лизоркина об (L_p, L_q)-мультипликаторах для тех же $\mathfrak{N}$ и β удаётся доказать следующую теорему вложения.

Теорема 1.2.3. *Пусть для чисел p, q $(1 < p \leq q < \infty)$ и мультииндекса $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$*

$$\chi = \max_{i=1,\ldots,n} \left((\beta, \mu^i) + |\mu^i| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right) = 1.$$

Тогда $D^\beta W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$, то есть любая функция $f \in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенную производную $D^\beta f$, принадлежащую классу $L_q(\mathbb{R}^n)$, при этом с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$ имеет место неравенство

$$\left\|D^\beta f\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \sum_{i=1}^{n+1} \left\|D^{\alpha^i} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \ \forall f \in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n).$$

Вторая глава посвящена теоремам вложения различных измерений (теоремы о следах) в мультианизотропных пространствах Соболева $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ для вполне правильных многогранников $\mathfrak{N}$ специального вида. В частности, получены оценки для следов функции f и её частных производных $D_{x_3}^s f$ на гиперплоскости $x_3 = a$. Полученные результаты являются аналогами прямых теорем вложения для анизотропных соболевских пространств. В работе также доказана теорема о продолжении, являющаяся аналогом обратной теоремы вложения для разных измерений. Полученные результаты в дальнейшем используются для нахождения условий корректной разрешимости задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для регулярных гипоэллиптических уравнений, рассматриваемых в пространстве $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$. Глава состоит из трёх параграфов.

В **первом параграфе второй главы** вводятся мультианизотропные пространства Соболева дробного порядка, где главные вершины вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$ в общем случае принадлежат множеству $\mathbb{Q}_+^2$. Эти пространства вводятся двумя эквивалентными способами: с помощью специальных весовых функций, порождённых многогранником $\mathfrak{N}$, или же с помощью требования L_2-суммируемости обобщенных производных функции, соответствующих целым частям главных вершин многогранника $\mathfrak{N}$, с дополнительным требованием на суммируемость несобственных интегралов некоторых величин, полученных с применением разностных операторов на эти обобщенные производные.

Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$ с главными вершинами $r^k \in \mathbb{Q}_+^n$ $(k = 1, \cdots, I_{\mathfrak{N}})$ обозначим

$$P_{\mathfrak{N}}(\xi) := 1 + \sum_{k=1}^{I_{\mathfrak{N}}} (\xi^2)^{r^k}.$$

Для произвольного $q \in \mathbb{Q}_+$ через $q\mathfrak{N}$ обозначим вполне правильный многогранник с главными вершинами qr^i $(i = 1, \ldots, I_{\mathfrak{N}})$, обозначим через $[a]$ и $\{a\}$ соответственно целую и дробную часть числа $a \in \mathbb{R}$, $[r] := ([r_1], [r_2])$ для $r \in \mathbb{Q}_+^2$, для произвольной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ и числа $t \in \mathbb{R}$

$$\Delta_j(t) f(x) := f(x + te^j) - f(x),$$

где e^j – j-й координатный вектор в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathfrak{N}$ вполне правильный многогранник с вершинами из $\mathbb{Q}_+^2$.
Определение 2.1.1. *Скажем, что функция $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2)$, если $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $D^{[r^k]} f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ $(k = 1, \ldots, I_{\mathfrak{N}})$, и для любого r^k такого, что $[r^k] \neq r^k$, конечен*

интеграл

$$I(r^k,f) := \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_1(t)D^{[r^k]}f(x)|^2}{|t|^{1+2\{r_1^k\}}}dx_1dx_2dt, \text{ если } \{r_1^k\}>0,\ \{r_2^k\}=0 \\ \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_2(t)D^{[r^k]}f(x)|^2}{|t|^{1+2\{r_2^k\}}}dx_1dx_2dt, \text{ если } \{r_1^k\}=0,\ \{r_2^k\}>0 \\ \int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{|\Delta_1(t_1)\Delta_2(t_2)D^{[r^k]}f(x)|^2}{|t_1|^{1+2\{r_1^k\}}|t_2|^{1+2\{r_2^k\}}}dx_1dx_2dt_1dt_2, \text{ если } \{r_1^k\}>0,\ \{r_2^k\}>0 \end{cases}.$$

Обозначим

$$N(r^k,f) = \begin{cases} I(r^k,f), \text{ если } [r^k]\neq r^k \\ \|D^{r^k}f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \text{ если } [r^k]=r^k \end{cases}.$$

Норма в пространстве $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2)$ вводится следующим образом:

$$\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} + \sum_{k=1}^{I_{\mathfrak{N}}} N(r^k,f)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 2.1.5. *Пусть $\mathfrak{N}$ вполне правильный многогранник, вершины которого принадлежат $\mathbb{Q}_+^2$. Тогда*

$$W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2) = \{u : u\in L_2(\mathbb{R}^2),\ \sqrt{P_{\mathfrak{N}}(\xi)}F[u](\xi)\in L_2(\mathbb{R}^2)\},$$

и исходная норма в пространстве $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2)$ эквивалентна выражению

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} P_{\mathfrak{N}}(\xi)|F[u](\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 2.1.6. *Для любого вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$, вершины которого принадлежат $\mathbb{Q}_+^2$, $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2)$ является банаховым пространством.*

Лемма 2.1.7. *Для любого вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$, вершины которого принадлежат $\mathbb{Q}_+^2$, множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ плотно в $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2)$.*

Во **втором параграфе второй главы** для одного типа трехмерного вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$ получены прямые и обратные теоремы вложения для пространства $W_3^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, причем оценки следов функций и их производных получены в дробных пространствах, введённых в первом параграфе второй главы.

Пусть $\mathfrak{N}_0 \subset \mathbb{R}^2$ вполне правильный двухмерный многогранник, $q\in(0,1)$ некое рациональное число, s_0 и l натуральные числа такие, что $0 < s_0 < l$. Рассмотрим трехмерный вполне правильный многогранник $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^3$ с вершиной $(0,0,l)$ и такой, что все остальные главные вершины многогранника лежат на сечениях $\mathfrak{N}$ плоскостями $x_3 = s_0$ и $x_3 = 0$, а эти сечения равны соответственно многогранникам $q\mathfrak{N}_0$ и $\mathfrak{N}_0$. Нетрудно заметить, что в силу выпуклости многогранника $\mathfrak{N}$ имеем, что

$$l \leq \frac{s_0}{1-q}.$$

Для заданного целого положительного числа $s < l$ через $\mathfrak{N}_s$ обозначим проекцию на плоскость $x_3 = 0$ сечения многогранника $\mathfrak{N}$ плоскостью $x_3 = s$ и положим $\mathfrak{A}_s := m_s \mathfrak{N}_s$, где

$$m_s := \begin{cases} 1 - \dfrac{1-q}{2(s_0 - (1-q)s)}, \text{ если } 0 \leq s < s_0, \\ \\ 1 - \dfrac{1}{2(l-s)}, \text{ если } s_0 \leq s < l. \end{cases}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ произвольная функция, s, $0 \leq s < l$, целое число. Тогда существует $C > 0$ такое, что для произвольного $a \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$\|D_{x_3}^s u\big|_{x_3=a}\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|u\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)}.$$

Теорема 2.2.2. *Для произвольного набора функций $\varphi_s \in S(\mathbb{R}^2)$ $(s = 0,1,\ldots,l-1)$ и числа $a \in \mathbb{R}$ существует функция $u \in S(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$D_{x_3}^s u\big|_{x_3=a} = \varphi_s, \; s = 0,1,\ldots,l-1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|D_{x_3}^s u\big|_{x_3=a+\varepsilon} - \varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{N}_s}(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

$$\|u\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \sum_{s=0}^{l-1} \|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)},$$

где $C > 0$ константа, независящая от набора функций $\{\varphi_s\}$ и числа a.

Очевидно, что для обобщенной производной $D_{x_3}^s f$ функции $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ не имеет смысла говорить о принадлежности её сужения на плоскость $x_3 = a$ к какому либо функциональному пространству. Плоскость $x_3 = a$ является множеством меры нуль относительно евклидово пространства $\mathbb{R}^3$, тем самым можно изменить произвольным образом значения $D_{x_3}^s f$ на этом множестве. Согласно принятому подходу, теоремы вложения разных измерений для пространств Соболева формулируются как утверждения о возможности построения непрерывного оператора следа (см. теорему 2.2.5).

Теорема 2.2.3. *Пусть* $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ *произвольная функция* s, $0 \le s < l$, *целое число. Тогда для почти всех* $a \in \mathbb{R}$ $D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a} \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$, *и с некоторой постоянной* $C > 0$, *независящей от функции* f *и числа* a, *выполняется оценка*

$$\|D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a}\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} \le C\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)}.$$

Теорема 2.2.4. *Пусть* $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, s, $0 \le s < l$, *целое число,* $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(a)$ *– множество тех* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, *для которых* $D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a+\varepsilon} \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда существует функция* $\varphi_s \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$ *такая, что выполняются следующие соотношения*

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\in\mathcal{E}(a)}} \|D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a+\varepsilon} - \varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

$$\|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} \le C\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)},$$

где $C > 0$ *константа, независящая от функции* f *и числа* a. *При этом если* $D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a} \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$, *то* φ_s *и* $D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a}$ *совпадают.*

Теорема 2.2.5. *Для произвольного целого числа* s, $0 \le s < l$, *и числа* $a \in \mathbb{R}$ *существует оператор* $T_{s,a} : W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3) \to W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$, *удовлетворяющий условиям:*

1) $T_{s,a}[f] = D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a}$, $\forall f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3) \cap C^s(\mathbb{R}^3)$,
2) $\|T_{s,a}[f]\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} \le C\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)}$, $\forall f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, $\forall a \in \mathbb{R}$,

где $C > 0$ *константа, независящая от функции* f *и числа* a.

Замечание 2.2.3. *В дальнейшем символ* $D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a}$ *для функции* $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ *будет означать действие оператора* $T_{s,a}$ *(см. теорему 2.2.5) на функцию* f.

Теорема 2.2.6. *Для любого заданного набора функций* $\varphi_s \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$ $(s = 0, 1, \ldots, l-1)$, *числа* $a \in \mathbb{R}$ *существует функция* $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

$$D_{x_3}^s f\big|_{x_3=a} = \varphi_s,\ s = 0, \cdots, l-1,$$

$$\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \le C\sum_{s=0}^{l-1} \|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)},$$

где $C > 0$ *константа, независящая от набора функций* $\{\varphi_s\}$ *и числа* a.

Замечание 2.2.4. *В теоремах 2.2.3, 2.2.4, 2.2.6 и в следствии 2.2.5, как частный случай, результаты переводятся на вполне правильный* *многогранник $\mathfrak{N}$, имеющий вид пирамиды с вершиной $(0,0,l)$ и основанием $\mathfrak{N}_0$. Для этого можно взять произвольное целое число $s_0, 0 \le s_0 < l$, и $q = 1 - s_0/l$. Нетрудно заметить, что для $\mathfrak{A}_s$ получается формула*

$$\mathfrak{A}_s = \left(1 - \frac{s}{l} - \frac{1}{2l}\right)\mathfrak{N}_0, \ \ s = 0, \cdots, l-1.$$

Замечание 2.2.5. *Результаты параграфа 2.2 сформулированы и доказаны для трехмерного вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$. Отметим, что эти результаты остаются верными для n-мерного случая. После введения дробного пространства $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^{n-1})$, определяя величины $I(r^k, f)$ (см. 2.1.3) соответствующим образом, все остальные доказательства проводятся аналогичным образом для n-мерного случая.*

В **третьем параграфе второй главы**, используя результаты второго параграфа, найдены условия корректной разрешимости задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для регулярного гипоэллиптического оператора, рассматриваемого в пространстве $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$.

Характеристическим многогранником или многогранником Ньютона оператора $P(D)$ называется характеристический многогранник набора $(P) \cup \{0\}$.

Рассмотрим регулярный гипоэллиптический оператор $P(D_x, D_{x_3})$, $x \in \mathbb{R}^2$, с постоянными действительными коэффициентами вида

$$P(D_x, D_{x_3}) = D_{x_3}^{2m} + \sum_{i=1}^{M} a_i D_x^{\alpha^i} =: D_{x_3}^{2m} + P_0(D_x),$$

где $a_i \neq 0$. Из условия регулярности и гипоэллиптичности оператора $P(D_x, D_{x_n})$ согласно теореме 4.1 работы [11] следует, что характеристический многогранник $\mathfrak{N}$ оператора $P(D_x, D_{x_3})$ вполне правильный. Предполагается что мультииндексы α_i $(i = 1, \cdots, M)$ соответствуют главным вершинам многогранника $\mathfrak{N}$.

Для заданной функции $f \in L_2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ с компактным носителем рассмотрим следующую задачу Дирихле с неоднородными граничными условиями в пространстве $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$:

$$\begin{cases} P(D_x, D_{x_3})u = f(x, x_3), \ x_3 > 0, \ x \in \mathbb{R}^2, \\ D_{x_3}^s u\big|_{x_3=0} = \varphi_s, \ s = 0, \cdots, m-1. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

В работе [28] Г.А. Петросян и Г.А. Карапетяна рассматривается задача (2.3.3) с однородными граничными условиями для регулярного гипоэллиптического оператора $P(D_x, D_{x_n})$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ при заданной функции $f \in L_p(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$ с компактным носителем, и получены условия корректной разрешимости этой задачи в пространстве $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$.

Пусть $\mathfrak{N}_0$ – характеристический многогранник оператора $P_0(D_x)$. Заметим, что $\mathfrak{N}$ имеет вид пирамиды с основанием $\mathfrak{N}_0$ и с вершиной $(0, 0, 2m)$. Это обстоятельство позволяет использовать результаты о следах функций из второго параграфа второй главы (см. замечание 2.2.4) для сведения неоднородной задачи Дирихле (2.3.3) к однородному и получить условия её корректной разрешимости.

Обозначим:

$$q_s = 1 - \frac{s}{2m} - \frac{1}{4m}, \ \ s = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Лемма 2.3.1. *Пусть $\mathfrak{N}$ характеристический многогранник оператора $P(D_x, D_{x_3})$. Для любого заданного набора функций $\varphi_s \in W_2^{q_s \mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)$ $(s = 0, 1, \cdots, m-1)$ с компактными носителями существует функция $F \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ с компактным носителем, которая удовлетворяет следующим соотношениям*

$$D_{x_3}^s F\big|_{x_3=0} = \varphi_s, \ \forall s = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\|F\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \sum_{s=0}^{m-1} \|\varphi_s\|_{W_2^{q_s \mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)},$$

где $C > 0$ константа, независящей от набора функций $\{\varphi_s\}$.

Теорема 2.3.3. *Если граничные функции φ_s имеют компактные носители и $\varphi_s \in W_2^{q_s \mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)$, то при выполнении условий теоремы 1.1 или 1.2 работы [28] задача 2.3.3 имеет единственное решение U из класса $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$, причем с некоторой константой $C > 0$ (независящая от f) выполняется оценка*

$$\|U\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)} \leq C \left(\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)} + \sum_{s=0}^{m-1} \|\varphi_s\|_{W_2^{q_s \mathfrak{N}_0}(\mathbb{R}^2)} \right).$$

Третья глава посвящена исследованию гиперболических многочленов от двух переменных с заданным мультианизотропным весом, порожденным вполне правильным многогранником $\mathfrak{N}$. На языке кратности нулей подмногочленов найдены достаточные условия, при которых многочлен от двух переменных является гиперболическим с данным весом, когда его главная часть гиперболична по Гордингу. Глава состоит из двух параграфов.

В **первом параграфе третьей главы** приведены необходимые определения и обозначения, связанные с весовыми функциями гиперболичности и сравнением многочленов, а также краткий исторический обзор результатов, относящихся к корректной разрешимости задачи Коши для гиперболических операторов. В этом же параграфе получены новые результаты, касающиеся сравнения с весом многочленов от двух переменных.

Пусть $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} a_\alpha \xi^\alpha$ многочлен с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору $(P) := \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ a_\alpha \neq 0\}$. Обозначим $m = m(P) := \max\limits_{\alpha \in (P)} |\alpha|$ и представим многочлен в виде суммы однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi) := \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{\alpha \in (P),\ |\alpha|=j} a_\alpha \xi^\alpha \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.1}$$

Определение 3.1.1. *(см. [34] или [40] определение 12.3.3). Многочлен P, представленный в виде (3.1.1), называется гиперболическим по Гордингу относительно вектора $0 \neq \tau \in \mathbb{R}^n$, если $P_m(\tau) \neq 0$ и существует число $t_0 > 0$, для которого $P(\xi + it\tau) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{C}$, $|\,Re(t)| \geq t_0$.*

Определение 3.1.2. *(см. [38] или [41]). Функция g, определенная на $\mathbb{R}^n$, называется весом гиперболичности, если 1) $\inf\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} g(\xi) > 0$, 2) существуют числа $a \in [0, 1)$ и $c > 0$, для которых $g(\xi + \eta) \leq c \cdot g(\xi)[1 + |\eta|^a]$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.*

Определение 3.1.3. *(см. [38] или [41]). Пусть функция g является весом гиперболичности. Скажем, что многочлен P, представленный в виде (3.1.1), является g-гиперболическим относительно вектора $0 \neq \tau \in \mathbb{R}^n$, если 1) $P_m(\tau) \neq 0$ и 2) существует постоянная $c > 0$, для которой $P(\xi + it\tau) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{C}$, $|\,Re(t)| \geq c \cdot g(\xi)$.*

Если с некоторыми постоянными $\kappa \geq 1$ и $r \in (0, 1)$

$$\kappa^{-1}(1 + |\xi|^r) \leq g(\xi) \leq \kappa(1 + |\xi|^r),\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то g-гиперболический многочлен называется $1/r$-гиперболическим (см. [35]).

Для однородного многочлена R обозначим $\Sigma(R) := \{\xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| = 1,\ R(\xi) = 0\}$, $l(\eta) = l_R(\eta)$ $(\eta \in \mathbb{R}^n)$ – кратность нуля многочлена R в точке η, т.е. $l(\eta) = 0$ при $R(\eta) \neq 0$ и $l(\eta) = r$, при $R(\eta) = 0$, где натуральное число r определяется из условий

$$\sum_{|\alpha|<r} |R^{(\alpha)}(\eta)| := \sum_{|\alpha|<r} |(D^\alpha R)(\eta)| = 0 \text{ и } \sum_{|\alpha|=r} |R^{(\alpha)}(\eta)| \neq 0.$$

Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ и точки $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^n$ введём следующие обозначения: $\mathfrak{N}^0$ – множество вершин $\mathfrak{N}$, $\Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})$ – множество тех внешних нормалей $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $(n-1)$-мерных некоординатных граней, для которых $\max_{1\le j\le n}\lambda_j = 1$, $d_{\mathfrak{N}}(\lambda) := \max_{\nu\in\mathfrak{N}}(\lambda,\nu)$, $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})$, $\rho_{\mathfrak{N}} := \max_{\nu\in\mathfrak{N}^0}|\nu|_1$, $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) := \max\{|\nu|_1,\ \nu \in \mathfrak{N}^0, \nu_j = 0$ при $\eta_j = 0, 1 \le j \le n\}$ и положим $h_{\mathfrak{N}}(\xi) := \sum_{\nu\in\mathfrak{N}^0}|\xi^\nu|,\ \xi\in\mathbb{R}^n$.

Известно, что

I) (см. [42] или [40], теорема 12.4.6). Если для многочлена P, представленного в виде (3.1.1), P_m гиперболичен по Гордингу относительно вектора $0 \ne \tau \in \mathbb{R}^n$, то для гиперболичности по Гордингу многочлена P относительно τ необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $c > 0$ выполнялись следующие оценки $\widetilde{P_j(\xi)} := \sum_\alpha |P_j^{(\alpha)}(\xi)| \le c\widetilde{P_m(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $j = 0, \cdots, m-1$.

II) (см. [34] или [40], теорема 12.5.4). Если оператор $P(D)$ (многочлен P) гиперболичен по Гордингу относительно τ, то задача Коши для оператора $P(D)$ однозначно разрешима в $C^\infty(\Omega(\tau))$, где $\Omega(\tau) := \{x\in\mathbb{R}^n, (x,\tau) > 0\}$.

III) (см. [35]). Если оператор $P(D)$ r-гиперболичен, то задача Коши для оператора P поставлена корректно в изотропных пространствах типа Жевре $G^{r_1}(\Omega(\tau))$, при $1 \le r_1 < r$.

IV) (см. [41] и [38]). Если оператор $P(D)$ $h_{\mathfrak{M}}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$-гиперболичен относительно вектора $\tau = (0,\cdots,0,1)$, где $\mathfrak{M}\subset\mathbb{R}^{n-1}_+$ вполне правильный многогранник, для которого $\max_{\lambda\in\Lambda^{n-1}(\mathfrak{M})} d_{\mathfrak{M}}(\lambda) < 1$, то задача Коши для оператора $P(D)$ поставлена корректно в мультианизотропных пространствах типа Жевре $G^{\mathfrak{N}}(\Omega(\tau))$, где $\mathfrak{N}\subset\mathbb{R}^n_+$ – вполне правильный многогранник, удовлетворяющий некоторым условиям, которые определяются многогранником $\mathfrak{M}$.

Наша цель на языке кратности нулей подмногочленов P_j, $j = 0, 1, \cdots, m-1$, найти условия, при которых многочлен P, представленный в виде (3.1.1), будет g-гиперболическим относительно вектора τ, когда P_m гиперболичен по Гордингу относительно τ.

Определение 3.1.4. *(см. [40], определение 10.1.1). Функция* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1_+$ *называется медленно растущей, если* $\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n} g(\xi) > 0$ *и с некоторыми постоянными* $c,\ a > 0$ $g(\xi+\eta) \le c\cdot g(\xi)(1+|\eta|)^a,\ \xi,\eta\in\mathbb{R}^n$.

Для любого многочлена P и вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}\subset\mathbb{R}^n_+$ функции $\tilde{P}(\xi)$ и $h_{\mathfrak{N}}(\xi)$ являются медленно растущими весовыми функциями.

Определение 3.1.5. *(см. [43]). Медленно растущая весовая функция* g *называется медленно меняющейся, если для любого* $\kappa > 0$ *существует число* $c = c(\kappa) > 0$*, для которого* $g(\xi+\eta) \le c\cdot g(\xi)$, $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$, $|\eta| \le \kappa\cdot g(\xi)$.

Для любого $r \ge 0$ и $\lambda\in\mathbb{R}^n_+$ функции $1+|\xi|^r$, $1+\sum_{j=1}^n|\xi_j|^{\lambda_j}$ являются медленно меняющимися весовыми функциями. Из работы [44] следует, что функция $h_{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{N} \in \mathbb{R}^n_+$ вполне правильный многогранник, является медленно меняющейся, если $card(\Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})) = 1$.

Определение 3.1.6. *(см. [39]). Говорят, что многочлен P мощнее многочлена Q и записывают $Q < P$, если с некоторой постоянной $c > 0$*

$$|Q(\xi)| \le c \cdot (1 + |P(\xi)|), \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.2}$$

Определение 3.1.7. *Пусть g медленно растущая весовая функция. Скажем, что многочлен P g-сильнее многочлена Q и запишем $Q \prec^g P$, если с некоторой постоянной $c > 0$*

$$\tilde{Q}(\xi, g(\xi)) \le c\tilde{P}(\xi, g(\xi)), \ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1.3}$$

где для данного многочлена R

$$\tilde{R}(\xi, t) := \sum_{\alpha} |R^{(\alpha)}(\xi)| t^{|\alpha|}, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \ t > 0.$$

Предложение 3.1.1. *Если $Q < P$, то для любой медленно растущей весовой функции g $Q \prec^g P$.*

Лемма 3.1.1. *Пусть g – медленно меняющаяся весовая функция, а P и Q некоторые многочлены. Для того, чтобы $Q \prec^g P$, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $c > 0$, для которой*

$$|Q(\xi)| \le c\tilde{P}(\xi, g(\xi)), \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.4}$$

Лемма 3.1.2. *Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^n_+$ вполне правильный многогранник, для которого $d_{\mathfrak{N}} < 1$, P_m и P_k $(k \le m)$ однородные многочлены порядка m и k соответственно. Если $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$, то для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ при $l_m(\eta) > (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \ge l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$, где $l_m(\eta)$, $l_k(\eta)$ порядки нулей многочленов P_m, P_k в точке η.*

Следствие 3.1.1. *Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^n_+$ вполне правильный многогранник, для которого $d_{\mathfrak{N}} < 1$, а P_m и Q_m однородные многочлены порядка m. Если $Q_m \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$, то $\Sigma(P_m) \subset \Sigma(Q_m)$ и $l_{P_m}(\eta) \le l_{Q_m}(\eta)$ $\forall \eta \in \Sigma(P_m)$.*

Следствие 3.1.2. *Если при условиях леммы 3.1.2 $\eta \in \mathbb{R}^n_0$, то при $l_m(\eta) > (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$ $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \ge l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$.*

Лемма 3.1.3. *Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^n_+$ вполне правильный многогранник, для которого $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, P_m и P_k однородные многочлены порядка m и k $(m \ge k)$ соответственно, для которых с некоторой постоянной $c > 0$*

$$|P_k(\xi)| \le c\tilde{P}_m(\xi, h_{\mathfrak{N}}(\xi)), \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.8}$$

Тогда для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ при $l_m(\eta) > (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$ $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$.

Следствие 3.1.3. *Пусть при условиях леммы 3.1.3 $card(\Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})) = 1$ и $\eta \in \Sigma(P_m)$. Если $l_m(\eta) > (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$, то $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$.*

Во **втором параграфе третьей главы** получены основные результаты главы, касающиеся достаточных условий гиперболичности с весом многочлена от двух переменных на языке кратности нулей его подмногочленов.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^2_+$ вполне правильный многогранник, для которого $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, P_m и P_k однородные многочлены от двух переменных порядка m и k $(m \geq k)$ соответственно. Если для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ при $l_m(\eta) > (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$, то $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$.*

Следствие 3.2.1. *Пусть $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1 \subset \mathbb{R}^2_+$ вполне правильные многогранники, для которых $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, $\rho_{\mathfrak{N}_1} < 1$, P_m и P_k однородные многочлены от двух переменных порядка m и k $(m \geq k)$ соответственно. Если для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) = \rho_{\mathfrak{N}_1}(\eta)$, то $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$ тогда и только тогда, когда $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}_1}} P_m$.*

Следствие 3.2.2. *Если при условиях следствия 3.2.1 $\Sigma(P_m) \subset \mathbb{R}^2_0$, то условия $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$, $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}_1}} P_m$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\rho_{\mathfrak{N}} = \rho_{\mathfrak{N}_1}$.*

Теорема 3.2.2. *Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^2_+$, P_m и P_k те же, что и в теореме 3.2.1. Если для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ при $l_m(\eta) > (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$ следует, что $l_k(\eta) > l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$, то существует постоянная $c > 0$ для которой*

$$|P_k(\xi)| \leq c|\tilde{P}_m(\xi, h_{\mathfrak{N}}(\xi))|, \ \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{3.2.13}$$

Следствие 3.2.3. *Пусть $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1 \subset \mathbb{R}^2$ вполне правильные многогранники, для которых $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, $\rho_{\mathfrak{N}_1} < 1$, P_m и P_k однородные многочлены от двух переменных порядка m и k, $m \geq k$, соответственно. Если $\rho_{\mathfrak{N}} = \rho_{\mathfrak{N}_1}$, то для выполнения оценки (3.2.13) необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $c_1 > 0$*

$$|P_k(\xi)| \leq c|\tilde{P}_m(\xi, h_{\mathfrak{N}_1}(\xi))|, \ \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{3.2.14}$$

Теорема 3.2.3. *Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^2_+$ вполне правильный многогранник, для которого $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, а P – многочлен от двух переменных, представленный в виде (3.1.1). Если многочлен P_m гиперболичен по Гордингу относительно вектора $0 \neq \tau \in \mathbb{R}^2$, а многочлены P_k, $k = 1, \cdots, m-1$, удовлетворяют* *следующему условию: для любых $\eta \in \Sigma(P_m)$ и $k > m - l_m(\eta)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$, то многочлен P $h_{\mathfrak{N}}$-гиперболичен относительно вектора τ.*

Следствие 3.2.4. *Пусть $\mathfrak{N}$, P и τ те же, что и в теореме а $\mathfrak{N}_1 \subset \mathbb{R}^2_+$ некоторый вполне правильный многогранник. Если $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) = \rho_{\mathfrak{N}_1}(\eta)$ при всех $\eta \in \Sigma(P_m)$, то многочлен P $h_{\mathfrak{N}_1}$-гиперболичен относительно вектора τ.*

Теорема 3.2.4. *Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^2_+$ вполне правильный многогранник, для которого $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, а P – многочлен от двух переменных, представленный в виде (3.1.1). Если многочлен P_m гиперболичен по Гордингу относительно вектора $0 \neq \tau \in \mathbb{R}^2$, а многочлены P_k, $k = 1, \cdots, m-1$, удовлетворяют следующему условию: для любых $\eta \in \Sigma(P_m)$ и $k > m - l_m(\eta)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$ $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$, то многочлен P $1/\rho_{\mathfrak{N}}$-гиперболичен относительно вектора τ.*

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1*]-[4*].

Литература

[1] S. Soboleff. Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1936, vol. 1(43), № 1, pp. 21–28.

[2] С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950 г., 2-е изд. перераб. и доп. Новосибирск, 1962 г., 3-е изд. перераб. и доп. под ред. О. А. Олейник, М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988 г., 336 стр.

[3] Л.Н. Слободецкий. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена, 1958 г., том 197, стр. 54–112.

[4] Л.Н. Слободецкий. Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Докл. АН СССР, 1958 г., том 118, № 2, стр. 243–246.

[5] П.И. Лизоркин. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E^n)$, Матем. сб., 1963 г., том 60 (102), № 3, стр. 325–353.

[6] П.И. Лизоркин. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1969 г., том 105, стр. 89–167.

[7] N. Aronszajn, K.T. Smith. Theory of Bessel potentials. I., Ann. Inst. Fourier, 1961, vol. 11, pp. 385–475.

[8] A. Calderón, A. Zygmund. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations, Stud. Math., 1961, vol. 20(2), pp. 181–225.

[9] E. Gagliardo. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1957, vol. 27, pp. 284–305.

[10] О.В. Бесов. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения, Тр. МИАН СССР, Изд-во АН СССР, 1961 г., том 60, стр. 42–81.

[11] H. Ghazaryan. The Newton polyhedron, spaces of differentiable functions and general theory of differential equations, Armen. J. Math., 2017, vol. 9, № 2, pp. 102–145.

[12] G.A. Karapetyan. Integral representations of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on the plane with one anisotropy vertex, J. Contemp. Math. Anal., 2016, vol. 51, № 6, pp. 269–281.

[13] G.A. Karapetyan. Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces for the three-dimensional case, Eurasian Math. J., 2016, vol. 7, № 4, pp. 19–39.

[14] G.A. Karapetyan, M.K. Arakelyan. Estimation of multianisotropic kernels and their application to the embedding theorems, Trans. A. Razmadze Math. Inst., 2017, vol. 171, pp. 48–56.

[15] Г.А. Карапетян. Интегральное представление и теоремы вложения для n-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности, Сиб. матем. журнал, 2017 г., том 58, № 3, стр. 573–590.

[16] G.A. Karapetyan. An integral representation and embedding theorems in the plane for multianisotropic spaces, J. Contemp. Math. Anal., 2017, vol. 52, № 6, pp. 267–275.

[17] Г.А. Карапетян, М.К. Аракелян. Теоремы вложения для общих мультианизотропных пространств, Мат. заметки, 2018 г., том 104, № 3, стр. 422–438.

[18] Г.А. Карапетян. Дробные мультианизотропные пространства и теоремы вложения для них, Матем. тр., 2019 г., том 22, № 2, стр. 76–89.

[19] Г.В. Демиденко. О корректной разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений, Сиб. мат. журнал, 1988 г., том 29, № 4, стр. 54–67.

[20] Г.В. Демиденко. Об условиях разрешимости смешанных задач для одного класса уравнений соболевского типа, Краевые задачи для уравнений с частными производными, Тр. семинара акад. С.Л. Соболева, Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984 г., стр. 23–54.

[21] Г.В. Демиденко. Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уранениями. I, Сиб. мат. журнал, 1993 г., том 34, № 5, стр. 52–67.

[22] Г.В. Демиденко. Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уранениями. II, Сиб. мат. журнал, 1994 г., том 35, № 1, стр. 41–65.

[23] Г.В. Демиденко. О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$, Сиб. мат. журнал, 1998 г., том 39, № 5, стр 1028–1037.

[24] Г.В. Демиденко. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа, Сиб. мат. журнал, 2008 г., том 49, № 5 , стр. 1064–1076.

[25] С.В. Успенский. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов, Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1972 г., том 117, стр. 292–299.

[26] G.A. Karapetyan, H.A Petrosyan. On solvability of regular hypoelliptic equations in $\mathbb{R}^n$, J. Contemp. Math. Anal., 2018, vol. 53, № 4, pp. 187–200.

[27] G.A. Karapetyan, H.A Petrosyan. Multianisotropic integral operators defined by regular equations, Sib. Math. J., 2019, vol. 60, № 3, pp. 472–489.

[28] G.A. Karapetyan, H.A Petrosyan. Correct solvability of the Dirichlet problem in the half-space for regular hypoelliptic equations, J. Contemp. Math. Anal., 2019, vol. 54, № 4, pp. 195–209.

[29] A.A. Darbinyan, A.G. Tumanyan. On a priori estimates and the Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces, J. Contemp. Math. Anal., 2018, vol. 53, № 2 , pp. 61–70.

[30] A.A. Darbinyan, A.G. Tumanyan. On index stability of Noetherian differential operators in anisotropic Sobolev spaces, Eurasian Math. J., 2019, vol. 10, № 1, pp. 9–15.

[31] A.G. Tumanyan. On the Fredholm property of semielliptic operators in anisotropic weighted spaces in $\mathbb{R}^n$, J. Contemp. Math. Anal., 2021, vol. 56, № 3 , pp. 168–181.

[32] A.G. Tumanyan. Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators in multianisotropic spaces in $\mathbb{R}^n$, Italian J. of Pure and Appl. Math, 2022, vol. 48, № 1, pp. 1009–1028.

[33] A.G. Tumanyan. A priori estimates and Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators, Siberian Adv. Math., 2023, vol. 33, № 2, pp. 151–164.

[34] L. Gårding. Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math., 1951, vol. 85, pp. 1–62.

[35] E. Larsson. Generalized hyperbolicity, Ark. Mat., 1967, vol. 7, № 1, pp. 11–32.

[36] L. Rodino. Linear partial differential operators in Gevrey spaces, World Scientific, Singapure, 1993.

[37] В.Н. Маргарян, Г.Г. Казарян. О многочленах, гиперболических с весом, Изв. НАН Арм., Мат., 2014 г., том 49, № 5, стр. 23–40.

[38] В.Н. Маргарян, Г.Г. Казарян. О задаче Коши в мультианизотропных классах Жевре для гиперболических с весом уравнений, Изв. НАН Арм., Мат., 2015 г., том 50, № 2, стр. 36–46.

[39] В.Н. Маргарян, Г.Г. Казарян. Об одном классе слабо гиперболических операторов, Изв. НАН Арм., Мат., 2021 г., том 56, № 6, стр. 57–69.

[40] Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х томах, том 2: Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, пер. с Англ., М.: Мир, 1968 г., 456 стр.

[41] D. Calvo, A. Morando. Multianisotropic Gevrey Classes and Ultradistributions, Univ. di Torino quaderno, 2002, vol. 41, pp. 1-38.

[42] L. Svenson. Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of Polynomials with hyperbolic Principal Part, Ark. Math., 1968, vol. 8, pp. 145-162.

[43] G. Garello. Pseudodifferential operators with symbols in weighted Sobolev spaces and regularity for partial differential equations, Math. Nacht., 2002, vol. 232-240, №1, pp. 62-70.

[44] Г.О. Акопян, В.Н. Маргарян. О решениях типа Жевре гипоэлиптических уравнений, Изв. НАН. Арм., 1996, том 31, №2, стр. 40-46.

Список опубликованных работ по теме диссертации

[1*] G.A. Karapetyan, M.A. Khachaturyan. Limiting embedding theorems for multianisotropic functional spaces, J. Contemp. Mathemat. Anal., 2019, vol. 54, №2, pp. 103-111.

[2*] М.А. Хачатурян, А.Р. Акопян. О следах функций из мультианизотропных пространств Соболева, Вестник РАУ, физ.-мат. и ест. науки, 2021 г., №1, стр. 55-77.

[3*] M.A Khachaturyan. Correct solvability of Dirichlet problem in half-space for regular equations with non-homogeneous boundary conditions, Proc. YSU A: Phys. Math. Sci., 2023, vol. 57, №2 (261), pp. 44-50.

[4*] M.A. Khachaturyan, V.N. Margaryan. Comparison of polynomials and weighted-hyperbolic operators, J. Contemp. Mathemat. Anal., 2023, vol. 58, №5, pp. 330-340.

Тезисы по теме диссертации

[1**] Г.А. Карапетян, М.А. Хачатурян. Применение теории мультипликаторов в теоремах вложения для мультианизотропных пространств, Тринадцатая годичная научная конференция РАУ, Сборник научных статей, 2019 г., стр. 14-19.

[2**] М.А. Хачатурян. Предельные теоремы вложения для мультианизотропных функциональных пространств, Материалы международного молодежного научного форума "Ломоносов-2019", Секция: Математика и Механика, Подсекция: Дифф. уравнения, динам. системы и опт. управ., М.: МАКС Пресс, 2019 г.

[3**] М.А. Хачатурян. О следах фунцкий из мультианизотропных пространств Соболева в случае одного типа вполне правильного многогранника, Четырнадцатая годичная научная конференция РАУ, Сборник научных статей, 2020 г., стр. 55-60.

[4**] М.А. Хачатурян. Прямые и обратные теоремы вложения разных измерений для одного класса мультианизотропных пространств Соболева, Материалы международного молодежного научного форума "Ломоносов-2020", Секция: Математика и Механика, Подсекция: Вещест., компл. и функ. анализ, М.: МАКС Пресс, 2020 г.

[5**] M.A. Khachaturyan. On correct solvability of Dirichlet problem in a half-space for regular equations with non-homogeneous boundary conditions. Third international conference Matehamtics in Armenia, 2023, pp. 55-56.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Մ. Ա. Խաչատրյան

ՆԵՐԴՐՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՍՈԲՈԼԵՎԻ ՄՈՒԼՏԻԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ատենախոսությունը նվիրված է սոբոլևյան մուլտիանիզոտրոպ տարածությունների ուսումնասիրությանը, այդ տարածություններում ներդրման թեորեմներին և դրանց կիրառությանը մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներում: Շարունակելով Գ. Ա. Կարապետյանի աշխատանքները այս ուղությամբ՝ ստացվել են նոր ներդրման թեորեմներ: Առաջին անգամ ստացվել են որոշակի տիպի սոբոլևյան մուլտիանիզոտրոպ տարածությանը պատկանող ֆունկցիաների հետքերի գնահատականներ: Հետքերի գնահատականները ստանալու համար ներմուծվել են կոտորակային կարգի մուլտիանիզոտրոպ սոբոլևյան տարածություններ: Հետքերի վերաբերյալ ստացված արդյունքները հետագայում կիրառվել են Դիրիխլեյի անհամասեռ եզրային պայմաններով խնդրի ուսումնասիրության մեջ կիսատարածությունում ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ հավասարումների համար: Ատենախոսական աշխատանքում ստացվել են նաև նոր արդյունքներ օպերատորների ըստ մուլտիանիզոտրոպ կշռի համեմատման և ըստ կշռի հիպերբոլական օպերատորների վերաբերյալ: Ատենախոսությունում ստացվել և պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Սոբոլևյան մուլտիանիզոտրոպ տարածությունների համար ստացվել են ներդրման թեորեմներ, երբ այդ թեորեմների ձևակերպման մեջ մասնակցող որոշակի հաստատուն, որին անվանում են ներդրման գործակից, հավասար է մեկի:

- Սահմանվել և ուսումնասիրվել են կոտորակային կարգի մուլտիանիզոտրոպ սոբոլևյան տարածություններ: Այդ տարածությունները ներմուծվել են երկու համարժեք ճանապարհներով՝ մի դեպքում կշռային ֆունկցաների օգնությամբ, մյուս դեպքում՝ պահանջելով ֆունկցիայի որոշ ամբողջաթիվ կարգերի ընդհանրացված ածանցյալների գոյությունը՝ համակցված որոշակի անիսկական ինտեգրալների զուգամիտության պահանջով, որոնք ստացվում են այդ ածանցյալների նկատմամբ հատուկ տարբերակային օպերատորների կիրառությամբ:

- Ստացվել են որոշակի տիպի սոբոլևյան մուլտիանիզոտրոպ տարածութանը պատկանող ֆունկցիաների և նրանց ածանցյալների ցածր չափողականության հարթությունների վրա հետքերի գնահատականներ:
- Հետքերի գնահատականների կիրառությամբ ստացվել են Դիրիխլեի անհամասեռ եզրային պայմաններով խնդրի կոռեկտ լուծելիության բավարար պայմաններ կիսատարածությունում ռեգուլյար հիպոէլլիպտիկ օպերատորների համար:
- Ստացվել են բազմանդամների ըստ կշռի համեմատման վերաբերյալ նոր արդյունքներ:
- Բերվել են բավարար պայմաններ՝ ձևակերպված բազմանդամի ենթաբազմանդամների զրոների պատիկության լեզվով, որոնց դեպքում տրված բազմանդամը, որի գլխավոր մասը հիպերբոլական է ըստ Գորդինգի, կլինի հիպերբոլական ըստ տրված մուլտիանիզոտրոպ կշռի:

R E S U M E

Mikayel Khachaturyan

EMBEDDING THEOREMS IN MULTIANISOTROPIC SOBOLEV SPACES AND THEIR APPLICATIONS IN THE THEORY OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

The thesis work is devoted to the study of Sobolev multianisotropic spaces, embedding theorems in these spaces and to their applications in the theory of partial differential equations. Continuing the studies of G. A. Karapetyan, new embedding theorems have been obtained. For the first time, estimates of the traces of functions, belonging to a special type of multianisotropic Sobolev space, are derived. Fractional order multianisotropic Sobolev spaces were introduced to obtain the trace estimates. The results, regarding to the treaces of functions, are further applied in the study of Dirichlet problem in half-space with inhomogeneous boundary conditions for regular hypoelliptic equations. Additionally, new results are obtained, regarding the comparison of operators whith multianisotropic weigh and weighted-hyperbolic operators.

The basic results obtained in thesis are the following:

- Embedding theorems for Sobolev multianisotropic spaces are obtained when a certain constant, participating in the formulation of these theorems, called the embedding coefficient, is equal to one.

- Multianisotropic Sobolev spaces of fractional order are defined and studied. The new spaces are described in two equivalent ways, one involves the use of weight functions, and the other requires the existence of generalized derivatives of certain integer orders of the function, combined with the requirement for the convergence of some improper integrals, which are obtained by applying special variational operators to these derivatives.

- Estimates of the traces on lower-dimensional planes of the functions and

their derivatives, which belong to a special type of Sobolev multianisotropic space, have been obtained.

- Whith the help of trace estimates sufficient conditons are obtained for correct solvability of Dirichlet problem whith inhomogeneous boundary conditions on a half-space for regular hypoelliptic equations.

- New results, regarding the comparison of polynomials whith weight, are obtained.

- Sufficient conditions have been found, formulated in terms of the multiplicities of zeros of subpolynomials of a polynomial, under which a given polynomial, whose leading part is hyperbolic according to Gårding, will be hyperbolic according to a specified multianisotropic weight.