ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию М. А. Хачатуряна
“Теоремы вложения в мультианизотропных пространствах Соболева
и их применения в теории дифференциальных уравнений
с частными производными”,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук по специальности
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, математическая физика

В диссертации рассматривается класс мультианизотропных соболевских пространств $W_p^{\mathfrak{R}}$, определяемых некоторым вполне правильным многогранником $\mathfrak{R}$, и классы гипоэллиптических и гиперболических операторов. Эти вопросы взаимосвязаны, поскольку с одной стороны, пространства $W_p^{\mathfrak{R}}$ являются естественными для изучения разрешимости краевых задач для некоторых классов гипоэллиптических и гиперболических уравнений, с другой, — возникающие проблемы при изучении корректности краевых задач приводят к более глубокому исследованию свойств мультианизотропных соболевских пространств $W_p^{\mathfrak{R}}$.

Гипоэллиптические операторы $P(D_x)$ были введены в 50-е гг. в работах Л. Хёрмандера. Обобщения этих результатов были получены в работах Л. Гординга, Б. Мальгранжа, Ж. Питре, Л. Эренпрайса, С. М. Никольского, Г. Г. Казаряна, В. П. Михайлова и др. В класс гипоэллиптических операторов входят, в частности, параболические, эллиптические и квазиэллиптические операторы, для которых хорошо изучены свойства в канонических областях (R^n, R^n_+, R^n_{++} и др.), и для соответствующих уравнений построены теории краевых задач в гёльдеровых и соболевских пространствах. Для общего класса гипоэллиптических уравнений теории краевых задач пока не существует. Основными сложностями являются удачный выбор функциональных пространств и нахождение условий разрешимости в них. В связи с этим возникла необходимость построения теории мультианизотропных соболевских пространств $W_p^{\mathfrak{R}}$, которые обобщают анизотропные соболевские пространства и порождаются правильным многогранником $\mathfrak{R}$. Впервые пространства такого типа изучались в работах С. М. Никольского, Г. Г. Казаряна, В. П. Михайлова.

Последние 10 лет теория этих пространств и приложения их к дифференциальным уравнениям активно развивались в работах Г. А. Карапетяна и его учеников.

Основные цели представленной диссертации: 1) рассмотрение мультианизотропных пространств Соболева $W_p^{\mathfrak{R}}(R^n)$, для которых доказываются теоремы вложения, теоремы о следах на гиперплоскости и теоремы о продолжении; 2) изучение корректной разрешимости в $W_2^{\mathfrak{R}}(R_+^3)$ задачи Дирихле для регулярных гипоэллиптических уравнений с неоднородными граничными условиями; 3) изучение условий гиперболичности многочленов от двух переменных с заданным мультианизотропным весом, порожденным вполне правильным многогранником $\mathfrak{R}$.

Исследуемые вопросы представляют большой интерес, как в теории функциональных пространств, так и в теории краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Поэтому тема исследований является несомненно актуальной.

Перейдем к описанию результатов диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы.

Во введении дается краткий обзор литературы и излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе диссертации продолжается изучение мультианизотропных соболевских пространств $W_p^{\mathfrak{R}}(R^n)$, определяемых некоторым вполне правильным многогранником $\mathfrak{R}$. Пространства такого типа изучались в работах С. М. Никольского, Г. Г. Казаряна, Г. А. Карапетяна, В. П. Михайлова и др. В частности, в работах Г. А. Карапетяна были доказаны теоремы вложения пространств $W_p^{\mathfrak{R}}(R^n)$, являющиеся аналогами теорем вложения изотропных соболевских пространств для разных метрик в случае, когда показатель вложения меньше предельного. В этой главе Автор доказывает две теоремы вложения вида

$$D_x^{\beta} W_p^{\mathfrak{R}}(R^n) \hookrightarrow L_q(R^n), \quad 1 < p \leq q < \infty,$$

но в случае предельного показателя. Отметим, что доказательство первой теоремы основано на использовании интегрального представления для суммируемых функций, при доказательстве второй используются операторы Фурье и теорема о мультипликаторах П. И. Лизоркина.

Вторая глава посвящена изучению следов функций из мультианизотропных соболевских пространств $W_2^{\mathfrak{R}}(R^3)$, определяемых некоторым вполне правильным многогранником $\mathfrak{R}$. Следы функций рассматриваются на гиперплоскостях $x_3 = a$. Для этой цели Автор вводит новые мультианизотропные соболевские пространства $W_2^{\mathfrak{R}}(R^2)$ с дробными показателями, при этом главные вершины вполне правильного многогранника $\mathfrak{R}$ принадлежат Q_+^2. Проводя параллель с пространствами Соболева – Слободецкого, Автор дает два определения пространств $W_2^{\mathfrak{R}}(R^2)$. Первое определение основано на использовании специальных конечно-разностных отношений, второе — на использовании операторов Фурье. В леммах 2.1.5–2.1.7 установлены эквивалентность этих определений, полнота пространств $W_2^{\mathfrak{R}}(R^2)$ и плотность гладких финитных функций. На основе этих свойств доказаны точные теоремы о следах, а также теоремы о продолжении.

В третьем параграфе главы Автор рассматривает задачу Дирихле для одного класса регулярных гипоэллиптических уравнений в полупространстве:

$$\begin{aligned} &P(D)U = f(x, x_3), && x \in R^2, \quad x_3 > 0, \\ &D_{x_3}^j U|_{x_3=0} = \varphi_j(x), && j = 0, 1, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{1}$$

Отметим, что в случае однородных граничных условий в недавних работах Г. А. Карапетяна и Г. А. Петросян для этой задачи были установлены условия однозначной разрешимости в пространствах типа $W_p^{\mathfrak{R}}$, $1 < p < \infty$. Однако для изучения задачи (1) с неоднородными граничными условиями необходимо было решить проблему следов для мультианизотропных соболевских пространств. В предыдущих параграфах эта задача решена в случае $p = 2$, и на основе полученных результатов Автор предложил схему получения условий однозначной разрешимости задачи Дирихле (1) в пространствах $W_2^{\mathfrak{R}}(R_+^3)$ для произвольных граничных функций $\varphi_j(x)$, $j = 0, \ldots, m-1$, с компактными носителями.

Нетрудно заметить, что результаты, полученные в этой главе, по аналогии можно перенести на случай произвольной размерности n.

В третьей главе рассматриваются гиперболические многочлены

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \Bigg(\sum_{\alpha \in (P), |\alpha| = j} a_\alpha \xi^\alpha \Bigg)$$

с двумя переменными и с мультианизотропном весом, порожденным вполне правильным многогранником $\mathfrak{R} \subset R^2_+$. Предполагается, что главная часть $P_m(\xi)$ гиперболична по Гордингу относительно ненулевого вектора $\tau \in R^2$. Автору удалось получить достаточные условия на младшие члены $P_j(\xi)$, $j \leq m-1$, при которых многочлен $P(\xi)$ будет гиперболическим с данным весом.

Отметим, что в теории краевых задач для гиперболических уравнений хорошо известно, что корректность задачи может существенно зависеть от младших членов уравнения. Поэтому полученные в этой главе результаты, наверняка, найдут применение при исследовании, например, корректности задачи Коши для уравнений $P(D_x)u = f(x)$.

В диссертации имеются небольшие погрешности. Отмечу некоторые.

1. На стр. 8, 48 слово "полнота" нужно заменить на слово "плотность".

2. На стр. 16, 32 условие $p \leq q$ в Теореме 1.1.3, по-видимому, нужно заменить на условие $p < q$, поскольку в формулировке теоремы 2.19 из работы [3, стр. 31], которую Автор использует при доказательстве своей теоремы, указано строгое неравенство. Отметим, что в доказательстве теоремы 2.19 из [3] используется именно строгое неравенство.

3. В теореме 2.3.1 необходимо указывать, что константа в оценке (2.3.2) зависит от носителя функции f из правой части уравнения (2.3.1), либо выписывать более сложные неравенства с дополнительными требованиями на f.

4. Аналогичное замечание относится к теореме 2.3.3: необходимо указывать, что константа в оценке (2.3.6) зависит от носителей функций f и φ_j, $j = 0, \ldots, m-1$, из краевой задачи (2.3.3).

Указанные замечания представляются несущественными для оценки проделанной работы.

Отметим, что полученные Автором новые результаты о свойствах мультианизотропных соболевских пространств $W_2^{\mathfrak{R}}$, в также интересные факты о свойствах некоторых классов дифференциальных операторов дают возможность изучать общие краевые задачи для классов гипоэллиптических уравнений, а также проводить исследования разрешимости краевых задач для класса гиперболических уравнений. В связи с этим хотелось бы остановиться на некоторых, на мой взгляд, важных вопросах, непосредственно связанных с представленной диссертацией.

1. При доказательстве теоремы 2.3.3 о разрешимости краевой задачи (1) Автор использует доказанные теоремы о продолжении и о следах, а также некоторые результаты из работ Г. А. Карапетяна и Г. А. Петросян. Поэтому возникают вопросы об условиях разрешимости краевой задачи (1). Например, каким условиям должны удовлетворять граничные функции φ_j, $j = 0, \ldots, m-1$, в частности, при $f = 0$? Насколько эти условия близки к необходимым условиям разрешимости?

2. Известные результаты о некоторых классах гипоэллиптических уравнений в R^n, а также о краевых задачах для них в R^n_+ в соболевских пространствах со специальными весами показывают, что количество условий разрешимости может быть существенно уменьшено за счет выбора веса, при этом в ряде случаев можно доказывать более сильные результаты, а именно, безусловную разрешимость в таких пространствах. Поэтому возникает вопрос, можно ли усилить результаты о разрешимости краевой задачи (1) в мультианизотропных соболевских пространствах с подходящими весами?

3. Опираясь на доказанные теоремы о продолжении и следах, а также используя известную технику конструирования интегральных операторов, являющихся регуляризаторами для общих краевых задач в R^n_+ для квазиэллиптических уравнений (см. [24], [27]), можно ли доказать разрешимость общих краевых задач для рассматриваемого класса гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных соболевских пространствах?

Указанные вопросы следует воспринимать как пожелания Автору для дальнейшей работы в этом, безусловно, важном направлении.

Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Автором получен ряд новых результатов, имеющих важное значение в теории функциональных пространств и дифференциальных уравнений с частными производными. Следует отметить, что Автором продемонстрирована высокая аналитическая техника при выводе различных интегральных оценок. Результаты диссертации обоснованы полными доказательствами, своевременно опубликованы, неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах. По теме диссертации опубликовано 4 статьи в журналах из списка КВОН, из них 2 статьи в изданиях, индексируемых в Scopus. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

На основании сказанного считаю, что представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям КВОН РА, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и ее автор Хачатурян Микаел Артурович несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, математическая физика.

Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений
механико-математического факультета
Новосибирского государственного университета,
доктор физико-математических наук, профессор

Демиденко Геннадий Владимирович

30 мая 2024 г.

Адрес: 630090, Россия, г. Новосибирск, Пирогова, д. 1
Тел.: +7-913-931-1403, email: demidenk@math.nsc.ru

Подпись Демиденко Г.В. заверяю
Специалист Управления кадров НГУ
И.В. Анарина
«30» мая 2024 г.