ՀՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Կարապետյան Կարեն Իսկանդարի

# ԼՐԻՎ ԳԼԽԱՐԿՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՅՈՒՄԸ ԱՖԻՆԱԿԱՆ $AG(n,3)$ և ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ $PG(n,3)$ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ե. 13.05 «Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2024

---

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК РА

Карапетян Карен Искандарович

# ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНЫХ ШАПОК В АФФИННОЙ $AG(n,3)$ И ПРОЕКТИВНОЙ $PG(n,3)$ ГЕОМЕТРИЯХ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.05 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Ереван – 2024

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Ի. Ա. Կարապետյան

Պաշտոնական ընդիմախոսներ՝ ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Ա. Ալեքսանյան

ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Ս. Խ. Դարբինյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2024 թ. հուլիսի 15-ին, ժամը 14:00 -ին

ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում գործող 037 «Ինֆորմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում: Հասցեն 0014, ք. Երևան, փ. Պ. Սևակի 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ ԻԱՊԻ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2024 թվականի հունիսի 13-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,

ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր՝ Մ. Ե. Հարությունյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте проблем информатики и автоматизации НАН РА.

Научный руководитеь: кандидат физ.-мат. наук И. А. Карапетян

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук А. А. Алексанян

кандидат физ.-мат. наук С. Х. Дарбинян

Ведущая организация Ереванский государственный университет

Защита состоится 15 июля 2024 г. в 14:00 часов на заседании специализированного совета 037 «Информатика» действующего в институте проблем информатики и автоматизации НАН РА по адресу 0014, г. Ереван, ул. П. Севака 1.

С диссертации можно ознакомиться в библиотеке ИПИА НАН РА.

Автореферат разослан 13 июня 2024г.

Ученый секретарь специализированного совета,

доктор физ.-мат. наук М. Е. Арутюнян

## Աշխատանքի ընդհանուր նկարագիրը

**Թեմայի արդիականությունը:** Ատենախոսությունը նվիրված է լրիվ գլխարկների կառուցմանը n-չափանի աֆինական $AG(n,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում Գալուայի երեք տարր ունեցող $F_3 = \{0,1,2\}$ դաշտի վրա: Դիտարկվող խնդիրը սերտորեն առնչվում է դիսկրետ մաթեմատիկայի մի շարք բնագավառների խնդիրների հետ: Մասնավորապես, այն անմիջականորեն փոխկապակցված է վիճակագրական վերլուծության փորձերի նախագծման խնդիրների մաթեմատիկական մոդելների, Շտեյների եռյակների, գծային կոդերի կառուցման և այլ բնագավառների խնդիրների հետ: Դիտարկվող խնդիրն առաջացել է վիճակագրական վերլուծության փորձերի նախագծման խնդիրների մաթեմատիկական մոդելների հետազոտություններից: Վիճակագրական վերլուծության փորձերի նախագծման խնդիրների մաթեմատիկական մոդելները գրականությունում ավելի շատ հայտնի են որպես կոմբինատոր նախագծում (Combinatorial Design) կամ բլոկ սխեմաներ: Ընդհանուր դրվածքով բլոկ սխեմաները նկարագրվում են հետևյալ կերպ: Գտնել տրված $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ վերջավոր բազմության ենթաբազմությունների այնպիսի $A_1, A_2, \dots, A_m$ ընտանիք, որ յուրաքանչյուր $a_l$ տարրը պատկանի $k_l$ հատ ենթաբազմություններին, $A_j$-րդ ենթաբազմությունը պարունակի $r_j$ հատ տարր և տարրերի զույգերը, տարրերի եռյակները և այլն, պատկանեն տրված քանակությամբ ենթաբազմություններին [1]: Վիճակագրական վերլուծության փորձերը նախատեսված են հետազոտող խմբերի կողմից ստուգելու թողարկված ապրանքի նմուշների սարքին լինելը, դրանց վերագրված բնութագրիչների իսկությունը և այլն: R. C. Bose 1947 թվականի աշխատանքում [2], որը նվիրված է վիճակագրական վերլուծության փորձերի նախագծման մաթեմատիկական մոդելների ուսումնասիրմանը, ձևակերպել է նաև դրա հետ սերտորեն կապված հետևյալ խնդիրը: Տրված $d$ բնական թվի համար n-չափանի աֆինական $AG(n,q)$ և/կամ պրոյեկտիվ $PG(n,q)$ երկրաչափություններում $q$ հատ տարր պարունակող Գալուայի $F_q$ դաշտի վրա գտնել մեծագույն հզորություն ունեցող կետերի այնպիսի բազմություն, որ այդ բազմության կամայական $d$ հատ կետեր լինեն գծորեն անկախ: Հետագայում այդպիսի բազմությունները $d = 3$ դեպքում կոչվեցին գլխարկներ (caps): Ընդհանուր դեպքում աֆինական $AG(n,q)$ կամ պրոյեկտիվ $PG(n,q)$ երկրաչափություններում կետերի բազմությունը կոչվում է գլխարկ, եթե այն չի պարունակում իրարից տարբեր երեք համագիծ կետեր: Հետևաբար, եթե $C_{n,3} \subseteq AG(n,3)$ ենթաբազմությունը գլխարկ է, ապա դրա զույգ առ զույգ իրարից տարբեր $x, y, z \in C_{n,3}$ կետերի կամայական եռյակի համար տեղի

[1]M. Hall, Combinatorial Theory, Blaisell Publishing Company, 1967.
[2]R. C. Bose, “Mathematical theory of the symmetrical factorial design”, *Sankhya*, Vol. 8, pp. 107-166, 1947.

ունի $x + y + z \neq 0(\mathrm{mod}\ 3)$ անհավասարությունը: R. C. Bose 1947 թվականին այդ նույն աշխատանքում [2] որոշ $n$ և $q$ թվերի համար ստացել է մեծագույն գլխարկների հզորությունների հասանելի վերին գնահատականներ: Հետագայում ստացվել են մեծագույն գլխարկների նկարագրությունները և դրանց քանակները $AG(n,q)$ և $PG(n,q)$ երկրաչափություններում $n = 2,3$ և բազմաթիվ $q$-երի համար, որտեղ $q$-ն պարզ թիվ է կամ պարզ թվի աստիճան: Այժմ աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափություններում մեծագույն գլխարկների հզորությունների ճշգրիտ արժեքները հայտնի են միայն $n \in [1,2,\dots,6]$ թվերի համար: Ընդհանուր դեպքում քիչ բան է հայտնի գլխարկների կառուցման և դրանց մեծագույն հզորությունների մասին աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափություններում [3]: Հարկ է նշել, որ լրիվ գլխարկները (այդ թվում նվազագույն հզորությամբ) $PG(n,q)$-ում առնձնահատուկ նշանակություն ունեն գծային կոդերի կառուցման գործընթացներում: Եթե լրիվ գլխարկի կետերը գրվեն որպես մատրիցի սյուններ, ապա ստացված մատրիցի կամայական երեք սյունները կլինեն գծորեն անկախ և այն կլինի նվազագույնը չորս հեռավորությամբ գծային կոդի ստուգման մատրիցը: Չնայած որոշ հեղինակներ անգամ նշում են, որ մեծագույն գլխարկների կառուցման և դրանց հզորությունների որոշման խնդիրը դժվար է, բայց մինչ այժմ հայտնի չէ այն P թե NP-լրիվ (NP-դժվար) դասից է:

**Աշխատանքի հիմնական նպատակը և դրանում դիտարկված խնդիրները:** Աշխատանքի հիմնական նպատակը մեծ հզորությամբ լրիվ գլխարկների կառուցման նոր մեթոդների մշակումն է n-չափանի աֆինական $AG(n,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում Գալուայի երեք տարր ունեցող $F_3 = \{0,1,2\}$ դաշտի վրա: Դիտարկվել են հետևյալ խնդիրները:

- Ստանալ լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմությունների նկարագրությունը աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում:
- Մշակել լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմությունների կառուցման մեթոդներ աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում կամայական բնական n թվի համար:
- Կառուցել լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում օգտագործելով ստացված լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմությունները:

**Հետազոտության օբեկտները:** Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներն են լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմությունները և լրիվ գլխարկները աֆինական $AG(n,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում Գալուայի երեք տարր ունեցող $F_3 = \{0,1,2\}$ դաշտի վրա:

[3] N. D. Versluis, “On The Cap Set Problem, Upper bounds on maximal cardinalities of caps in dimensions seven to ten”, Delft University of Technology, pp. 1-52, July 2017.

**Հետազոտության մեթոդները:** Հետազոտությունները իրականացված են բազմությունների տեսության և կոմբինատորիկայի մեթոդների օգնությամբ:

**Գիտական նորույթը:** Ատենախոսությունում առաջարկված է նոր մոտեցում լրիվ գլխարկների կառուցման համար աֆինական $AG(n, 3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n, 3)$ երկրաչափություններում: Ներմուծվել է $P_n$-բազմության, իսկ այնուհետև լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմության հասկացությունները: Առաջարկվել է լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմությունների կառոցման երեք մեթոդ, որոնց կիրառմամբ կառուցվում են լրիվ գլխարկներ կամայական $n$ բնական թվի համար: Մշակվել է ծրագրային փաթեթ Python լեզվով, որի օգնությամբ հայտնաբերվել է

- լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմությունների կառուցման «վեց» անդրադարձ կոնստրուկցիան;
- տրված լրիվ $b$-հագեցած $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_6}$-բազմությունների օգնությամբ կառուցվել է ճիշտ 12 հատ լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմություններ (այդ փաստի իսկությունը տեսականորեն հիմնավորվել է), որտեղ $n = \sum_1^6 n_i$ և $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$-ը կամայական բնական թվեր են;
- մշակված ծրագրային փաթեթը հնարավորություն է ընձեռնում ստուգելու տրված բազմությունը լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմություն լինելու իրողությունը;
- մշակված ծրագրային փաթեթը հնարավորություն է տալիս ստուգելու լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմությունների օգնությամբ կառուցված բազմությունների լրիվ գլխարկ լինելը:

Կարծում ենք, որ հզոր հաշվողական ռեսուրսների (supercomputer) առկայության պարագայում հնարավոր կլինի հայտնաբերել նոր անդրադարձ կոնստրուկցիաներ լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմությունների կառուցման համար և հետևաբար ավելի մեծ լրիվ գլխարկներ:

**Պաշտպանությանը ներկայացվող հիմնական դրույթները:** Պաշտպանությանն են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները:

1. Ստացվել է $AG(n, 3)$-ի ենթաբազմությունը լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմություն լինելու նկարագրությունը:

2. Լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմությունների կառուցման համար մշակվել են անդրադարձ կոնստրուկցիաներ կամայական $n$ բնական թվի համար:

3. Կամայական $n$ և $m$ բնական թվերի համար կառուցվել են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n + m, 3)$ և $AG(n + m + 1, 3)$

երկրաչափություններում օգտագործելով լրիվ $b$-հագեցած $P_n$ և $P_m$-բազմությունները:

4. Կառուցվել են լրիվ գլխարկներ $AG(n, 3)$ և $AG(n+1, 3)$ երկրաչափություններում օգտագործելով լրիվ $b$-հագեցած կենտ $P_n$-բազմությունները:

5. Կառուցվել են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n, 3)$ երկրաչափությունում կամայական $n$ բնական թվի համար կիրառելով «երեք» («վեց») կոնստրուկցիան, երբ լրիվ $b$-հագեցած $P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$-բազմություններից ($P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$, $P_{n_4}$, $P_{n_5}$, $P_{n_6}$) գոնե երկուսը (երեքը) կենտ են:

6. Կառուցվել են լրիվ գլխարկներ պրոյեկտիվ $PG(n, 3)$ երկրաչափությունում կամայական $n$ բնական թվի համար օգտագործելով լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմությունները:

**Ստացված արդյունքների ապրոբացիան:** Ստացված արդյունքները զեկուցվել են Հայաստանում անցկացված մի շարք միջազգային գիտաժողովներում՝ 10th, 11th, 12th, 13th, 14th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, որոնք տեղի են ունեցել, համապատասխանաբար, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023 թվականններին, ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտի ընդհանուր սեմինարներում և ՀՀ ԳԱԱ մաթեմատիկական և տեխնիկական գիտությունների բաժանմունքի 2023 թվականի տարեկան ընդհանուր ժողովում:

**Հրապարակումները:** Հրապարակվել են 10 գիտական աշխատանքներ, որոնցից 9-ը վերաբերում են ատենախոսության թեմային:

**Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը:** Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երկու գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից (113 անուն): Աշխատանքի ծավալը 110 էջ է:

**Աշխատանքի բովանդակությունը:** Աշխատանքի ներածությունում նկարագրված է թեմայի արդիականությունը, նրանում դիտարկված խնդիրները և հիմնական նպատակը, հետազոտման մեթոդները, ինչպես նաև կապը դիսկրետ մաթեմատիկայի այլ բնագավառների խնդիրների հետ: Նկարագրված է նաև աշխատանքում ստացված արդյունքների գիտական նորույթը, գործնական կիրառությունը և պաշտպանությանը ներկայացվող հիմնական դրույթները:

Ատենախոսության առաջին գլուխը նվիրված է մեր կողմից ներմուծված լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմությունների կառուցման մեթոդներին, աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափություններում, որտեղ $n$-ը կամայական բնական թիվ է: Աշխատության առաջին գլխի 1. 1 պարագրաֆում բերված են հիմնական նշանակումները և սահմանումները: $AG(n,3)$–ի կետերի նշանակման համար կիրառել ենք գիտական գրականությունում ընդունված գրելաձևը օգտագործելով հունական և լատինական տառերը $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$,…, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$,… և այլն: Բնական թվերի սկզբնական $\{1,2,\cdots,n\}$ միջակայքը նշանակված է $[1,\ n]$-ով: $B_n$–ով նշանակված է $AG(n,3)$ տարածության հետևյալ $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x \in AG(n,3), x_i = 1,2;\ i \in [1,n]\}$ կետերի բազմությունը: $B_n'$-ով նշանակված է $B_n$–ի այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի մեկին հավասար կոորդինատների քանակը կենտ է և $B_n''$-ով $B_n$–ի մնացած կետերի բազմությունը՝ $B_n'' = B_n \setminus B_n'$: Պարզ է, որ $B_n''$-ի յուրաքանչյուր կետի մեկին հավասար կոորդինատների քանակը զույգ է և $B_n' \cup B_n'' = B_n$: $AG(n,3)$ աֆինական երկրաչափության $x$ կետի 0-ին հավասար կոորդինատների բազմությունը նշանակված է $x(0) = \{i \mid x_i = 0, i \in [1,n]\}$ –ով: Տրված $\alpha \in AG(n,3)$ կետի համար $X(\alpha)$-ով նշանակված է կետերի $\{x \mid x \in AG(n,3), x(0) = \alpha(0)\}$ բազմությունը: Վերջավոր $A$ բազմության տարրերի քանակը նշանակված է $|A|$-ով: Աշխատանքում մեծագույն գլխարկների հզորությունները $AG(n,q)$-ում և $PG(n,q)$-ում նշանակված են, համապատասխանաբար, $c_{n,q}$-ով և $c_{n,q}'$-ով:

**Սահմանում 1. 1:** Երկու $A \subseteq AG(n,\ 3)$ և $B \subseteq AG(m,3)$ բազմությունների դեկարտյան արտադրյալը (կցումը) սահմանվում է որպես $AG(n+m,\ 3)$ աֆինական երկրաչափության կետերի հետևյալ $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) \mid x^1 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A, x^2 = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in B\}$ բազմություն և նշանակվում է $AB$-ով: Նման ձևով է սահմանվում նաև երեք, չորս և այլ քանակությամբ բազմությունների կցումը:

**Սահմանում 1. 2**: $AG(n,3)$ աֆինական երկրաչափության կետերի $A$ բազմությունը կանվանենք $P_n$-բազմություն, եթե այն բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

($i$) ցանկացած երկու տարբեր $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ և $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ կետերի համար գոյություն ունի այնպիսի $i$ կոորդինատ, որ $\alpha_i = \beta_i = 0$, որտեղ $i \in [1,n]$;

($ii$) ցանկացած երեք տարբեր $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ կետերի համար տեղի ունի $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 (mod\ 3)$ անհավասարությունը:

**Սահմանում 1. 3:** $P_n$-բազմությունը կանվանենք լրիվ, եթե գոյություն չունի այնպիսի $\alpha \in AG(n,3)$ կետ, որ $\alpha \notin P_n$ և $P_n \cup \{\alpha\}$–ն ևս լինի $P_n$-բազմություն:

**Սահմանում 1. 4:** $P_n$-բազմությունը կանվանենք *b*-հազեցած, եթե կամայական $\alpha \in P_n$ կետի համար ստույգ է $X(\alpha) \subseteq P_n$ առնչությունը:

**Սահմանում 1. 5**: Բազմությունը կոչվում է լրիվ *b*-հազեցած, եթե այն մեկ այլ *b*-հազեցած բազմության սեփական ենթաբազմություն չէ:

**Սահմանում 1. 6:** $AG(n,3)$ աֆինական երկրաչափության կետերի $C_{n,3}$ բազմությունը կոչվում է գլխարկ, եթե $C_{n,3}$-ին պատկանող և իրարից տարբեր ոչ մի երեք $\alpha, \beta, \gamma$ կետերը համագիծ չեն:

Դժվար չէ համոզվել, որ եթե իրարից տարբեր երեք $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ կետերը համագիծ չեն, ապա այդ կետերի համար տեղի ունի $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 (mod\ 3)$ անհավասարությունը:

**Սահմանում 1. 7:** Գլխարկը կոչվում է լրիվ, եթե այն մեկ այլ գլխարկի սեփական ենթաբազմություն չէ:

**Սահմանում 1. 8:** $P_n$-բազմությունը կանվանենք կենտ, եթե յուրաքանչյուր $\alpha \in P_n$ կետի համար $|\alpha(0)|$-ն կենտ թիվ է և զույգ, եթե յուրաքանչյուր $\alpha \in P_n$ կետի համար $|\alpha(0)|$-ն՝ զույգ է:

Առաջին գլխի 1. 2 պրագրաֆում շարադրված են հիմնական օժանդակ պնդումներն ու լեմաները: Իսկ առաջին գլխի 1.3 պարագրաֆը նվիրված է լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմությունների նկարագրությանը և ապացուցված է հետևյալ

**Թեորեմ 1. 3. 1**: Որպեսզի աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափության կետերի $A$ բազմությունը լինի լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմություն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի լրիվ $b$-հազեցած բազմություն և բավարարի հետևյալ երկու պայմաններին.

(1) ցանկացած երկու տարբեր $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in A$ կետերի համար գոյություն ունի այնպիսի $i$ կոորդինատ, որ $\alpha_i = \beta_i = 0$, որտեղ $i \in [1, n]$;

(2) ցանկացած երեք տարբեր $\alpha, \beta, \gamma \in A$ կետերի համար տեղի ունի $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0)$ կրկնակի հավասարությունը կամ գոյություն ունի այնպիսի $j$ կոորդինատ, որ այդ երեք կետերից երկուսի՝ ասենք $\alpha$–ի և $\beta$-ի $j$ –րդ կոորդինատը բավարարի $\alpha_j = \beta_j = 0$ պայմանին, իսկ $\gamma$-ի $j$-րդ կոորդինատը՝ $\gamma_j \neq 0$:

Այդ նույն գլխի 1.4 պարագրաֆը նվիրված է $P_n$-բազմությունների կառուցման 1-ին մեթոդին, որն ելնելով արդեն կառուցված (տրված) $P_n$-բազմություններից $AG(n,3)$-ում հնարավորություն է ընձեռնում կառուցելու $P_{n+m}$-բազմություններ $AG(n+m,3)$-ում, որտեղ $n$, $m$-ը կամայական բնական թվեր են: Ապացուցված է հետևյալ

**Թեորեմ 1. 4. 1**: Ցանկացած $n$ և $m$ բնական թվերի համար ճիշտ են հետևյալ երկու պնդումները:

**1:** Եթե $P_n$-բազմությունը լրիվ է, ապա $P_nB_m$ և $B_mP_n$ լրիվ $P_{n+m}$-բազմություններ են:

**2:** Եթե $P_n$-բազմությունը լրիվ $b$-հագեցած է, ապա $P_nB_m$ և $B_mP_n$-ը լրիվ $b$-հագեցած $P_{n+m}$-բազմություններ են:

Առաջին գլխի 1.5 պարագրաֆը նվիրված է մեր կողմից մշակված լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմությունների կառուցման հիմնական մեթոդներից մեկին, այսպես կոչված «երեք» կոնստրուկցիային: Առաջարկված է մի անդրադարձ բանաձև (սխեմա), որը ցանկացած $n$ բնական թվի համար կառուցում է լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմություն, ունենալով $n = n_1 + n_2 + n_3$ ներկայացումը, որտեղ $n_1, n_2, n_3$ կամայական բնական թվեր են: Ապացուցված է հետևյալ

**Թեորեմ 1. 5. 1** («երեք» կոնստրուկցիա): Հետևյալ անդրադարձ բանաձևը $P_n = P_{n_1}P_{n_2}B_{n_3} \cup P_{n_1}B_{n_2}P_{n_3} \cup B_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}$ առաջացնում է լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմություններ, որտեղ $n = n_1 + n_2 + n_3$, $P_1 = \{(0)\}$, $P_2 = \{(0,1),(0,2)\}$ սկզբնական բազմություններ են և $n_1$, $n_2$, $n_3$ կամայական բնական թվեր են:

**Հետևանք 1. 5. 1**: Եթե $P_{n_1}, P_{n_2}$ և $P_{n_3}$-բազմությունները լրիվ $b$-հագեցած են, ապա $P_n = P_{n_1}P_{n_2}B_{n_3} \cup P_{n_1}B_{n_2}P_{n_3} \cup B_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}$ բազմությունը լրիվ $b$-հագեցած է, որտեղ $n = n_1 + n_2 + n_3$ և $n_1$, $n_2$, $n_3$ ցանկացած բնական թվեր են:

**Հետևանք 1. 5. 2**: Տրված $n$ բնական թվի համար «երեք» կոնստրուկցիայով կարելի է կառուցել միմյանցից տարբեր $C_{n-1}^2$ հատ լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմություններ, որտեղ $n \geq 3$

Առաջին գլխի 1. 6 պարագրաֆում ներկայացված է լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմությունների կառուցման երրորդ մեթոդը, այսպես կոչված «վեց» կոնստրուկցիա: Առաջարկված է մի անդրադարձ բանաձև (սխեմա), որը ցանկացած $n \geq 6$ բնական թվի համար կառուցում է լրիվ $b$-հագեցած $P_n$-բազմություններ, ունենալով $n = \sum_1^6 n_i$ ներկայացումը, որտեղ $n_1$, $n_2$, $n_3, n_4, n_5, n_6$ կամայական բնական թվեր են:

**Թեորեմ 1. 6. 1** («վեց» կոնստրուկցիա)։ Հետևյալ անդրադարձ բանաձևը՝ $P_n = \cup_1^{10} A_i$ առաջացնում է լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմություններ, որտեղ $P_1 = \{(0)\}$, $P_2 = \{(0,1),(0,2)\}$ սկզբնական բազմություններ են, $n = \sum_1^6 n_i$, $n_1, n_2, \dots, n_6$ կամայական բնական թվեր են և

$$A_1 = P_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}B_{n_4}B_{n_5}B_{n_6}, \quad A_6 = B_{n_1}B_{n_2}P_{n_3}B_{n_4}P_{n_5}P_{n_6},$$

$$A_2 = P_{n_1}P_{n_2}B_{n_3}B_{n_4}B_{n_5}P_{n_6}, \quad A_7 = B_{n_1}P_{n_2}B_{n_3}P_{n_4}P_{n_5}B_{n_6},$$

$$A_3 = P_{n_1}B_{n_2}P_{n_3}B_{n_4}P_{n_5}B_{n_6}, \quad A_8 = B_{n_1}P_{n_2}B_{n_3}B_{n_4}P_{n_5}P_{n_6},$$

$$A_4 = B_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}P_{n_4}B_{n_5}B_{n_6}, \quad A_9 = P_{n_1}B_{n_2}B_{n_3}P_{n_4}B_{n_5}P_{n_6},$$

$$A_5 = B_{n_1}B_{n_2}P_{n_3}P_{n_4}B_{n_5}P_{n_6}, \quad A_{10} = P_{n_1}B_{n_2}B_{n_3}P_{n_4}P_{n_5}B_{n_6}:$$

**Հետևանք 1. 6. 1**։ Եթե $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_6}$-ը լրիվ $b$-հազեցած բազմություններ են, ապա $P_n = \cup_1^{10} A_i$-ն լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմություն է, որտեղ $n = \sum_1^6 n_i$ և $n_1$, $n_2$, …, $n_6$ ցանկացած բնական թվեր են։

**Հետևանք 1. 6. 2**։ Տրված $n$ բնական թվի համար «վեց» կոնստրուկցիայով կարելի է կառուցել միմյանցից տարբեր $C_{n-1}^5$ հատ լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմություններ, որտեղ $n \geq 6$։

**Հետևանք 1. 6. 3**։ $|P_6| = 80$։

**Թեորեմ 1. 6. 2**։ Տրված $P_{n_1}$, $P_{n_2}, \dots$, $P_{n_6}$ լրիվ $b$-հազեցած բազմությունների կիրառմամբ «վեց» կոնստրուկցիայով կարելի է կառուցել իրարից տարբեր ճիշտ 12 հատ լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմություններ, որտեղ $n = \sum_1^6 n_i$ և $n_i$-երը ցանկացած բնական թվեր են։

Մեծ հզորություններով լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմություններ և հետևաբար մեծ գլխարկներ կառուցելու համար, առաջին գլխի վերջին՝ 1.7 պարագրաֆում ձևակերպված է հետևյալ

**Խնդիր:** Դիցուք $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ որևէ վերջավոր բազմություն է և $A \subseteq S$ նրա կամայական ենթաբազմությունն է։ Համարենք, որ $A$-ի կշիռը $2^{n-|A|}$ է և այն նշանակենք $w(A)$-ով։ Պահանջվում է գտնել $S$ բազմության ենթաբազմությունների այնպիսի $B = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ բազմություն, որ բավարարվեն հետևյալ երեք պայմանները.

(1) ցանկացած երկու $A_i$, $A_j \in B$ ենթաբազմությունների համար տեղի ունի $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ առնչությունը, որտեղ $1 \leq i, j \leq m$,

(2) ենթաբազմությունների կամայական եռյակի $A_i, A_j, A_k \in B$ համար գոյություն ունի այնպիսի $a_l \in S$ տարր, որ $a_l$-ն պատկանում է $A_i, A_j, A_k$

ենթաբազմություններից միայն երկուսին, ասենք $a_l \in A_i$, $a_l \in A_j$, բայց $a_l \notin A_k$, որտեղ $1 \leq i, j, k \leq m$, $1 \leq l \leq n$,

(3) $\sum_1^m w(A_i)$-ը լինի մեծագույնը:

Ատենախոսության երկրորդ գլուխը նվիրված է գլխարկների կառուցմանը $AG(n, 3)$ և $PG(n, 3)$ երկրաչափություններում: Երկրորդ գլխի 2.1 պարագրաֆում լրիվ $b$-հագեցած $P_n$ և $P_m$-բազմությունների օգնությամբ կառուցվում են լրիվ գլխարկներ $AG(n+m, 3)$ և $AG(n+m+1, 3)$-ում: Ապացուցված թեորեմներից հետևում են մեծագույն գլխարկների հզորությունների որոշ հայտնի ստորին գնահատականներ:

**Թեորեմ 2. 1. 1**: Եթե $P_n$ և $P_m$-բազմությունները լրիվ $b$-հագեցած են, ապա $C_{n+m,3} = P_n B_m \cup B_n P_m$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է $AG(n+m, 3)$-ում, որտեղ $n$ և $m$ կամայական բնական թվեր են:

**Հետևանք 2. 1. 1:** $c_{n+m,3} \geq |P_n||B_m| + |B_n||P_m|$ կամայական $n$ և $m$ բնական թվերի համար:

**Հետևանք 2. 1. 2:** $c_{n+1,3} \geq 2|P_n| + |B_n|$ կամայական $n$ բնական թվի համար:

**Հետևանք 2. 1. 3**: $c_{9,3} \geq 1056$, $c_{10,3} \geq 2240$ [4]:

**Թեորեմ 2. 1. 2**: Եթե $P_n$ և $P_m$-բազմությունները լրիվ $b$-հագեցած են, ապա $C_{n+m+1,3} = P_n P_m\{(0)\} \cup (P_n B_m \cup B_n P_m)\{(1)\} \cup B_{n+m}\{(2)\}$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է $AG(n+m+1,3)$-ում, որտեղ $n$ և $m$ կամայական բնական թվեր են:

**Հետևանք 2. 1. 3:** Ցանկացած $n$ և $m$ բնական թվերի համար ճիշտ է $c_{n+m+1,3} \geq$

$|P_n||P_m| + |P_n||B_m| + |B_n||P_m| + |B_{n+m}|$, որտեղ $P_n$ և $P_m$ լրիվ $b$-հագեցած բազմություններ են:

**Հետևանք 2. 1. 4:** $c_{5,3} \geq 42$:

Նույն գլխի 2. 2 պարագրաֆում կառուցվում են գլխարկներ օգտագործելով լրիվ $b$-հագեցած կենտ $P_n$-բազմություններ:

**Թեորեմ 2. 2. 1:** Եթե $P_n$-ը լրիվ $b$-հագեցած կենտ բազմություն է, ապա $C_{n,3} = P_n \cup B_n'$ լրիվ գլխարկ է:

**Թեորեմ 2. 2. 2:** Եթե $P_n$-ը լրիվ $b$-հագեցած կենտ բազմություն է, ապա $C_{n,3} = P_n \cup B_n''$ լրիվ գլխարկ է:

[4] Y. Edel and J. Bierbrauer, “Large caps in small spaces”, Designs, Codes and Cryptography, Vol. 23(2), pp. 197-212, 2001.

**Հետևանք 2. 2. 1:** $c_{6,3} \geq 112$ [5,6]:

**Հետևանք 2. 2. 2:** $c_{11,3} \geq 5504$:

Նշենք, որ ստացված վերջին ստորին գնահատականը առայժմ լավագույնն է և այն պարունակում է առնվազն 464 կետ ավելի, քան մեծագույն գլխարկը, որը կարելի է ստանալ հայտնիներից բազմապատկման գործողության միջոցով:

**Սահմանում 2. 1:** $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in AG(n, 3)$ կետի հայելային շրջում ասելով կհասկանանք $\hat{\alpha} = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1) \in AG(n, 3)$ կետը:

**Սահմանում 2. 2:** $P_n$-բազմության հայելային շրջում ասելով կհասկանանք դրա բոլոր կետերի հայելային շրջումների բազմությունն և կնշանակենք $\widehat{P_n}$-ով:

**Թեորեմ 2. 2. 3:** Եթե $P_n$-ը լրիվ $b$-հազեցած կենտ բազմություն է, ապա $C_{n,3} = \widehat{P_n} \cup B'_n$ ($C_{n,3} = \widehat{P_n} \cup B''_n$ ) լրիվ գլխարկ է:

$AG(n, 3)$-ում հետևյալ $e_{1,1} = (1, 0, \dots, 0)$, $e_{1,2} = (2, 0, \dots, 0)$, $e_{2,1} = (0, 1, \dots, 0)$, $e_{2,2} = (0, 2, \dots, 0)$, …, $e_{n,1} = (0, 0, \dots, 1)$, $e_{n,2} = (0, 0, \dots, 2)$ կետերի բազմությունը նշանակենք $E_n$-ով: Ապացուցված է հետևյալ

.

**Թեորեմ 2. 2. 4**: Դիցուք $P_{2n}$-ը լրիվ $b$-հազեցած կենտ բազմություն է և յուրաքանչյուր $\alpha \in P_{2n}$ կետի համար տեղի ունի $|\alpha(0)| \geq 3$ անհավասարությունը: Եթե $P_{2n} \cap \widehat{P_{2n}} = \emptyset$, ապա $C_{2n+1,3} = \{P_{2n} \cup B'_{2n}\}\{(0)\} \cup \{\widehat{P_{2n}} \cup B'_{2n}\}\{(1)\} \cup \{E_{2n}\}\{(2)\}$ բազմությունը գլխարկ է:

Նշենք, որ բերված են երեք օրինակներ, որոնք հիմնավորում են Թեորեմ 2. 2. 4-ում յուրաքանչյուր $\alpha \in P_{2n}$ կետի համար $|\alpha(0)| \geq 3$, $P_{2n} \cap \widehat{P_{2n}} = \emptyset$ և տարածության չափողականության զույգ լինելու պահանջների էական լինելը:

**Հետևանք 2. 4. 1:** $c_{7,3} \geq 236$ [5]:

Երկրորդ գլխի 2. 3 պարագրաֆում դիտարկված է «երեք» կոնստրուկցիայի օգնությամբ լրիվ գլխակների կառուցումը, երբ $P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$-բազմություններից առնվազն երկուսը կենտ են: Ապացուցված թեորեմից հետևում է հայտնի և առայժմ լավագույն ստորին գնահատականը գլխարկների համար $AG(10, 3)$-ում:

---

[5] A. R. Calderbank and P. C. Fishburn, “Maximal three-independent subsets of $\{0, 1\ 2\}^n$”, Designs, Codes and Cryptography, Vol. 4, pp. 203-211, 1994.

[6] A. Potechin, “Maximal caps in $AG(6, 3)$”, Designs, Codes and Cryptography, Vol. 46, pp. 243-259, 2008

**Թեորեմ 2. 3. 1:** Դիցուք տրված $P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$ բազմությունները լրիվ $b$-հազեցած են: Եթե $P_{n_1}$, $P_{n_2}$ և $P_{n_3}$ բազմություններից գոնե երկուսը կենտ են, ասենք $P_{n_1}$և $P_{n_2}$-ը, ապա $C_{n,3} = P_n \cup B'_{n_1}B'_{n_2}B_{n_3}$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է, որտեղ $P_n = P_{n_1} P_{n_2}B_{n_3} \cup P_{n_1} B_{n_2}P_{n_3} \cup B_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}$, $n = n_1 + n_2 + n_3$ և $n_1, n_2, n_3$-ը կամայական բնական թվեր են:

**Հետևանք 2. 3. 1.** $c_{10,3} \geq 2240$ [4]:

Երկրորդ գլխի 2. 4 պարագրաֆում դիտարկված է «վեց» կոնստրուկցիայի օգնությամբ լրիվ գլխակների կառուցումը, երբ $P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$, $P_{n_4}$, $P_{n_5}$ և $P_{n_6}$-բազմություններից գոնե երեքը կենտ են:

**Թեորեմ 2. 4. 1**: Դիցուք տրված $P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, P_{n_4}, P_{n_5}$ և $P_{n_6}$-բազմությունները լրիվ $b$-հազեցած են: Եթե այդ բազմություններից գոնե երեքը, ասենք՝ $P_{n_1}$, $P_{n_2}$ և $P_{n_3}$ կենտ են, ապա $C_{n,3} = P_n \cup B'_{n_1}B'_{n_2}B'_{n_3}B_{n_4}B_{n_5}B_{n_6}$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է, որտեղ $P_n = \cup_1^{10} A_i$ ($A_i$-երի համար տես Թեորեմ 1. 6. 1 ), $n = \sum_1^6 n_i$ և $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$-ը կամայական բնական թվեր են:

Երկրորդ գլխի վերջին 2. 5 պարագրաֆում ներկայացված է մեր կողմից $PG(n,3)$-ում լրիվ գլխարկների կառուցման մի մեթոդ, որը նույնպես հիմնված է $AG(n,3)$-ում լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմության հասկացության վրա:

Նշենք, որ պրոյեկտիվ երկրաչափությունում ամեն մի կետ ունի գոնե մեկ ոչ 0-ական կոորդինատ, այսինքն՝ $0 = (0,0,\dots.0) \notin PG(n,3)$: Հիշեցնենք, որ պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափությունում $\alpha$ և $\beta$ կետերը համարվում են նույնը, եթե $\alpha = \mu\beta$, որտեղ $\mu \in \{1, 2\}$: Իրարից տարբեր $\alpha, \beta, \gamma \in PG(n,3)$ կետերը կոչվում են համագիծ, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $k, l, m \in \{1, 2\}$, թվեր, որ $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0(mod\ 3)$: Ուստի կետերի $C'_{n,3} \subseteq PG(n,3)$ բազմությունը գլխարկ է, եթե զույգ առ զույգ իրարից տարբեր կամայական $\alpha$, $\beta, \gamma \in C'_{n,3}$ կետերի համար $k\alpha + l\beta + m\gamma \neq 0(mod\ 3)$ կամայական $k, l, m \in \{1, 2\}$ թվերի համար:

**Թեորեմ 2. 5. 1**: Եթե $P_n$-ը լրիվ $b$-հազեցած բազմություն է $AG(n,3)$-ում, ապա $C'_{n,3} = P_n\{(1)\} \cup B_n^1\{(0)\}$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափությունում, որտեղ $B_n^1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) | \alpha_1 = 1, \alpha_i = 1,2; 2 \leq i \leq n\}$ և $n$-ը կամայական բնական թիվ է:

**Հետևանք 2. 5. 1:** $c'_{n,3} \geq |P_n| + 2^{n-1}$:

**Հետևանք 2. 5. 2:** $c'_{6,3} \geq 112$ [7]:

[7] R. Hill, “On the largest size of cap in $S_{5,3}$”, Atti Accad. Naz. Lincei Rendiconti, Vol. 54, pp. 378-384, 1973.

**Հիմնական արդյունքներն ու հետևությունները**

Ատենախոսությունում առաջարկված է նոր մոտեցում լրիվ գլխարկների կառուցման համար աֆինական $AG(n,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում, որը հիմնված է մեր կողմից ներմուծված լրիվ $b$-հազեցած $P_n$ -բազմության հասկացության վրա:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

1. Ստացվել է լրիվ $b$-հազեցած կետերի $A \subset AG(n,3)$ բազմությունը լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմություն լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:
2. Մշակվել են երեք մեթոդ լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմությունների կառուցման համար, որոնց թվում են «երեք» ($n \geq 3$) և «վեց» ($n \geq 6$) անդրադարձ կոնստրուկցիաները կամայական $n$ բնական թվի համար:
3. Լրիվ $b$-հազեցած $P_n$ և $P_m$-բազմությունների օգնությամբ կառուցվել են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n+m,3)$ և $AG(n+m+1,3)$ երկրաչափություններում կամայական $n$, $m$ բնական թվերի համար, որոնցից հետևում են որոշ հայտնի արդյունքներ:
4. Լրիվ $b$-հազեցած կենտ $P_n$-բազմությունների օգնությամբ կառուցվել են լրիվ գլխարկներ $AG(n,3)$ և $AG(n+1,3)$ երկրաչափություններում, որոնք ընդհանրացնում են որոշ հայտնի արդյունքներ:
5. Եթե լրիվ $b$-հազեցած $P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}$-բազմություններից գոնե երկուսը կենտ են, ապա «երեք» կոնստրուկցիայի միջոցով կառուցվել են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում:
6. Եթե լրիվ $b$-հազեցած $P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$, $P_{n_4}$, $P_{n_5}$, $P_{n_6}$-բազմություններից գոնե երեքը կենտ են, ապա «վեց» կոնստրուկցիայի միջոցով կառուցվել են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում:
7. Լրիվ $b$-հազեցած $P_n$-բազմության օգնությամբ կառուցվել են լրիվ գլխարկներ պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափությունում կամայական $n$ բնական թվի համար:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրապարակված աշխատանքների ցանկը


1. Karen Karapetyan, “Large Caps in Affine Space”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 28 - October 2, pp. 82-83, 2015. https://csit.am/2015/proceedings/DMCA/DMCA9.pdf

2. Karen Karapetyan, “On the Complete Caps in Galois Affine Space AG(n,3)”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 25 – 29, p. 205, 2017. https://csit.am/2017/Proceedings/DMCA/DMCA8.pdf

3. Iskandar Karapetyan and Karen Karapetyan, “On the Caps in Affine Space AG(n,3)”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 23 – 27, pp. 100-101, 2019. https://csit.am/2019/proceedings/DMCA/DMCA4.pdf

4. I. A. Karapetyan and K. I. Karapetyan, “The Complete Caps in Projective Geometry PG$(n,3)$”, ԼՐԱԲԵՐ ԳԻՏԱԿԱՆ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ (ՀԱՊՀ), մաս 1, էջեր 35-44, 2021. ISBN:978-9939-79-027-5

5. Iskandar Karapetyan and Karen Karapetyan, “Complete Caps in Projective Geometry PG$(n,3)$”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 27 - October 1, pp. 57-60, 2021. https://csit.am/2021/proceedings/DMCA/DMCA_3.pdf

6. Karen I. Karapetyan, “Complete Caps in Affine Geometry $AG(n,3)$”, Mathematical Problems of Computer Science 57, pp. 56-64, 2022. https://doi.org/10.51408/1963-0087

7. Iskandar Karapetyan and Karen Karapetyan, “Complete Caps in $AG(n,3)$”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technolgies, Yerevan, Armenia, September 25-30, pp.135-136, 2023. https://doi.org/10.51408/csit2023_30

8. Iskandar Karapetyan and Karen Karapetyan, “Complete Caps in Projective Geometry $PG(n,3)$”, AIP Conference Proceedings, Vol. 2757, 040003-1 - 040003-5, 2023. https://doi.org/10.1063/5.0135975

9. Iskandar Karapetyan and Karen Karapetyan, “Complete Caps in Affine Geometry $AG(n,3)$”, Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 34, No. 1, pp. 74–91, 2024. https://doi.org/10.1134/S1054661824010097

Karen Iskandar Karapetyan

# CONSTRUCTION OF COMPLETE CAPS IN AFFINE AG(n,3) AND PROJECTIVE PG(n,3) GEOMETRIES

## Abstract


In the thesis, a new approach is proposed to construct complete caps in affine $AG(n,3)$ and projective $PG(n,3)$ geometries, based on the notion of a complete $b$-saturated $P_n$-sets introduced by the author. The following results are presented in the work.

1. Necessary and sufficient conditions are obtained for the complete $b$-saturated set of points $A \subset AG(n,3)$ to be a complete $b$-saturated $P_n$-set.

2. Three methods have been developed for constructing complete $b$-saturated $P_n$-sets, including «three» ($n \geq 3$) and «six» ($n \geq 6$) recurrent constructions.

3. Using complete $b$-saturated $P_n$ and $P_m$-sets, some complete caps are constructed in affine $AG(n+m,3)$ and $AG(n+m+1,3)$ geometries for arbitrary natural numbers $n$ and $m$, implying some known results.

4. Using complete $b$-saturated odd $P_n$-sets, complete caps are constructed in the affine geometries $AG(n,3)$ and $AG(n+1,3)$, which generalize some known results.

5. If at least two of three complete $b$-saturated $P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$-sets are odd, then using «three» construction complete caps are constructed in the affine geometry $AG(n,3)$.

6. If at least three of six complete $b$-saturated $P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$, $P_{n_4}$, $P_{n_5}$, $P_{n_6}$-sets are odd, then using «six» construction complete caps are constructed in the affine geometry $AG(n,3)$.

7. Using complete $b$-saturated $P_n$-set, complete caps are constructed in projective $PG(n,3)$ geometry for any natural number $n$.

Карапетян Карен Искандарович

# ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНЫХ ШАПОК В АФФИННОЙ $AG(n,3)$ И ПРОЕКТИВНОЙ $PG(n,3)$ ГЕОМЕТРИЯХ

## Резюме

В диссертации предлагается новый подход к построению полных шапок в аффинной $AG(n,3)$ и проективной $PG(n,3)$ геометриях, основанный на понятии полных $b$-насыщенных $P_n$-множества введенный автором. В тезисе представляются следующие результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы полное $b$-насыщенное множество точек $A \subset AG(n,3)$ было полным $b$-насыщенным $P_n$-множеством.

2. Разработаны три метода построения полных $b$-насыщенных $P_n$-множеств, в том числе «три» ($n \geq 3$) и «шесть» ($n \geq 6$) рекуррентные конструкции.

3. Используя полные $b$-насыщенные $P_n$ и $P_m$-множества, полные шапки строятся в аффинной $AG(n+m,3)$ и $AG(n+m+1,3)$ геометриях для произвольных натуральных чисел $n$ и $m$, из которых следуют некоторые известные результаты.

4. Используя полные $b$-насыщенные нечетные $P_n$-множества, строятся полные шапки в аффинных геометриях $AG(n,3)$ и $AG(n+1,3)$, которые обобщают некоторые известные результаты.

5. Если хотя бы два из трех полных $b$-насыщенных $P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$-множеств нечетны, то с помощью конструкции «три» строятся полные шапки в аффинной геометрии $AG(n,3)$.

6. Если хотя бы три из шести полных $b$-насыщенных $P_{n_1}$, $P_{n_2}$, $P_{n_3}$, $P_{n_4}$, $P_{n_5}$, $P_{n_6}$-множеств нечетны, то с помощью конструкции «шесть» строятся полные шапки в аффинной геометрии $AG(n,3)$.

7. Используя полное $b$-насыщенное $P_n$-множество, строятся полные шапки в проективной геометрии $PG(n,3)$ для любого натурального числа n.