«УТВЕРЖДАЮ»

И.о. первого проректора

федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования

«Южный федеральный университет»

доктор химических наук, с.н.с.

_______________ А.В. Метелица

«_12_» мая 2025 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Южный федеральный университет» на диссертацию Григора Арменовича Киракосяна «О некоторых классах интегральных операторов типа $\mathcal{L}$-свертки», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, математическая физика»

Актуальность темы диссертации

Данная диссертация посвящена исследованию вопросов обратимости и фредгольмовости матричных операторов с компонентами вида $U^*m(a)U$ и $\pi_+ \, U^*m(a)U \, \pi_+^0$, где U – частичная изометрия в $L_2(\mathbb{R})$ специального типа, $m(a)$ – оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R})$, π_+^0 – оператор вложения из $L_2(\mathbb{R}_+)$ в $L_2(\mathbb{R})$, а π_+ – оператор проекции из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$. В частности, в случае, когда U совпадает с преобразованием Фурье F, операторы $U^*m(a)U$ и $\pi_+ U^*m(a)U \pi_+^0$ совпадают с оператором свёртки и оператором Винера–Хопфа соответственно. В случае, когда U совпадает со спектральным преобразованием самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля $\mathcal{L}$ (т.е. с оператором U, удовлетворяющему равенству $U^*\mathcal{L}U = m(\lambda^2)$), порожденного дифференциальным выражением

$$(ly)(x) := -y''(x) + v(x)y(x),$$

где $v(x)$ – суммируемая с весом $1 + |x|$ функция, эти операторы называются операторами $\mathcal{L}$-свертки и $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа соответственно. Они были введены и исследованы А. Г. Камаляном и И. М. Спитковским. Частный случай безотражательного потенциала в безвесовых пространствах Лебега исследован А. Г. Камаляном, М. И. Караханяном, И. М. Спитковским и другими авторами.

При дополнительных предположениях о принадлежности символа a некоторым классам мультипликаторов указанные операторы непрерывным образом могут быть продолжены на весовые пространства Лебега с произвольным весом Макенхаупта. Теория Фредгольма скалярного оператора Винера–Хопфа в весовых пространствах $L_p(\mathbb{R}_+, w)$ построена А. Бётчером и И. М. Спитковским. Таким образом, рассматриваемая тематика в настоящее время интенсивно развивается, причём значительная часть перечисленных выше работ выполнена в последнее десятилетие. Это, а также наличие различных прикладных задач, в которых возникают интегральные операторы типа свёртки, свидетельствуют об актуальности темы диссертации.

Содержание диссертации и научная новизна

Диссертационная работа Г.А. Киракосяна состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитированной литературы.

Первые две главы носят предварительный характер. Приведены сведения из спектральной теории оператора Штурма–Лиувилля и теории операторов Тёплица в весовых пространствах, введены понятия операторов $\mathcal{L}$-свёртки и $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа, доказаны некоторые факты, необходимые для дальнейшего изложения. В частности, пользуясь техникой интерполяционных пространств, доказана компактность оператора Ганкеля с непрерывным символом в весовых пространствах.

В третьей главе исследуется задача фредгольмовости оператора $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа в весовых пространствах в случае безотражательного потенциала и кусочно непрерывного матричного символа. Эта задача сведена к аналогичной задаче для оператора Винера–Хопфа. Основываясь на локальном принципе Гохберга–Крупника и развивая технику работы А. Бётчера и И. М. Спитковского, автору удалось получить необходимые и достаточные условия фредгольмовости оператора $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа. При некоторых естественных ограничениях на вес и символ получена формула для индекса. Следует заметить, что этот результат является новым даже в случае матричного оператора Винера–Хопфа.

Четвертая глава посвящена исследованию двух операторов типа свертки: $T_d: L_p(\mathbb{R}, w) \to L_p(\mathbb{R}, w)$, $d \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{T}: L_2(\mathbb{R}_+) \to L_2(\mathbb{R}_+)$. Оператор T_d определяется формулой

$$(T_d y)(x) := (Sy)(x) - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(Ei\big(\mu(s-x)\big) - Ei\big(\mu(x-s)\big)\Big)\, \varphi(x)\, \varphi(s) y(s) ds$$

$$+ d\varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) y(s) ds\,,$$

где Ei – интегрально-показательная функция, S – сингулярный интегральный оператор на оси, с ядром Коши, а

$$\varphi(x) := \frac{2\,\mu\, m\, e^{\mu x}}{m^2 + 2\,\mu\, e^{2\mu x}}\,, \qquad m, \mu > 0.$$

Получена реализация этого оператора в виде оператора $\mathcal{L}$-свертки с символом $a(x) = -sgn(x)$. На основе этой реализации доказывается, что $T_d^{-1} = T_{d^{-1}}$. Отдельно рассматривается разрешимость уравнения $T_0 y = f$.

Оператор $\mathcal{T}$ (явную формулу мы не приводим из-за громоздкости) при определённых условиях реализуется в виде оператора $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа. Этот факт позволяет автору получить критерий фредгольмовости оператора $\mathcal{T}$ и вычислить его индекс.

Заметим, что спектральное преобразование U оператора $\mathcal{L}$ строится на основе решений Йоста $e_\pm(x,\lambda)$ и коэффициента прохождения $t(\lambda)$. В пятой главе оператор U строится иначе. Непрерывные по x, определённые на $\mathbb{R}$ функции $e_\pm(x,\lambda)$, удовлетворяющие уравнению $-y'' = \lambda^2 y$ на множествах $(-\infty,\xi)$, $(\xi,+\infty)$, $\xi \in \mathbb{R}$, определяются из условий

$$\frac{dy}{dx}(\xi+0,\lambda) - \frac{dy}{dx}(\xi-0,\lambda) = -q\; y(\xi,\lambda), q \in \mathbb{R},$$

$$e_+(x,\lambda) = e^{i\lambda x}, \text{при } x > \xi \text{ и } e_-(x,\lambda) = e^{i\lambda x}, \text{при } x < \xi.$$

Взяв вместо решений Йоста эти функции, а в качестве коэффициента прохождения $t(\lambda) = i2\lambda/(q + i2\lambda)$, оператор U строится по полной аналогии со спектральным преобразованием. Доказывается, что этот оператор является частичной изометрией.

Вводится действующий на $L_2^n(\mathbb{R})$ матричный оператор m-свёртки $W_m^0(a,d)$ с матричным символом $a = \left(a_{i,j}\right) \in L_\infty^{n\times n}(\mathbb{R})$, $d \in \mathbb{C}$, компоненты которого определены по специальной формуле. Приводится полная картина разрешимости уравнения $W_m^0(a,d)y = f$. Получен критерий фредгольмовости и дано описание ядра и коядра оператора $W_m^0(a,d)$. Оператор m-Винера–Хопфа, определённый равенством

$$W_m(a,d) = \pi_+ W_m^0(a,d)\pi_+^0,$$

имеет более сложную структуру и существенно зависит от числа ξ. При $\xi \leq 0$ и кусочно непрерывном символе получен критерий фредгольмовости оператора $W_m(a,d)$. В случае $\xi > 0$ изучение фредгольмовости оператора $W_m(a,d)$ сведено к изучению фредгольмовости некоторого тёплицева оператора.

Полученные в диссертации Г.А. Киракосяна результаты являются новыми. Их достоверность обеспечивается строгостью приведенных доказательств и не вызывает сомнений.

Значимость результатов диссертации для науки и практики

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейшего исследования интегральных операторов и интегральных уравнений, а также для решения ряда прикладных задач, приводящих к таким уравнениям.

Рекомендации по использованию результатов диссертации

Результаты диссертации могут быть использованы в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, в Российском университете дружбы народов, в Южном федеральном университете, в Кубанском государственном университете, в Ереванском государственном университете, а также в других научных и образовательных учреждениях, занимающихся теорией интегральных операторов и ее приложениями.

Замечания по работе

В диссертации имеется небольшое количество мелких опечаток, что не влияет на понимание текста и не снижает общей положительной оценки работы.

Заключение

Диссертационная работа Г.А. Киракосяна является завершенным научным исследованием на актуальную тему. Работа выполнена на высоком научном уровне. Полученные результаты являются новыми, интересными и вносят существенный вклад в теорию интегральных операторов. Работа написана четко и грамотно, аккуратно оформлена. Решение поставленных задач потребовало от соискателя глубокого понимания и владения современными математическими методами, что свидетельствует о высокой квалификации соискателя.

Основные результаты диссертации в полной мере опубликованы в 5 научных статьях. Из них три статьи опубликованы в журналах, индексируемых в международной базе данных Scopus (две статьи в журнале «Известия НАН Армении. Математика» и одна в журнале «Armenian Journal of Mathematics»). Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

На основании вышесказанного считаем, что диссертационная работа «О некоторых классах интегральных операторов типа $\mathcal{L}$-свертки» соответствует всем требованиям предъявляемым, к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а её автор – Григор Арменович Киракосян – заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, математическая физика».

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук (специальность – 01.01.01), профессором кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета Алексеем Николаевичем Карапетянцем (344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а. Тел. 8(863) 297-51-11. e-mail: karapetyants@gmail.com).

Отзыв ведущей организации на диссертацию Г.А. Киракосяна обсужден и утвержден на заседании кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, протокол № 7 от 6 мая 2025 года.

Заведующий кафедрой дифференциальных
и интегральных уравнений Института
математики, механики и компьютерных наук
Южного федерального университета,
доктор физико-математических наук, доцент

Авсянкин
Олег Геннадиевич

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Личную подпись Авсянкина О.Г.

ЗАВЕРЕНО:

Главный специалист по управлению персоналом

« 7 » мая 20 25 г.