

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу **Аветисян Сирануш Араратовны «Исследование одного класса смежных задач теории упругости и теории фильтрации для оснований, неоднородных по экспоненциальному закону»**, представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Решение задач теории упругости и гидродинамики для неоднородных по толщине сред актуально в механике современных материалов, что автоматически предопределяет **актуальность темы исследования**. В то же время, эти задачи намного сложнее, чем для однородных сред, что предопределяет **научную новизну** выбранной тематики. В большинстве случаев аналитические методы здесь практически неприменимы, а реализация численных методов требует серьезных вычислительных ресурсов. В случае экспоненциального изменения физических параметров по толщине, после применения интегрального преобразования Фурье вдоль продольной координаты получаются обыкновенные дифференциальные уравнения по поперечной координате с постоянными коэффициентами, что заметно упрощает аналитический метод решения и позволяет свести задачу в явном виде к вычислению некоторых интегралов. В случае задач со смешанными граничными условиями получаются интегральные уравнения либо их системы.

Диссертационная работа С.А. Аветисян посвящена близким между собой задачам в антиплоской упругости и в плоской теории фильтрации с коэффициентами, изменяющимися экспоненциально по поперечной координате. Также рассмотрена аналогичная осесимметричная задача. Эти задачи сводятся к уравнению в частных производных, в котором к оператору Лапласа добавляется первая производная по поперечной координате. В итоге при различных вариантах смешанных граничных условий получаются интегральные уравнения с разностными ядрами, причем сами ядра выписываются явно в квадратурах.

Для численного решения интегральных уравнений применяется метод механических квадратур, который наряду с другими методами зарекомендовал себя как эффективный в смысле времени вычислений и устойчивый к малым погрешностям в исходных данных. Этот метод связан с классической техникой квадратурных формул наивысшего порядка точности. Для функций без особенностей наилучшим приближением в этом смысле обладает разложение по узлам, определяемым как корни многочленов Лежандра, ортогональных на отрезке  $(-1,1)$ . Для сингулярных интегральных уравнений типа Коши решение имеет корневую особенность на концах интервала; в этом случае узлы выбираются как корни многочленов Чебышева, которые ортогональны с естественной весовой функцией в виде квадратного корня. В результате применения такой квадратурной формулы в процессе дискретизации получаются системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) сравнительно небольшой размерности, что является хорошей альтернативой методу коллокации (часто именуемому в западной литературе «панельный метод»), в котором СЛАУ получается гораздо проще прямой дискретизацией «в лоб», но платой за эту простоту является большая размерность систем. Развиваемый в работе метод с успехом применен диссертанткой в главах 1 и 2, для случая расчетов с одним и двумя коллинеарными отрезками интегрирования. Исключение составляет задача из параграфа 2.7, где в

осесимметричном случае решение в нуле не имеет особенности, а при  $r = 1$  имеет корневую особенность. Весовая функция при этом в условии ортогональности на интервале  $(0,1)$  соответствует многочленам Якоби с показателями  $(0, -1/2)$ , что с успехом реализовано в данном параграфе.

Диссертационная работа С.А. Аветисян состоит из введения, двух глав, выводов и списка литературы.

Во **введении** дается обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Обоснована актуальность выбранной темы исследования, ее новизна, перечислены положения, вынесенные на защиту, а также освещена структура, краткое содержание разделов диссертации и апробация работы.

**Первая глава** диссертации посвящена антиплоской контактной задаче теории упругости для коллинеарной системы разнородных упругих стрингеров с упругим слоем, модуль сдвига которого изменяется экспоненциально вдоль поперечной координаты. В частном случае, та же задача исследуется для упругого полупространства. Теоретическая модель построена для произвольного числа стрингеров. В случае одного стрингера выполнены численные расчеты методом механических квадратур. Показано на графиках распределение контактных напряжений. Аналогичные численные расчеты выполнены для двух стрингеров, где также показано взаимное влияние стрингеров друг на друга.

Во **второй главе** похожие задачи рассматриваются в плоской задаче теории фильтрации для нахождения функции динамического напора, когда коэффициент фильтрации экспоненциально зависит от глубины. Вместо стрингеров для построения корректной задачи со смешанными граничными условиями здесь предполагается наличие системы коллинеарных отверстий в жестком экране. Методы решения аналогичны тем, которые применены в главе 1. Роль контактных напряжений здесь играет скорость частиц втекающей жидкости. При этом рассмотрены различные комбинации граничных условий на верхней лицевой стороне слоя при заземленной нижней его грани. В частном случае однородного слоя получаются более простые выражения.

В заключительной части главы 2 рассматривается некоторая смешанная задача, которая физически интерпретируется как задача установившейся фильтрации для пористого полупространства в осесимметричной постановке.

В **выводах** кратко представлены основные полученные результаты.

**Достоверность** результатов, представленных **Аветисян С.А.**, обеспечивается использованием строгих методов математической теории упругости и теории фильтрации, корректным сведением краевых задач к интегральным уравнениям, а также тестированием численных алгоритмов и аналитических результатов. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы в научных и прикладных исследованиях.

В целом работа имеет завершенный характер, хорошо оформлена и иллюстрирована. Литературные источники представлены полно и включают основные работы по данной тематике.

По содержанию работы можно сделать следующие замечания:

1. На стр. 22 используется термин «траектории касательных напряжений». Вероятно, имеется в виду «направление касательных напряжений»?

2. На стр. 34 в формуле (1.4.1) одной и той же буквой  $L$  обозначается и ядро интегрального оператора, и множество коллинеарных отрезков. Лучше для них выбрать разные обозначения.

3. В случаях, когда  $n=1$  (один стрингер, одно отверстие для жидкости при фильтрации и т.д.), вероятно, в литературе могут быть опубликованы результаты других авторов. В будущем автору было бы полезно сравнить свои результаты с результатами других авторов в простейших тестовых случаях.

4. Модель в параграфе 2.7 выбивается из основного содержания работы, т.к. в ней нет экспоненциальной зависимости от глубины. Это также не согласуется с названием диссертации, в котором явно выделен экспоненциальный характер коэффициентов.

5. Метод механических квадратур в § 2.7 состоит в разложении решения по некоторым функциям, содержащим корни многочленов Якоби с показателями  $(0, -1/2)$ . Вопрос: если метод решения все равно требует продолжения с отрезка  $(0,1)$  на отрезок  $(-1,0)$ , то нельзя ли при этом разлагать по многочленам с показателями  $(-1/2, -1/2)$  и работать с интегральным уравнением на отрезке  $(-1,1)$ . Если это возможно, то в этом случае многочлены Якоби превращаются в многочлены Чебышева первого рода, что, по-видимому, может заметно облегчить численную реализацию метода.

Сделанные замечания не меняют общей положительной оценки работы.

**Заключение.** Представленная диссертационная работа является научно-квалификационной работой, соответствующей всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Ее автор, **Аветисян Сирануш Араратовна** заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела.

Иностранный член Национальной Академии Наук Республики Армения,  
Профессор кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики  
Южного федерального университета  
(Ростов-на-Дону, Российская Федерация),  
доктор физ.-мат. наук, профессор

Сумбатьян Межлум Альбертович

Подпись проф. Сумбатьян М. А.  
Удостоверяю:  Отышев  
(Удовенко В. А.)