

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՄԻՐԱՆՈՒՇ ԱՐԱՐԱՏԻ ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

**ԷԶՍՊՈՆԵՆՑԻԱԼ ՕՐԵՆՔՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԻՄՔԵՐԻ ՀԱՄԱՐ
ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ և ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԱԿԻՑ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆ**

Ա.02.04 - «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկա-
մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման
ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2025

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

АВЕТИСЯН СИРАНУШ АРАРАТОВНА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА СМЕЖНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И
ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ОСНОВАНИЙ, НЕОДНОРОДНЫХ ПО
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.04-“Механика деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН 2025

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավարներ՝

ՀՀ ԳԱԱ թղթ.-անդամ, ֆ.մ.գ.դ.,

պրոֆ. Ս.Ս.Մխիթարյան

ֆ.մ.գ.դ. Ա.Վ.Սահակյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Վ.Ն.Հակոբյան

ՀՀ ԳԱԱ արտ. անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Մ.Ա.Սումբաթյան

Առաջատար կազմակերպություն՝

Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է **2025թ. հոկտեմբերի 31-ին** ժամը 14⁰⁰-ին ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի – 047 մասնագիտական խորհրդում, հետևյալ հասցեով՝ 0019, ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2: E-mail: 047@hesc.am

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է **2025թ. սեպտեմբերի 29-ին**

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.



Ա.Վ.Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научные руководители:

член-корр. НАН РА, д.ф.м.н., проф.

С.М. Мхитарян

д.ф.м.н. А.В.Саакян

Официальные оппоненты:

д.ф.м.н., проф. В.Н.Акопян

ин. член НАН РА, д.ф.м.н., проф. М.А.Сумбатьян

Ведущая организация:

Ереванский государственный университет

Защита состоится **31-ого октября 2025г.** в 14⁰⁰ на заседании специализированного совета Механика – 047 в Институте механики НАН РА, по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2, E-mail: 047@hesc.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан **29-го сентября 2025г.**

Ученый секретарь
специализированного совета, д.ф.м.н.



А.В.Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Среди граничных задач механики деформируемого твердого тела и, вообще, механики сплошной среды, особое место занимают контактные и смешанные задачи математической теории упругости. Такие задачи возникают во многих областях прикладной механики и инженерной практики и тесно связаны, в частности, с исследованиями вопросов концентрации напряжений в массивных деформируемых телах, взаимодействующих с концентраторами напряжений типа штампов, стрингеров, тонкостенных включений, трещин. Концентрация напряжений существенно снижает прочность инженерных конструкций и их деталей. Поэтому качественное и количественное исследование вопросов концентрации напряжений, связанных с ней граничных задач имеет как теоретическое, так и практическое значение. С другой стороны, контактные и смешанные задачи теории упругости в методологическом аспекте тесно примыкают к аналогичным задачам гидродинамики, граничным задачам теории фильтрации грунтовых вод в пористых средах, теории теплопроводности и к задачам других отраслей. Они объединены общностью универсальных принципов механики сплошной среды и математических методов их исследования.

Несмотря на достаточно большое число исследований по контактным и смешанным задачам, остаются еще невыясненные вопросы, нерассмотренные задачи, нуждающиеся в исследовании, например, задачи для неоднородных оснований. Остаются также неполностью изученными вопросы взаимосвязи результатов и принципов контактных и смешанных задач теории упругости со смежными отраслями механики сплошных сред, например, с гидродинамикой, в частности, теорией фильтрации. Следует заметить, что распространение принципов и хорошо разработанных методов исследования контактных и смешанных задач теории упругости на смежные области механики сплошных сред, в данном случае, на граничные задачи теории установившейся фильтрации жидкости в пористых недеформируемых грунтах, представляет большой научный интерес.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию единым методом интегральных преобразований и интегральных уравнений, вместе с численно-аналитическим методом механических квадратур одного класса смежных граничных задач теории упругости о взаимодействии стрингеров с упругим экспоненциально неоднородным слоем или с полупространством при антиплоской деформации и теории установившейся фильтрации жидкости в пористых недеформируемых грунтовых основаниях, коэффициент фильтрации которых по глубине изменяется по экспоненциальному закону.

Указанный круг вопросов в определенной степени освещается в настоящей диссертационной работе и этим обусловлена актуальность диссертационной темы.

Цель и задачи работы. Целью диссертационной работы является исследование единым методом интегральных преобразований и интегральных уравнений одного довольно обширного класса смежных граничных задач теории упругости при антиплоской деформации для неоднородных оснований и теории установившейся фильтрации жидкости в пористых недеформируемых грунтовых основаниях с неоднородной по глубине проницаемостью. При этом рассматриваются основания вида полосы, полуплоскости и полупространства.

В соответствии с поставленной целью в работе ставятся следующие задачи:

- вывод основных уравнений и соотношений обсуждаемых граничных задач;
- исследование этих уравнений и построение их эффективных решений;
- выявление влияния неоднородности свойств по глубине основания на контактные напряжения, коэффициенты их концентрации, законы распределения давлений и скоростей в пористой среде, расход жидкости по определенным сечениям, на основе проведения детального численного анализа.

Методы исследования. Рассматриваемый в работе класс смежных граничных задач теорий упругости и установившейся фильтрации, в том числе, смешанных граничных задач, исследуется единым методом интегральных преобразований Фурье, Ханкеля и интегральных уравнений Фредгольма первого рода, сингулярных интегральных уравнений. Кроме того,

используются методы краевых задач теории аналитических функций и численно-аналитический метод механических квадратур, основанный на квадратурных формулах типа Гаусса для обычных несобственных интегралов, сингулярных интегралов с ядром Коши и интегралов с ядром, порожденным разрывным интегралом Вебера-Сони́на.

Научная новизна. Научная новизна полученных в диссертации результатов заключается в следующем:

- поставлена и решена контактная задача о взаимодействии коллинеарной системы из произвольного конечного числа упругих стрингеров с различными жесткостями на сдвиг с упругим слоем конечной или бесконечной толщины при антиплоской деформации, модуль сдвига слоя по глубине изменяется по экспоненциальному закону, численным анализом выявлены закономерности изменения касательных контактных напряжений и коэффициентов их концентрации;

- выявлены эффекты влияния фактора неоднородности на распределение касательных контактных напряжений и на коэффициенты их концентрации;

- для случаев одной и двух упругих накладок проведен обстоятельный численный анализ зависимости контактных напряжений под стрингерами и коэффициентов их концентрации от показателя неоднородности при разных толщинах полосы и, наоборот, от толщины полосы при различных показателях неоднородности. Во втором случае исследовано еще и взаимовлияние ближних концов стрингеров в зависимости от расстояния между ними;

- поставлены и решены смежные с контактными задачами теории упругости граничные задачи плоской теории установившейся фильтрации жидкости в пористых грунтовых основаниях типа слоя и полупространства, коэффициент фильтрации которых по глубине изменяется по экспоненциальному закону;

- построено замкнутое решение задачи о фильтрации жидкости, подаваемой внутрь неоднородной полуплоскости через щель конечной длины в водонепроницаемом экране под заданным давлением;

- поставлена осесимметричная смешанная граничная задача теории гармонических функций для полупространства с круговой линией раздела граничных условий, встречающаяся в разных областях механики, и решена тремя различными методами: методом преобразующих операторов, методом аналитического решения СИУ и методом механических квадратур

- представлена квадратурная формула для интеграла с ядром в виде интеграла Вебера-Сони́на от произведения функций Бесселя первого рода нулевого порядка.

- применение единых методов теории интегральных уравнений и теории интегральных преобразований и их сочетание с численно-аналитическим методом механических квадратур.

Достоверность полученных результатов. Достоверность полученных результатов обеспечена корректными постановками задач, применением строгих математических методов теории интегральных преобразований, теории интегральных уравнений и метода механических квадратур, совпадением в частных случаях с известными результатами.

Основные положения, выносимые на защиту.

- исследование класса задач о контактном взаимодействии системы упругих стрингеров с массивными упругими телами в виде экспоненциально неоднородного слоя конечной или бесконечной толщины при антиплоской деформации;

- построение эффективных решений класса граничных задач теории установившейся фильтрации жидкости в пористых грунтовых основаниях в виде слоя конечной или бесконечной мощности, коэффициент фильтрации которого по глубине изменяется по экспоненциальному закону.

Практическая ценность работы. Результаты по исследованию задач контактного взаимодействия стрингеров с массивными упругими телами могут быть использованы в тензометрии, в расчетах на прочность различных машиностроительных конструкций, усиленных или армированных тонкостенными элементами. Результаты по задачам фильтрации могут быть использованы в расчетах фильтрационных характеристик гидротехнических сооружений

типа плотин, в практике орошения почв методом впрыскивания жидкости или жидкого удобрения в почву.

Апробация работы. Результаты диссертации регулярно докладывались на семинарах им. акад. Н.Х.Арутюняна отдела механики упругих и вязкоупругих тел Института механики НАН РА, на 5-ти международных конференциях

- Архитектура и строительство - актуальные проблемы (4.10-10.10, 2010, Джермук, РА),
- школа-конф. молодых ученых “МЕХАНИКА 2013” (01.10-04.10, 2013, Цахкадзор, РА),
- Актуальные проблемы механики сплошной среды (21.09-26.09, 2015, Цахкадзор, РА),
- Современные проблемы архитектуры и строительства (26.10-28.10, 2016, Ереван, РА),
- Современные проблемы архитектуры и строительства (13.09-18.09, 2017, Батуми, Грузия).

Диссертация целиком докладывалась на заседании отдела механики упругих и вязкоупругих тел Института механики НАН Армении и на общем семинаре Института механики.

Публикации. Основные результаты и положения диссертации опубликованы в 10 статьях, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, кратких выводов, списка цитированной литературы, включающего 150 наименований. Работа изложена на 120 страницах компьютерного набора, содержит 1 таблицу и 20 рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится краткий проблемно ориентированный обзор основных работ и результатов классических контактных задач теории упругости, механики разрушения и теории фильтрации жидкости в пористых средах, тесно связанных с исследуемой тематикой, сформулированы основные цели и задачи работы, обоснована актуальность диссертационной темы и кратко изложено содержание диссертации.

Первая глава посвящена смешанным граничным задачам теории упругости для неоднородной по экспоненциальному закону полосы и полуплоскости при антиплоской деформации.

В §1.1 этой главы из общих уравнений линейной теории упругости выведены основные уравнения при антиплоской деформации упругих тел, неоднократно используемые в дальнейшем изложении.

В §1.2 при помощи интегрального преобразования Фурье построены функции влияния для упругой неоднородной полосы, находящейся в условиях антиплоской деформации. Принято, что модуль сдвига полосы G по его глубине изменяется по экспоненциальному закону

$$G = G(y) = G_0 e^{\alpha y} \quad (-H \leq y \leq 0) \quad (1)$$

В результате определены выражения компонентов напряжений и перемещения от распределенной по границе касательной нагрузки. В частности, для перемещения граничных точек полосы имеем

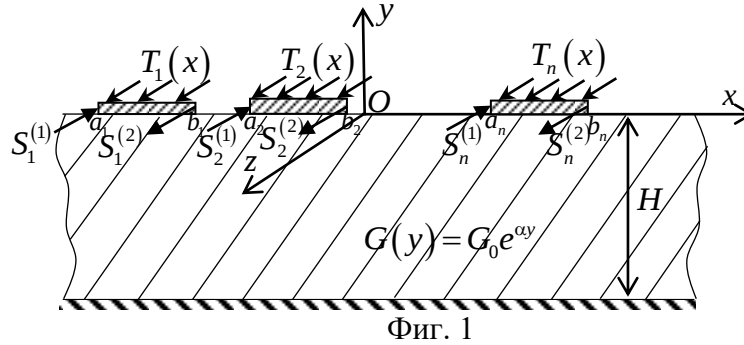
$$w(x, 0) = \frac{2}{\pi G_0} \int_{-\infty}^{\infty} L(x-s) \tau(s) ds \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2)$$
$$L(x-s) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\mu H/2) \cos(\lambda(x-s))}{\mu - \alpha \operatorname{th}(\mu H/2)} d\lambda; \quad \mu = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2}.$$

В §1.3 приведены функции влияния для неоднородной полуплоскости. В интегральных представлениях производной перемещения на границе выделены сингулярные части ядра.

В §1.4 рассматривается задача о контактом взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругим экспоненциально неоднородным слоем при антиплоской деформации.

Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxuz$ упругий слой имеет высоту H и обладает модулем сдвига G , изменяющимся по глубине слоя по экспоненциальному закону $G = G_0 e^{\alpha y}$. Пусть, далее, нижняя грань $y = -H$ слоя жестко закреплена, а верхняя

грань $y=0$ слоя по системе отрезков $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$ ($L_k = [a_k \leq x \leq b_k]$) усилена коллинеарной системой стрингеров с модулями сдвига G_k и высотами h_k , подверженных действию показанных на рисунке силовых факторов (фиг. 1).



Выведем основные уравнения поставленной задачи. Воспользовавшись выражением (2), для производной перемещений граничных точек полосы по x будем иметь:

$$\frac{dw(x,0)}{dx} = \frac{2}{\pi G_0} \int_L M(s-x) \tau(s) ds \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3)$$

где $\tau(s)$ - искомое контактное напряжение под стрингерами,

$$M(x) = \int_0^\infty \frac{\text{th}(\mu H/2) \lambda \sin(\lambda x)}{\mu - \alpha \text{th}(\mu H/2)} d\lambda \quad (4)$$

Далее запишем дифференциальное уравнение деформирования средней линии k -ого стрингера, с которой, по модели Мелана при антиплоской деформации, идентифицируется весь стрингер:

$$h_k G_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} = \tau(x) - T_k(x) \quad (a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}), \quad (5)$$

где $w_k = w_k(x)$ - компонента перемещений точек k -ого стрингера в направлении оси Oz .

При этом условие равновесия стрингера имеет вид

$$\int_{a_k}^{b_k} \tau(x) dx = V_k = S_k^{(2)} - S_k^{(1)} + \int_{a_k}^{b_k} T_k(x) dx \quad (k = \overline{1, n}). \quad (6)$$

Интегрирование уравнения (5) по x даст

$$h_k G_k \frac{dw_k}{dx} = \frac{1}{2} (S_k^{(2)} + S_k^{(1)}) + \frac{1}{2} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(x-s) [\tau(s) - T_k(s)] ds \quad (a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}). \quad (7)$$

Теперь записав условие контакта k -ого стрингера с упругой полосой Ω_0 в виде равенства производных (3) и (7), после простых преобразований относительно неизвестных касательных напряжений $\tau(x)$ получим определяющее интегральное уравнение:

$$\int_L M(s-x) \tau(s) ds + \frac{\pi G_0}{4 h_k G_k} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) \tau(s) ds = g(x) \quad (a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}), \quad (8)$$

где

$$g(x) = \frac{\pi G_0}{4 h_k G_k} \left[S_k^{(1)} + S_k^{(2)} + \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) T_k(s) ds \right].$$

Выделим сингулярную часть ядра $M(x)$. Исследуя асимптотическое поведение подынтегральной функции ядра $M(x)$ (4) при $\lambda \rightarrow \infty$, известным способом найдем:

$$M(x) = \frac{1}{2x} + \frac{\alpha\pi}{8} \text{sign}(x) + \frac{1}{2}R(x); \quad R(x) = \int_0^\infty \left[\frac{(\alpha + 2\lambda) \text{th}(\mu H/2) - \mu}{\mu - \alpha \text{th}(\mu H/2)} - \frac{\alpha}{2\lambda} \right] \sin(\lambda x) d\lambda \quad (9)$$

С учетом (9) определяющее интегральное уравнение (8) запишем в виде следующего сингулярного интегрального уравнения (СИУ):

$$\int_L \left[\frac{1}{s-x} + \frac{\alpha\pi}{4} \text{sign}(s-x) + R(s-x) \right] \tau(s) ds + \frac{\pi G_0}{2h_k G_k} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) \tau(s) ds = f(x) \quad (10)$$

Перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\begin{aligned} \{\xi, \eta, \alpha_k, \beta_k, H_0\} &= \frac{1}{a} \{x, s, a_k, b_k, H\}; \quad \{\alpha_0, \omega, \mu_0\} = a \{\alpha, \lambda, \mu\}; \quad \mu_0 H_0 = \mu H; \\ \{\tau_0(\xi), \bar{T}_k(\xi), \bar{S}_k^{(1)}, \bar{S}_k^{(2)}, V_k^{(0)}\} &= \frac{1}{a G_0} \{a \tau(a\xi), a T_k(a\xi), S_k^{(1)}, S_k^{(2)}, V_k\}; \quad \lambda_k = \frac{G_0 a}{2h_k G_k} \quad (k = \overline{1, n}), \\ f_0(\xi) = f(a\xi) &= \pi \lambda_k \left[-\bar{S}_k^{(1)} + \bar{S}_k^{(2)} + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \text{sign}(\eta - \xi) \bar{T}_k(\eta) d\eta \right]; \end{aligned}$$

Здесь a - некий характерный линейный размер, например, $a = a_1$, если $a_1 \neq 0$. Тогда СИУ (10) и условия равновесия (6) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left[\frac{1}{\eta - \xi} + \pi \left(\frac{\alpha_0}{4} + \lambda_k \right) \text{sign}(\eta - \xi) + M_0(\eta - \xi) \right] \tau_0(\eta) d\eta + \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \left[\frac{1}{\eta - \xi} + M_0(\eta - \xi) \right] \tau_0(\eta) d\eta = \\ = f_0(\xi) - \frac{\pi \alpha_0}{4} \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^n \text{sign}(m-k) V_m^{(0)} \quad (\xi \in \alpha_k, \beta_k, \quad k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \tau_0(\eta) d\eta = V_k^{(0)} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (12)$$

$$\text{Здесь} \quad M_0(\xi) = \int_0^\infty \left[\frac{(\alpha_0 + 2\omega) \text{th}(\mu_0 H_0/2) - \mu_0}{\mu_0 - \alpha_0 \text{th}(\mu_0 H_0/2)} - \frac{\alpha_0}{2\omega} \right] \sin(\omega \xi) d\omega.$$

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи сводится к решению системы СИУ (11) при условиях равновесия (12).

Решение системы (11) построим численно-аналитическим методом механических квадратур. Для этого каждый интервал (α_k, β_k) сведем к интервалу $(-1, 1)$ и введем обозначения:

$$\begin{aligned} \{\xi, \eta\} &= \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} \{t, u\} + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2}; \quad \gamma_{km} = \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m}; \quad \delta_{km} = \frac{\beta_m + \alpha_m - \beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m} \quad (-1 < t, u < 1; \quad k, m = \overline{1, n}); \\ Q_{km}(t, u) &= M_0 \left(\frac{\beta_m - \alpha_m}{2} (u - \gamma_{km} t + \delta_{km}) \right); \quad \tau_m(u) = \tau_0 \left(\frac{\beta_m - \alpha_m}{2} u + \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

В результате СИУ (13) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{u-t} + \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} \left(\pi \left(\frac{\alpha_0}{4} + \lambda_k \right) \text{sign}(u-t) + Q_{kk}(t, u) \right) \right] \tau_k(u) du + \quad (k = \overline{1, n}) \\ + \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^n \int_{-1}^1 L_{km}(t, u) \tau_m(u) du = f_k(t) - \frac{\pi \alpha_0}{4} \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^n \text{sign}(m-k) V_m^{(0)} \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$L_{km}(t, u) = \frac{1}{u - \gamma_{km}t + \delta_{km}} + \frac{\beta_m - \alpha_m}{2} Q_{km}(t, u) \quad (k \neq m); \quad f_k(t) = f_0 \left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right).$$

Учитывая, что решение уравнения (14), может иметь корневую особенность на концах, решение представим в виде

$$\tau_k(t) = \frac{\Omega_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1), \quad (15)$$

где $\Omega_k(t)$ - гильдеровские функции на отрезке $[-1; 1]$.

Далее, воспользовавшись квадратурными формулами:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)}{x-z} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{N} \sum_{p=1}^N \frac{\varphi(u_p)}{u_p - z} \left[1 - \frac{U_{N-1}(z)}{U_{N-1}(u_p)} \right] \quad z \in (-1, 1) \quad (16)$$

$$\int_{-1}^1 \text{sign}(x-y) \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{2}{N} \sum_{p=1}^N \varphi(u_p) \left[-\arcsin y + 2\sqrt{1-y^2} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} T_m(u_p) U_{m-1}(y) \right] \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

систему уравнений (14) сведем к системе систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{N} \sum_{p=1}^N \left[\frac{1}{u_p - t_r} + \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} \left(\left(\frac{\alpha_0}{4} + \lambda_k \right) A(u_p, t_r) + Q_{kk}(u_p, t_r) \right) \right] X_p^{(k)} + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \left[\sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^n L_{km}(t_r, u_p) X_p^{(m)} \right] = \\ & = f_k(t_r) - \frac{\pi \alpha_0}{4} \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^n \text{sign}(m-k) V_m^{(0)} \quad (k = \overline{1, n}; \quad r = \overline{1, N-1}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{Здесь } X_p^{(m)} = \Omega_m(u_p); \quad u_p = \cos \left[\frac{(2p-1)\pi}{2N} \right] \quad (p = \overline{1, N}); \quad t_r = \cos \left(\frac{\pi r}{N} \right) \quad (r = \overline{1, N-1})$$

$$A(u_p, t_r) = 2 \left(-\arcsin t_r + 2\sqrt{1-t_r^2} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{T_m(u_p) U_{p-1}(t_r)}{m} \right); \quad (18)$$

К последней системе следует добавить n уравнений равновесия (12), которые, после дискретизации примут вид

$$\frac{\pi}{N} \sum_{p=1}^N X_p^{(k)} = \frac{2V_k^{(0)}}{\beta_k - \alpha_k}. \quad (k = \overline{1, n}) \quad (19)$$

Системы (17) и (19) составляют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно nN неизвестных коэффициентов $X_p^{(k)} (p = \overline{1, N}; k = \overline{1, n})$. После нахождения этих коэффициентов функцию $\Omega_k(t)$ можно восстановить по формуле:

$$\Omega_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N X_p^{(k)} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} T_m(t) T_m(u_p) \right] \quad (20)$$

Рассмотрим два важных частных случая.

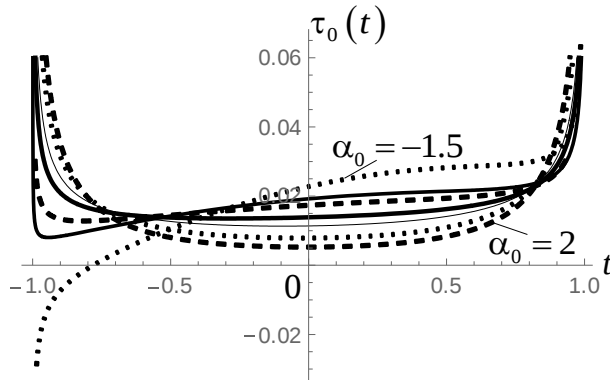
1) Пусть имеем один стрингер. Системы (17) и (19) сведутся к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{N} \sum_{p=1}^N \left[\frac{1}{u_p - t_r} + \left(\frac{\alpha_0}{4} + \lambda_1 \right) A(u_p, t_r) + Q_{11}(u_p, t_r) \right] X_p = f_0(t_r) \quad (r = \overline{1, N-1}) \\ & \frac{\pi}{N} \sum_{p=1}^N X_p = V_1^{(0)} \end{aligned} \quad (21)$$

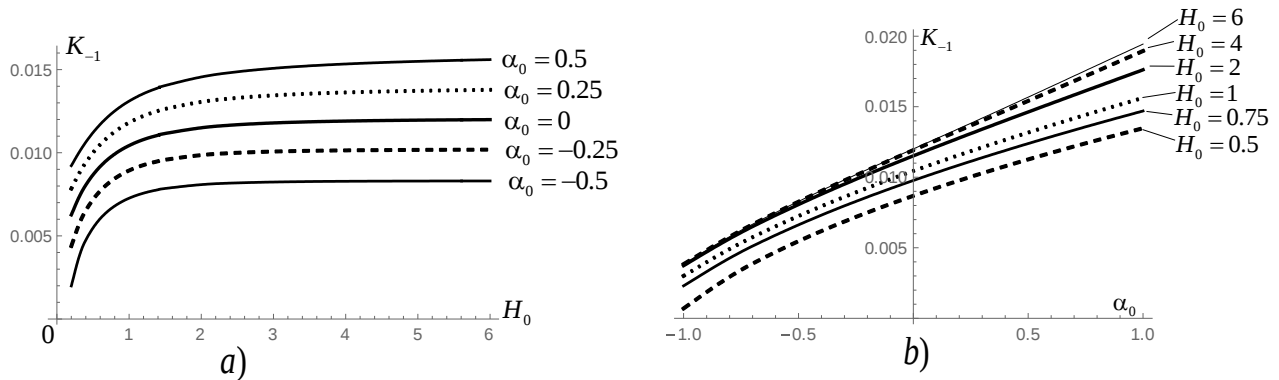
Исходя из представления (15), нетрудно убедиться, что безразмерными коэффициентами концентрации контактных напряжений будут величины:

$$K_{-1} = \frac{\Omega_1(-1)}{\sqrt{2}}; \quad K_1 = \frac{\Omega_1(1)}{\sqrt{2}} \quad (22)$$

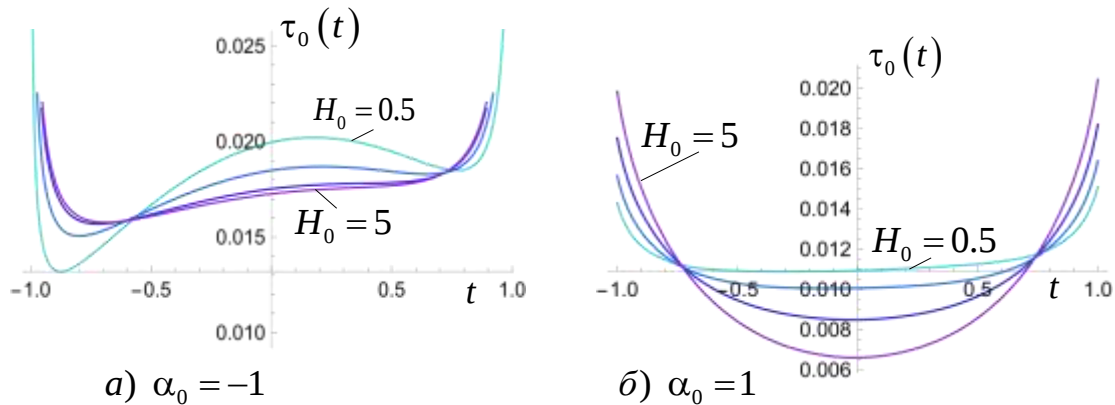
При численных расчетах для внешних силовых факторов приняты значения $\bar{S}_1^{(1)} = 0.01$; $\bar{S}_1^{(2)} = 0.02$; $\bar{T}_1(\eta) = 0.001$; $G_0/G_1 = 0.01$; $h_1/a = 0.1$.



Фиг. 2 Кривые $\tau_0(t)$ при $\alpha_0 = \{-2, -1.8, -1, -0.5, 0, 0.75, 2\}$ и от показателя неоднородности $\alpha_0 = \{-0.5; -0.25; 0; 0.25; 0.5\}$ и от толщины слоя $H_0 = \{0.5, 0.75, 1, 2, 4, 6\}$. Похожие кривые имеют место и для K_1 .



Фиг. 3 Зависимость коэффициента K_{-1} от толщины слоя и от показателя неоднородности.



Фиг. 4 Распределение контактных напряжений

На фиг. 4а и фиг. 4б представлены кривые распределения контактных напряжений $\tau_0(t)$, рассчитанных при $\alpha_0 = -1$ и $\alpha_0 = 1$ для разных значений относительной толщины слоя $H_0 = \{0.5, 0.8, 1.5, 5\}$.

Из представленных графиков можно сделать следующие выводы:

1) для слоя с увеличивающимся по глубине модулем сдвига ($\alpha_0 < 0$) распределение контактных напряжений может претерпевать качественное изменение, в то время как в противном случае ($\alpha_0 \geq 0$) эти изменения носят только количественный характер (фиг.2);

2) с увеличением обоих параметров: толщины слоя H_0 и показателя неоднородности ($-1 \leq \alpha_0 \leq 1$), коэффициенты концентрации напряжений на обоих концах зоны контакта возрастают (фиг. 3а и фиг. 3б);

3) несимметричность распределения контактных напряжений, обусловленная приложенными нагрузками, наиболее проявляется у слоя, модуль сдвига которого увеличивается, чем у слоя с уменьшающимся, с таким же показателем, модулем сдвига. В первом случае кривые для $H_0 = 1.5$ и $H_0 = 5$ достаточно близки друг к другу, а во втором случае они существенно разнятся, что означает, при увеличении модуля сдвига вглубь полосы уже при меньших значениях H_0 можно полосу заменить полуплоскостью (фиг.4).

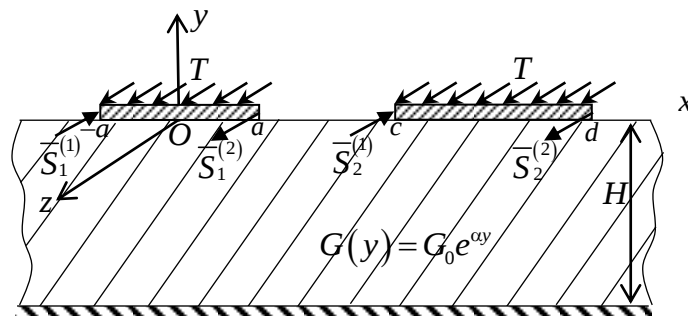
II) Рассмотрим второй частный случай, когда имеем два стрингера, и выясним взаимовлияние этих стрингеров друг на друга. Предположим, что стрингеры имеют одинаковую толщину h и одинаковый модуль сдвига G , кроме того, пусть распределенные нагрузки на стрингеры будут равномерными с одинаковой плотностью T (фиг.5).

Перейдем к безразмерным переменным. Здесь, все линейные величины отнесем к полу-длине первого стрингера a . Будем иметь

$$\alpha_1 = -1; \quad \beta_1 = 1; \quad \alpha_2 = \frac{2l_*\rho}{1-\rho}; \quad \beta_2 = \frac{2l_*}{1-\rho}; \quad l_* = \frac{d-c}{2a}; \quad \rho = c/d \quad (0 < \rho < 1)$$

Таким образом, взаиморасположение и ширины стрингеров определяются заданием двух параметров: отношением ширины второго стрингера к ширине первого l_* и отношением координат концов второго стрингера ρ . Второй параметр неудобен для исследования взаимовлияния двух стрингеров, поэтому целесообразно в качестве параметра, посредством которого будем оценивать уровень взаимовлияния, выбрать обезразмеренное расстояние между центрами стрингеров:

$$r = \frac{l_*(1+\rho)}{1-\rho} > 1 + l_*. \quad (24)$$

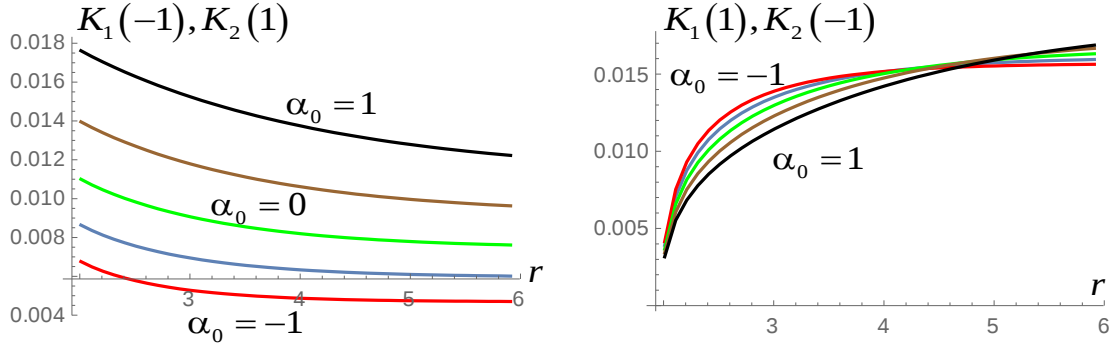


Фиг. 5

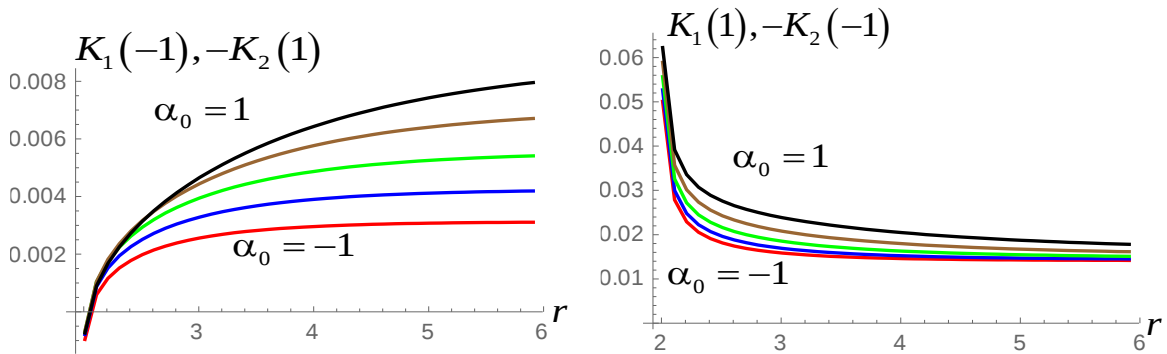
Проведем численный анализ системы (17) и условий (19), выписанных для $n = 2$ и с учетом нового параметра (24). Численный анализ целенаправлен на выяснение взаимовлияния коэффициентов $K_1(-1), K_1(1)$ и $K_2(-1), K_2(1)$ при удалении друг от друга двух одинаковых стрингеров и при изменении ширины второго стрингера, когда расстояние между ближними

концами остается неизменным. Расчеты проводились при $H_0=2$, $\alpha_0=-1, -0.5, 0, 0.5, 1$. Для внешних нагрузок приняты значения $\bar{S}_1^{(1)} = -\bar{S}_2^{(2)} = 0.01$; $\bar{S}_1^{(2)} = -\bar{S}_2^{(1)} = 0.02$; $\bar{T} = 0.001$ и $\bar{S}_1^{(1)} = \bar{S}_2^{(2)} = 0.01$; $\bar{S}_1^{(2)} = \bar{S}_2^{(1)} = 0.02$; $\bar{T} = 0$, которые в случае одинаковых стрингеров приводят к симметричному и кососимметричному, относительно средней оси между ними, распределению контактных напряжений.

На Фиг.6 и Фиг.7 показаны графики зависимости коэффициентов двух одинаковых стрингеров от расстояния между ними для вышеуказанных значений показателя неоднородности α_0 .



Фиг. 6 Зависимость от расстояния r симметричное нагружение.

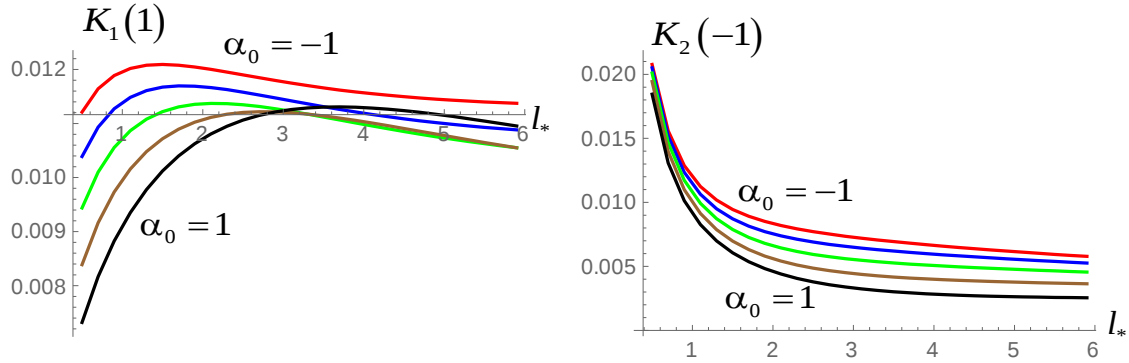


Фиг. 7 Зависимость от расстояния r кососимметричное нагружение.

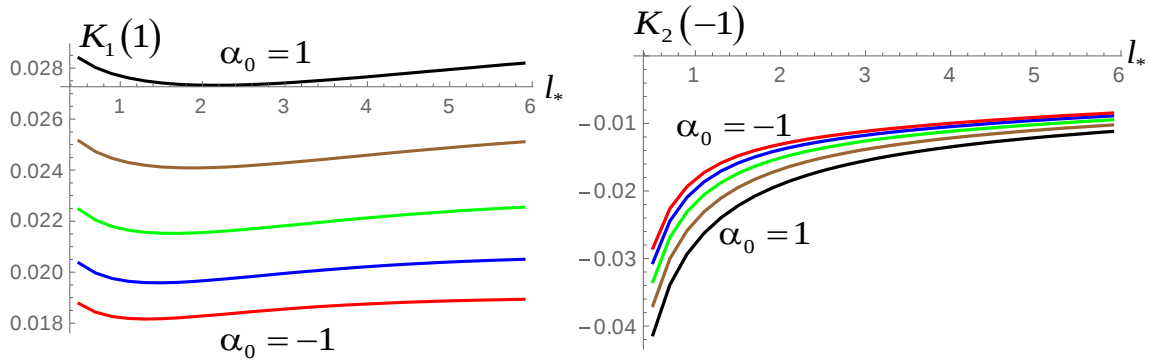
При этом графики на Фиг.6 относятся к первому из указанных выше случаев нагружения, а на Фиг.7 – ко второму случаю нагружения. Поведение кривых, соответствующих коэффициентам концентрации у близких друг к другу концов стрингеров, очевидным образом указывают на то, что в предельных случаях, когда стрингеры примыкают друг к другу, особенность поведения контактных напряжений у этих концов должна измениться. В первом случае стрингеры сливаются в один целый и корневая особенность в этих концах должна исчезнуть, на что указывает стремление к нулю коэффициента концентрации. Во втором случае, наоборот, происходит срез, при котором корневая особенность должна перерасти в $\frac{1}{t-1} \left(\frac{1}{t+1} \right)$, на это указывает резкое увеличение коэффициентов концентрации при малых расстояниях между стрингерами $r \rightarrow 2$.

Следует отметить, что графики на Фиг.6 и Фиг.7 подтверждают сделанный в предыдущем параграфе вывод о том, что больший по модулю отрицательный показатель неоднородности $\alpha_0 = -1$ способствует более быстрому выходу на предельные, в данном случае при $r \rightarrow \infty$, значения рассматриваемых величин.

На Фиг.8 и Фиг.9 показаны графики зависимости коэффициентов концентрации контактных напряжений у близких друг к другу концов стрингеров для указанных выше значений показателя неоднородности α_0 при следующих условиях. Ширина левого стрингера предполагается фиксированной, равной двум, ширина же правого стрингера, характеризуемая параметром l_* , меняется, при этом расстояние между ближними концами стрингеров сохраняется постоянным и равным 0.5. Этого можно достичь, если вместе с l_* изменять и расстояние между центрами стрингеров по закону $r = l_* + 1.5$.



Фиг. 8 Зависимость от ширины правого стрингера l_* симметричное нагружение.



Фиг. 9 Зависимость от ширины правого стрингера l_* кососимметричное нагружение.

Существенная разница в поведении коэффициентов $K_1(1)$ и $K_2(-1)$ объясняется тем, что моделируемая ситуация с изменением ширины одного стрингера с постоянным расстоянием между ближними концами реализуется только для левого стрингера, так как все линейные величины отнесены к его полудлине a .

В связи с вышесказанным, при очень малых значениях l_* коэффициент $K_1(1)$ стремится к соответствующему значению для одиночного стрингера на границе неоднородной полосы, в то время как коэффициент $K_2(-1)$ будет стремиться к значению коэффициента на противоположном конце одиночного стрингера на границе неоднородной полуплоскости. Кажется, что предельные значения $K_1(1)$ при $l_* \rightarrow 0$ можно сопоставить со значениями K_1 на графиках Фиг.3 при $H_0 = 2$ и $\alpha_0 = -0.5, 0, 0.5$, однако это невозможно, поскольку при проведенных расчетах разница между величинами сосредоточенных сил не равна нулю, вследствие чего в пределе $l_* \rightarrow 0$ на месте правого стрингера окажется приложенной сосредоточенная сила величиной $S_2 - S_1 \neq 0$.

Из правого рисунка Фиг.8 замечаем, что с увеличением ширины правого стрингера коэффициент $K_1(1)$ сначала возрастает до определенного максимума далее убывает, стремясь к некоторой величине, превосходящей начальное значение. Обратная картина имеет место в

случае кососимметричного нагружения (Фиг.9). При этом в обоих случаях максимум (минимум) достигается при разных ширинах l_* в зависимости от показателя неоднородности α_0 , причем чем больше значение α_0 , тем больше и значение l_* достижения экстремума.

Вторая глава посвящена решению граничных задач теории установившейся фильтрации в пористых грунтах в виде слоя и решению одной смешанной граничной задачи теории гармонических функций для полупространства с круговой линией раздела граничных условий.

В §2.1 этой главы приведены основные уравнения и соотношения теории установившейся фильтрации жидкости в пористых грунтовых основаниях.

В §2.2 построено замкнутое решение задачи установившейся фильтрации жидкости через водонепроницаемый экран с системой щелей в пористую грунтовую полосу с переменным коэффициентом фильтрации $k = k(y) = k_0 e^{\alpha y}$ и водонепроницаемым основанием, когда заданы скорости втекания жидкости на каждой щели.

Поставленная задача сводится к решению следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial h}{\partial y} = 0 & (-\infty < x < \infty; 0 < y < H) \\ v_y|_{y=0} = -k_0 \frac{\partial h}{\partial y}|_{y=0} = \begin{cases} v(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \in R \setminus L); \end{cases} & v_y|_{y=H} = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (25)$$

где $h(x, y)$ - пьезометрическое давление, $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$ - компоненты скорости,

$L = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]$ - система щелей-отрезков, через которые втекает жидкость.

Применив к граничной задаче (25) преобразование Фурье, относительно трансформантов придем к следующей граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{h}}{dy^2} + \alpha \frac{d\bar{h}}{dy} - \lambda^2 \bar{h} = 0 & (0 < y < H) \\ \frac{d\bar{h}}{dy}|_{y=0} = -\frac{\bar{v}}{k_0}; & \frac{d\bar{h}}{dy}|_{y=H} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Решение граничной задачи (26) представляется в виде

$$\bar{h}(\lambda, y) = \frac{\bar{v} e^{-\alpha y/2}}{2k_0 \lambda^2 \operatorname{sh}(\mu H/2)} \{ \mu \operatorname{ch}[\mu(H-y)/2] - \alpha \operatorname{sh}(\mu(H-y)/2) \} \quad (0 \leq y \leq H). \quad (27)$$

После обратного преобразования Фурье будем иметь

$$h(x, y) = \frac{e^{-\alpha y/2}}{2\pi k_0} \int_L K(x-s, y) v(s) ds \quad (28)$$

$$K(x-s, y) = \int_0^\infty \frac{\cos[\lambda(x-s)]}{\lambda^2 \operatorname{sh}(\mu H/2)} \{ \mu \operatorname{ch}[\mu(H-y)/2] - \alpha \operatorname{sh}(\mu(H-y)/2) \} d\lambda.$$

Скорости $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ определяются из (28) по закону Дарси

$$v_x(x, y) = -k_0 e^{\alpha y} \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}, \quad v_y(x, y) = -k_0 e^{\alpha y} \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \quad (-\infty < x < \infty, 0 < y < H) \quad (29)$$

В §2.3 представлены результаты аналогичной задачи для пористой полуплоскости.

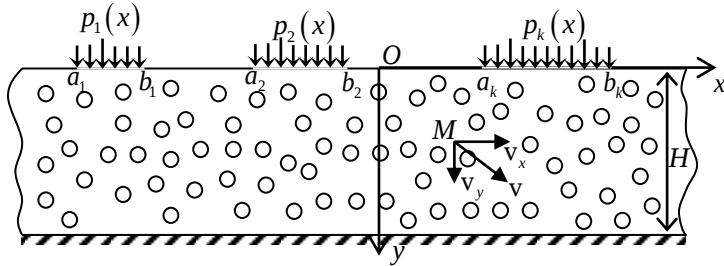
В §2.4 решена смешанная задача фильтрации жидкости в пористую полосу, когда она поступает в полосу через систему щелей в водонепроницаемом экране под заданным давлением.

Пусть отнесенное к прямоугольной системе координат Oxy (ось Oy направлена вертикально вниз) пористое грунтовое основание имеет форму полосы $\Omega = \{-\infty < x < \infty; 0 < y < H\}$ высоты H и обладает коэффициентом фильтрации k , изменяющимся по вертикальной координате y по указанному выше экспоненциальному закону.

Пусть, далее, грань $y=H$ полосы Ω водонепроницаема, т.е. $v_y|_{y=H} = 0$ ($-\infty < x < \infty$), а через систему отрезков $L = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]$ верхней грани $y=0$ жидкость под заданным давлением

$$h(x, y)|_{y=0} = f(x) = \frac{1}{\gamma} \bigcup_{k=1}^n p_k(x) \quad (x \in L) \quad (30)$$

впрыскивается внутрь грунтового основания (фиг. 10).



Фиг. 10

Здесь $h(x, y) = p(x, y)/\gamma - y$ - пьезометрическое давление, γ - удельный вес жидкости, $p(x, y)$ - давление в жидкости, а $f(x)$ - наперед заданная функция.

Требуется определить вертикальную компоненту скорости $v(x)$ на системе отрезков L : $v_y|_{y=0} = v(x)$ ($x \in L$).

Для однозначного определения скорости должен быть задан также расход жидкости Q_j на каждом отрезке $[a_j, b_j]$ ($j = \overline{1, n}$) системы L :

$$\int_{a_j}^{b_j} v(s) ds = Q_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (31)$$

Воспользовавшись выражением (28) при $y=0$, когда $v(s)$ - искомая функция, а $h(x, y)$ - задается формулой (30), и выделив особенности поведения ядра $K(x)$, подобно (9), придем к определяющему сингулярному интегральному уравнению:

$$\frac{1}{\pi k_0} \int_L \left[\frac{1}{s-x} + \frac{\alpha\pi}{4} \text{sign}(s-x) + \frac{1}{2} N(s-x) \right] v(s) ds = f'(x) \quad (x \in L) \quad (32)$$

$$N(s-x) = \int_0^\infty \frac{\mu \text{cth}(\mu H/2) - 2\lambda}{\lambda} \sin(\lambda(s-x)) d\lambda$$

Решение этого уравнения строится методом механических квадратур, сведя его к решению системы линейных алгебраических уравнений, подобной системе (17). В частном случае, когда жидкость втекает через один отрезок проведен численный анализ. После определения решения X_p ($p = \overline{1, N}$) системы, подобной системе (21), безразмерная скорость втекания жидкости представляется формулой

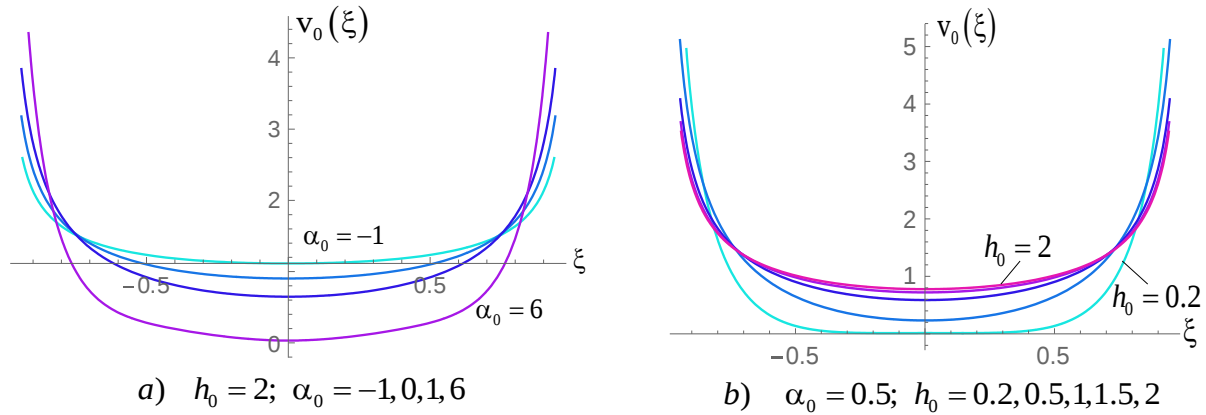
$$v_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{p=1}^N \frac{1}{N} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} T_m(t) T_m(u_p) \right] X_p, \quad (33)$$

а расход жидкости через любое поперечное сечение полосы - формулой:

$$Q_0(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sign}(\xi - u) v_0(u) du = \begin{cases} -Q^0/2 & \xi \leq -1 \\ \sum_{p=1}^N \frac{X_p}{N} \left\{ \arcsin \xi - 2\sqrt{1-\xi^2} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} T_m(u_p) U_{m-1}(\xi) \right\} & |\xi| < 1 \\ Q^0/2 & \xi \geq 1 \end{cases} \quad (34)$$

При численных расчетах полагалось, что жидкость втекает в полосу под равномерным давлением $f(x) = \text{const}$, а безразмерный расход жидкости через отрезок втекания равен единице $Q_0 = 1$.

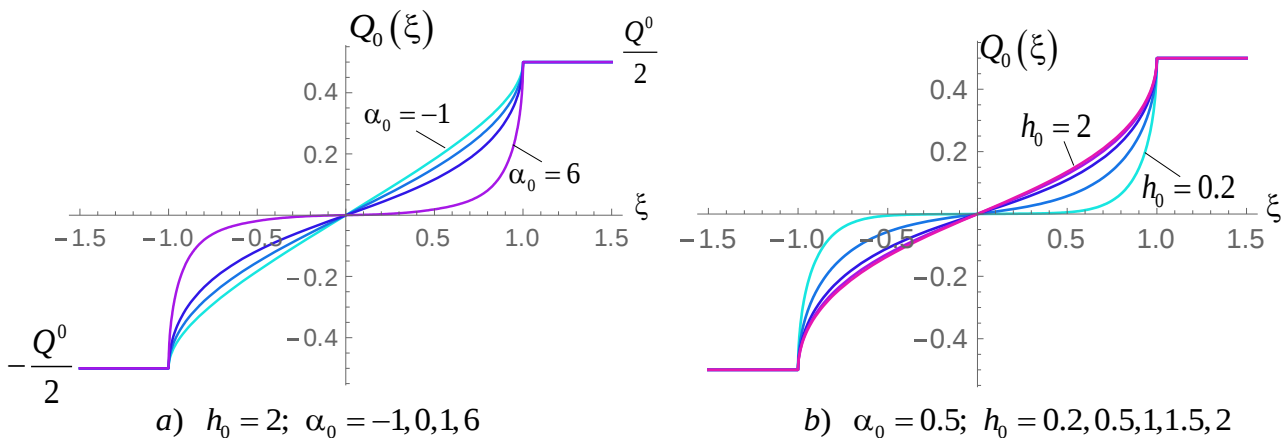
На Фиг. 11 показаны кривые распределения скорости втекающей жидкости по интервалу $(-1,1)$ в момент входа в область полосы, т.е. на линии $y = 0$.



Фиг. 11. Распределение скорости втекающей жидкости по интервалу $(-1,1)$

Судя по графикам фиг.11а, можно предположить, что уменьшение показателя неоднородности приводит к уравниванию скорости в средней части интервала входа на определенном значении, увеличение же этого показателя приводит к приближению средней точки кривой к нулю. Для выяснения, что будет происходить при дальнейшем увеличении α_0 были проведены расчеты при $\alpha_0 = 15, 25$, которые показали, что, при практически бесконечной проницаемости в большей части толщины слоя, в средней части интервала входа жидкости имеет место ее застой, т.е. $v_0 = 0$. При этом длина участка застоя увеличивается с увеличением показателя α_0 . Похожая ситуация имеет место и при малых значениях толщины слоя (фиг.11б).

На Фиг. 12 показаны кривые зависимости расхода жидкости через поперечное сечение слоя от координаты этого сечения для разных значений α_0 и h_0 .



Фиг.12 Расход жидкости через поперечное сечение слоя.

Кривая, соответствующая значению $\alpha_0 = 6$, подтверждает высказанное выше мнение о возникновении зоны застоя в средней части. Расчеты, проведенные для больших по модулю отрицательных значений $\alpha_0 = -25$, показали, что предположение, сделанное выше об уравнивании скоростей в средней части на определенном уровне, верно и этот уровень близок к 1.5.

Кривая, соответствующая $\alpha_0 = -1$, уже относительно близка к прямой, а при $\alpha_0 = -25$ она, за исключением непосредственной близости к концам, переходит в прямую, что соответствует случаю, рассмотренному в параграфе 2.2, когда жидкость втекает в слой с постоянной, по всему интервалу, скоростью.

Расчеты показали, что при $h_0 > 2$ ни распределение скорости в интервале входа, ни графики расхода жидкости практически не зависят от толщины слоя h_0 , графики почти сливаются.

В §2.5 представлены результаты аналогичной задачи для неоднородной пористой полуплоскости. Здесь приведен алгоритм сведения сингулярного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений, а в случае однородной полуплоскости получено замкнутое решение задачи.

В §2.6 получено замкнутое решение граничной задачи теории установившейся фильтрации для пористой экспоненциально неоднородной полосы, когда нижняя грань слоя водонепроницаема, а на верхней грани задано давление втекающей жидкости. При этом давление задается финитной функцией, определенной на системе непересекающихся отрезков.

В §2.7 при аксиальной симметрии в цилиндрической системе координат рассматривается смешанная граничная задача теории гармонических функций для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. В этой задаче на круге граничной плоскости полупространства задано значение искомой гармонической функции, а вне круга задано значение ее нормальной производной. Такой граничной задачей описываются известная задача Ламба из гидродинамики, осесимметрическая задача теории установившейся фильтрации жидкости в пористое грунтовое основание в форме полупространства, смешанная задача теории стационарной теплопроводности для полупространства.

Применительно ко второй из указанных задач имеем следующую граничную задачу:

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (0 \leq r < \infty; -\infty < z < 0)$$

$$h(r, z)|_{z=0} = f(r) \quad (r < a); \quad -k \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0} = g(r) \quad (r > a);$$

$$\text{grad } h(r, z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty.$$
(35)

Здесь k - коэффициент фильтрации пористого полупространства, $h = h(r, z)$ - пьезометрический напор, а $f(r)$ и $g(r)$ заданные функции из класса $L(0, \infty)$.

При помощи интегрального преобразования Ханкеля из (35) получено представление функции $h(r, z)$ через скорость втекания жидкости $\varphi(r) = -k \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0}$ в круге ($r < a$). Далее, удовлетворяя первому граничному условию в (35) и переходя к безразмерным переменным, задача окончательно сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$\int_0^1 K(r, \rho) \varphi(\rho) \rho d\rho = F_0(r) = -kf(r) - \int_1^\infty K(r, \rho) g(\rho) \rho d\rho \quad (0 < r < 1),$$

$$K(r, \rho) = \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$
(36)

Решение уравнения (36) строится тремя различными методами: методом преобразующих операторов, методом сингулярных интегральных уравнений и методом механических квадратур. Первыми двумя методами получены замкнутые, в виде интегралов, решения. Для применения третьего метода, представлена новая квадратурная формула для интеграла с ядром Вебера-Сонина $K(r, \rho)$:

$$\int_0^1 K(r, \rho) \frac{f(\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \sum_{i=1}^n w_i^{(0)} f(x_i) R(r, i); \quad \int_0^1 \frac{f(\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \sum_{i=1}^n w_i^{(0)} f(x_i)$$
(37)

где

$$w_i^{(0)} = \frac{4n-1}{n(4n^2-1)x_i P_{n-1}^{(1, \frac{1}{2})}(\xi_i) P_{n-1}^{(0, -\frac{1}{2})}(\xi_i)}; \quad x_i = \sqrt{\frac{1-\xi_i}{2}}; \quad P_n^{(0, -\frac{1}{2})}(\xi_i) = 0;$$

$$R(r, x_i) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (4m+1) \left(\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} \right)^2 P_m^{\frac{1}{2}}(x_i) P_m^{\frac{1}{2}}(r); \quad P_m^{\frac{1}{2}}(r) = P_m^{(0, -\frac{1}{2})}(1-2r^2);$$

ядро $K(r, \rho)$ определяется формулой (36), $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ - многочлен Якоби.

Решение уравнения (36) представляется в виде

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{2}{(2n+1)} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{x_i^2 - \rho^2} \frac{P_n^{(0, -\frac{1}{2})}(1-2\rho^2)}{x_i P_{n-1}^{(1, \frac{1}{2})}(1-2x_i^2)} \quad (38)$$

где $X_i (i=1, n)$ - решение системы

$$\sum_{i=1}^n w_i^{(0)} X_i R(x_k, x_i) = F_0(x_k) \quad (k=1, n) \quad (39)$$

Следует отметить, что для получения замкнутого решения аналитическими методами очень существенно отсутствие в уравнении (36) интеграла с регулярным ядром, в то время как для метода механических квадратур наличие такого интеграла приводит лишь к добавлению слагаемого под суммой в (39).

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

- поставлена и решена контактная задача о взаимодействии коллинеарной системы из произвольного конечного числа упругих стрингеров с различными жесткостями на сдвиг с упругим слоем конечной или бесконечной толщины при антиплоской деформации, модуль сдвига слоя по глубине изменяется по экспоненциальному закону, численным анализом выявлены закономерности изменения касательных контактных напряжений и коэффициентов их концентрации;

- выявлены эффекты влияния фактора неоднородности на распределение касательных контактных напряжений и на коэффициенты их концентрации;

- сравнительным анализом численных результатов решений контактных задач о взаимодействии стрингеров с экспоненциально неоднородным упругим слоем и с такой же упругой полуплоскостью определен диапазон изменения относительной высоты слоя, когда эти результаты практически совпадают;

- для случаев одной и двух упругих накладок проведен обстоятельный численный анализ зависимости контактных напряжений под стрингерами и коэффициентов их концентрации от показателя неоднородности при разных толщинах полосы и, наоборот, от толщины полосы при различных показателях неоднородности. Во втором случае исследовано еще и взаимовлияние коэффициентов концентрации у ближних концов стрингеров в зависимости от расстояния между ними;

- поставлены и решены смежные с контактными задачами теории упругости граничные задачи плоской теории установившейся фильтрации жидкости в пористых грунтовых основаниях типа слоя и полупространства, коэффициент фильтрации которых по глубине изменяется по экспоненциальному закону;

- проведен численный анализ задачи о фильтрации жидкости, подаваемой внутрь неоднородной полосы через систему щелей в водонепроницаемом экране под заданным давлением

ем, построены графики распределения скорости втекания жидкости и расхода жидкости через поперечное сечение полосы для различных значений показателя неоднородности и толщины слоя;

- построено замкнутое решение аналогичной задачи для неоднородной полуплоскости, когда жидкость втекает через один отрезок;
- построено замкнутое решение рассмотренной задачи в случае, когда водонепроницаемый экран на верхней грани полосы отсутствует, т.е. вне отрезков подачи жидкости давление на границе равно нулю;
- поставлена осесимметрическая смешанная граничная задача теории гармонических функций для полупространства с круговой линией раздела граничных условий, встречающаяся в разных областях механики, и решена тремя различными методами: методом преобразующих операторов, методом аналитического решения СИУ и методом механических квадратур на основе квадратурной формулы для интеграла с ядром в виде интеграла Вебера-Сонина от произведения функций Бесселя первого рода нулевого порядка.

Список научных работ по теме диссертации

1. Аветисян С.А. О решении одной осесимметричной смешанной граничной задачи стационарной теплопроводности, встречающейся в математической теории упругости. Сб. докл. II-ой межд. науч.-техн. конф. «Архитектура и строительство – актуальные проблемы», Ереван-Джермук, 30.09-03.10, 2010, с.229-235.
2. Аветисян С.А. О двух смежных граничных задачах теории фильтрации и теории упругости для экспоненциально неоднородной полосы. Механика - 2013, Труды межд. школы–конф. молодых ученых, посв. 70–летию НАН РА, Ереван, 2013, стр. 40–44.
3. Mkhitarian, S. M., Tokmajyan, H. V., Avetisyan, S. A., & Grigoryan, M. S. (2014). On Steady-State Filtration of Fluid in Strip-Like and Wedge-Shaped Porous Ground Bases. In Advanced Materials Research (Vol. 1020, pp. 373–378). Trans Tech Publications, Ltd. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.1020.373>
4. Аветисян С.А., Мкртчян М.М. Об установившейся фильтрации жидкости в пористой экспоненциально неоднородной полосе при заданном режиме давления. Известия НАН РА. Механика, 2015, т. 68, N 2, стр. 68-79.
5. Аветисян С.А. Об одной смешанной задаче для упругого экспоненциально неоднородного слоя при антиплоской деформации. Сб. науч. трудов межд. конф. "Актуальные проблемы механики сплошной среды". 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, 2015 стр.15-19.
6. Avetisyan S.A., Grigoryan N.V., Mkrtchyan M.M. On contact interaction of an elastic exponentially nonhomogeneous by depth layer and stringer at antiplane deformation. Proceeding of 8th International Conference "Contemporary Problems of Architecture and Construction", Yerevan, Armenia, 26-28 October, 2016, pp. 54-56.
7. Avetisyan S.A., Grigoryan N.V., Mkrtchyan M.M. On one mixed boundary problem for an elastic exponentially nonhomogeneous by depth layer at antiplane deformation. Proceeding of 9th International Conference "Contemporary Problems of Architecture and Construction", Batumi, Georgia, 13-18 September, 2017, pp. 58-62.
8. Аветисян С.А. О контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной по экспоненциальному закону полосой. Доклады НАН РА, 2022, т. 122, N 2, стр. 141-152.
9. Мхитарян С.М., Аветисян С.А., Мкртчян М.С. О точном решении одного класса задач контактного взаимодействия между стрингерами и упругой бесконечной пластиной. Известия НАН РА. Механика, 2024, т. 77, N 4, стр. 48-69.
10. Аветисян С.А., Амирджян А.А., Саакян А.В. Антиплоская деформация упругого экспоненциально неоднородного слоя с упругим стрингером на границе. Известия НАН РА. Механика. 2025, т.78, №1, стр. 3-12.

ՄԻՐԱՆՈՒՇ ԱՐԱՐԱՏԻ ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԷԶՍՊՈՆԵՆՑԻԱԼ ՕՐԵՆՔՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԻՄՔԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԱԿԻՑ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆ

Ամփոփում

Ատենախոսությունը նվիրված է առաձգականության տեսության և ծակոտկեն գետնահողերում հեղուկի կայունացած ֆիլտրացիայի տեսության հարակից եզրային խնդիրների մի դասի հետազոտությանը, երբ առաձգական հիմքի սահքի մոդուլը և ծակոտկեն գետնահողի թողունակության գործակիցը փոփոխվում են ըստ խորության ցուցչային օրենքով:

Առաձգականության տեսության խնդիրները կապված են հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում բարակ առաձգական վերադիրներից անհամասեռ շերտին բեռի փոխանցման հետ կապված հարցերի ուսումնասիրությանը: Մասնավոր դեպքերում հետազոտվել է կոնտակտային լարումների բաշխման և վերադիրների ծայրերի մոտ նրանց կենտրոնացման գործակիցների կախվածությունը շերտի սահքի մոդուլի անհամասեռության ցուցիչից և շերտի հաստությունից:

Ֆիլտրացիայի տեսության շրջանակներում դիտարկվել են խնդիրներ ըստ խորության ցուցչային օրենքով փոփոխվող թողունակության գործակից ունեցող ծակոտկեն գետնահողի շերտի համար, որի հիմքը ջրամեկուսացված է, իսկ վերին եզրի վրա տրված հատվածների համակարգով ներթափանցող հեղուկի համար տրված են կամ արագությունը, կամ ճնշումը, կամ խառը եզրային պայմաններ: Առաջին երկու դեպքերում ստացված են խնդիրների փակ լուծումներ ինտեգրալների տեսքով: Խառը եզրային պայմաններով խնդրում թվային վերլուծությամբ հետազոտվել է թողունակության անհամասեռության ցուցիչի և շերտի հաստության ազդեցությունը հեղուկի հոսքի արագության և լայնական կտրվածքով հեղուկի ծախսի վրա:

Նշված երկու ոլորտների խնդիրները լուծված են միասնական մաթեմատիկական գործիքակազմի օգտագործմամբ: Ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ ստացվում են դրված խնդիրների նմանատիպ որոշիչ հավասարումները: Մինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների տեսության միջոցով հնարավոր դեպքերում ստացվում են որոշիչ հավասարումների փակ լուծումներ: Թվային վերլուծությունը կատարվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի թվային-վերլուծական եղանակով:

Ատենախոսությունում ստացվել են նոր արդյունքներ առաձգական անհամասեռ շերտի և անհամասեռ թողունակությամբ ծակոտկեն գետնահողերի համար: Դրանք են՝

- Դրվել և լուծվել են կոնտակտային խնդիրներ կամայական վերջավոր թվով առաձգական վերադիրների և վերջավոր կամ անվերջ հաստության առաձգական շերտի փոխազդեցության վերաբերյալ: Ենթադրվում է, որ փոխազդող զույգը գտնվում է հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում, շերտի սահքի մոդուլը ըստ խորության փոխվում է ցուցչային օրենքով: Թվային վերլուծությամբ ուսումնասիրվել են կոնտակտային լարումների և

ստրինգերների ծայրակետերում դրանց կենտրոնացման գործակիցների փոփոխության օրինաչափությունները:

- Բացահայտված է անհամասեռության գործոնի ազդեցությունը կոնտակտային լարումների բաշխման և դրանց կենտրոնացման գործակիցների վրա:

- Առաձգական վերադիրների և ցուցային օրենքով անհամասեռ շերտի ու նմանատիպ կիսահարթության փոխազդեցության կոնտակտային խնդիրների լուծումների համեմատական վերլուծությամբ գտնվել է շերտի հաստության համար այն տիրույթը, երբ այդ լուծումները գործնականում համընկնում են:

- Մեկ և երկու առաձգական վերադիրների դեպքում կատարվել է մանրամասն թվային վերլուծություն և պարզվել է կոնտակտային լարումների և վերադիրների ծայրակետերում դրանց կենտրոնացման գործակիցների կախվածությունը անհամասեռության ցուցիչից շերտի տարբեր հաստությունների համար և, ընդհակառակը, շերտի հաստությունից անհամասեռության ցուցիչի տարբեր արժեքների դեպքում: Երկրորդ դեպքում ուսումնասիրվել է նաև հարևան ծայրերի մոտ լարումների կենտրոնացման գործակիցների փոխազդեցությունը՝ կախված նրանց միջև եղած հեռավորությունից:

- Ծակոտկեն գետնահողերում կայունացած ֆիլտրացիայի տեսության շրջանակներում դրվել և լուծվել են առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրներին հարակից եզրային խնդիրներ, երբ գետնահողը ունի շերտի կամ կիսատարածության ձև և նրա թողունակության գործակիցը ըստ խորության փոփոխվում է ցուցային օրենքով:

- Կատարվել է հեղուկի ֆիլտրացիայի խնդրի թվային վերլուծություն այն դեպքում, երբ հեղուկը տրված ճնշումով ներթափանցում է անհամասեռ շերտի խորքը անջրանցիկ էկրանի մեջ եղած ճեղքերի համակարգի միջով, անհամասեռության ցուցիչի և շերտի հաստության տարբեր արժեքների համար կառուցվել են հեղուկի ներթափանցման արագության բաշխման և լայնական կտրվածքով ջրի ծախսի գրաֆիկները:

- Կառուցվել է անհամասեռ կիսահարթության համար նման խնդրի փակ լուծումը, երբ ջուրը ներթափանցում է մեկ հատվածով:

- Կառուցվել է դիտարկվող խնդրի լուծումը այն դեպքում, երբ շերտի վերին եզրի անջրանցիկ էկրանը բացակայում է, այսինքն հեղուկի ներթափանցման հատվածներից դուրս ճնշումը հավասար է զրոյի:

- Դիտարկվել է հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսության առանցքահամաչափ խառը եզրային խնդիր կիսատարածության համար, երբ եզրային պայմանների բաժանման գիծը շրջանագիծ է: Այս խնդիրը հանդիպում է հոծ միջավայրի մեխանիկայի տարբեր բնագավառներում: Խնդիրը լուծված է երեք տարբեր եղանակներով՝ ձևափոխող օպերատորների մեթոդով, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման վերլուծական մեթոդով և մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդով, որը հիմնված է զրոյական կարգի առաջին սեռի Բեսելի ֆունկցիաների արտադրյալից Վերեր-Սոնինի ինտեգրալի տեսքով կորիզ պարունակող ինտեգրալների հաշվման համար քառակուսացման բանաձևի վրա:

**A STUDY OF A CLASS OF PROBLEMS RELATED TO THE THEORY OF ELASTICITY
AND THEORY OF FILTRATION FOR FOUNDATIONS NONHOMOGENIOUS BY AN
EXPONENTIAL LAW**

Summary

The dissertation is devoted to the study of a class of boundary problems related to the theory of elasticity and the theory of stabilized fluid filtration in porous soils, when the shear modulus of the elastic foundation and the permeability coefficient of the porous soil vary with depth according to an exponential law.

The problems of the elasticity theory are related to the transfer of loads from thin elastic stringers to inhomogeneous layers under conditions of anti-plane deformation. In some particular cases, the dependence of the distribution of contact stresses and their concentration coefficients near the edges of the stringers on the inhomogeneity index of the layer's shear modulus and the layer thickness has been investigated.

Within the framework of filtration theory, problems have been considered for a porous subsoil layer with a permeability coefficient varying exponentially with depth, the base of which is waterproofed, and for the fluid penetrating through a system of sections on the upper edge, either velocity, pressure, or mixed boundary conditions are given. In the first two cases, closed solutions to the problems in the form of integrals were obtained. In the problem with mixed boundary conditions, the effect of the permeability inhomogeneity index and layer thickness on the fluid flow velocity and fluid flow rate in the cross section was investigated by numerical analysis.

The problems of the two mentioned areas are solved using the same mathematical apparatus. With the help of integral transformations, similar governing equations of the problems are obtained. Using the theory of singular integral equations, closed solutions of governing equations are obtained in possible cases. Numerical analysis was performed using the numerical-analytical method of mechanical quadrature rules.

The dissertation provides new results for elastic inhomogeneous layers and porous subsoils with inhomogeneous permeability. They are:

- Contact problems were stated and solved regarding the interaction of an arbitrary finite number of elastic stringers and an elastic layer of finite or infinite thickness. It is assumed that the interacting pair is in a state of anti-plane deformation, the shear modulus of the layer changes exponentially with depth. The patterns of change in contact stresses and their concentration coefficients at the ends of the stringers were studied by numerical analysis.
- The influence of the inhomogeneity factor on the distribution of contact stresses and their concentration coefficients is revealed.
- By comparative analysis of solutions to contact problems of the interaction of an exponentially inhomogeneous layer and a similar half-plane with elastic stringers, the range

of layer thicknesses where these solutions practically coincide with each other has been found.

- In the case of one and two elastic overlays, a detailed numerical analysis was performed and the dependence of the contact stresses and their concentration coefficients at the ends of the stringers on the inhomogeneity exponent for different layer thicknesses and, conversely, on the layer thickness for different values of the inhomogeneity exponent was determined. In the second case, the interaction of the stress concentration coefficients at adjacent ends depending on the distance between them was also studied.
- Within the framework of the theory of stabilized filtration in porous soils, boundary problems related to contact problems of the elasticity theory have been stated and solved, when the soil has the form of a layer or half-space and its permeability coefficient varies exponentially with depth.
- A numerical analysis of the liquid filtration problem was performed in the case where the liquid penetrates the depth of the inhomogeneous layer through a system of cracks in the waterproof screen at a given pressure. Graphs of the liquid penetration velocity distribution and cross-sectional water flow were constructed for different values of the inhomogeneity exponent and layer thickness.
- A closed-form solution to the same problem has been constructed for an inhomogeneous half-plane when water penetrates through a single section.
- The solution to the considered problem was constructed in the case, when the waterproof screen of the upper layer of the layer is absent, that is, the pressure outside the liquid penetration areas is equal to zero.
- An axisymmetric mixed boundary value problem of the theory of harmonic functions for a half-space is considered, when the boundary condition dividing line is a circle. This problem is encountered in various areas of solid mechanics. The problem is solved in three different ways: by the method of transformation operators, by the analytical method of solving singular integral equations, and by the method of mechanical quadrature formulas, which is based on the quadrature formula for calculating integrals containing a kernel in the form of a Weber-Sonin integral from the product of Bessel functions of the first kind of the zeroth order.

