ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Միքաելյան Համլետ Վարոսի

# Գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարների հետազոտում

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Երևան - 2026

---

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Микаелян Гамлет Варосович

# Исследование рёберно-хроматических сумм графов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван - 2026

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

| | |
|---|---|
| Գիտական ղեկավար՝ | ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Պ. Ա. Պետրոսյան |
| Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ | ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ռ. Ռ. Քամալյան |
| | ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Տ. Է. Փիլիպոսյան |
| Առաջատար կազմակերպություն՝ | Ռուս-հայկական (սլավոնական) համալսարան |

Պաշտպանությունը կայանալու է 2026թ. հուլիսի 3-ին, ժ. $15^{00}$-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲԿԳԿ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2026թ. հունիսի 2-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր՝ Կ.Լ. Ավետիսյան

---

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | кандидат физ.-мат. наук П. А. Петросян |
| Официальные оппоненты: | доктор физ.-мат. наук Р. Р. Камалян |
| | кандидат физ.-мат. наук Т. Э. Пилипосян |
| Ведущая организация: | Российско-Армянский (Славянский) университет |

Защита состоится 3-го июля 2026г. в $15^{00}$ часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета КВОН 050 "Математика", по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 2-го июня 2026г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук К.Л. Аветисян

# Աշխատանքի ընդհանուր նկարագիրը

## Թեմայի արդիականությունը

Վերջին տասնամյակներում դիսկրետ մաթեմատիկայում մեծ հետաքրքրություն են առաջացրել գրաֆների ներկումների խնդիրները: Դա պայմանավորված է այդ խնդիրների տեսական կարևորությամբ, ինչպես նաև այն բազմաթիվ կիրառական խնդիրներով, որոնք բերվում են համապատասխան դիսկրետ խնդիրների: Կիրառական խնդիրներից հիշատակենք կարգացուցակների գոյության և կառուցման հարցեր, համակարգիչների և ծրագրերի հիշողության օպտիմալ բաշխման խնդիրներ, ինտեգրալային սխեմաների նախագծման խնդիրներ, գերմեծ չափի հաշվարկների զուգահեռացման հարցեր, անլար ռադիոհաղորդման ցանցերի հաճախականությունների նշանակման խնդիրներ, անընդհատ պրոցեսների մաթեմատիկական մոդելավորման խնդիրներ, և այլն: Այսպես, օրինակ, քննաշրջանի օպտիմալ կարգացուցակ կառուցելու խնդիրը բերվում է գրաֆի քրոմատիկ թվի որոշմանը, իսկ սպորտային մրցաշարերի կարգացուցակ կազմելու խնդիրը բերվում է գրաֆի քրոմատիկ ինդեքսը գտնելու խնդրին:

Կիրառական խնդիրների մոդելավորման ժամանակ այդ խնդիրների առանձնահատկություններով պայմանավորված՝ ստացված ներկումները պետք է բավարարեն լրացուցիչ սահմանափակումների, այդ իսկ պատճառով արդիական է դառնում ոչ միայն դասական, այլև տարաբնույթ սահմանափակումներով գագաթային (կողային) ներկումների հետազոտումը: Օրինակ՝ գրաֆների ցուցակային ներկումները [1,2], որոնք այնպիսի ճիշտ գագաթային ներկումներ են, որտեղ յուրաքանչյուր գագաթի գույնը ընտրվում է թույլատրելի գույների ցուցակից, օգտագործվում են այնպիսի կարգացուցակների մոդելավորման համար, որոնցում յուրաքանչյուր աշխատանք կարող է կատարվել միայն ժամանակի որոշակի պահերին կամ միայն որոշակի մեքենաների կողմից: Մեկ այլ հետաքրքիր օրինակ է գրաֆների միջակայքային ներկումը [3,4]: Միջակայքային կողային ներկումը ճիշտ կողային ներկում է, որի դեպքում յուրաքանչյուր գագաթին կից կողերը ներկվում են հաջորդական գույներով, և կարգացուցակների տեսության մեջ համապատասխանում է կոմպակտ դասացուցակների գոյության և կառուցման խնդիրներին [5]: Երկկողմանի մուլտիգրաֆների հավասարակշռված կողային ներկումները դիտարկվել են [6]-ում, որտեղ $G$-ի կողմերից մեկի յուրաքանչյուր գագաթի համար տրված են գույների բազմություններ, որոնցից պետք է ընտրվեն այդ գագաթին կից կողերի գույները, և համապատասխանում են այնպիսի ուսումնական դասացուցակների կառուցմանը, որտեղ հաշվի են առնվում ուսուցիչների նախապատվությունները: Ցույց է տրվել, որ ընդհանուր դեպքում խնդիրը NP-լրիվ է: [7]-ում դիտարկվել են երկկողմանի մուլտիգրաֆների կողային ներկումների գոյության

[1] P. Erdős, A.L. Rubin, H. Taylor, Choosability in graphs, Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congr. Numer. 26, 1979, pp. 125-157.

[2] В.Г. Визинг, Раскраски вершин графа в предписанные цвета, Методы дискретного анализа 29, 1976, стр. 3-10.

[3] A. Asratian, R. Kamalian. Investigation on Interval Edge-Colorings of Graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B 62(1), 1994, pp. 34–43.

[4] А. С. Асратян, Р. Р. Камалян. Интервальные раскраски ребер мультиграфа. Прикладная математика 5, 1987, pp. 25–34.

[5] A.S. Asratian, T.M.J. Denley, R. Haggkvist, Bipartite graphs and their applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1998.

[6] S. Even, A. Itai, A. Shamir, On the complexity of timetable and multicommodity flow problems, SIAM J. Comput. 5 (4), 1976, pp. 691-703.

[7] D. D. Werra. Balanced Schedules. INFOR: Information Systems and Operational Research 9(3), 1971, pp. 230–237.

և կառուցման խնդիրները, երբ յուրաքանչյուր գագաթի համար այդ գագաթին կից ցանկացած երկու գույնով ներկված կողերի քանակների տարբերությունը մեծ չէ մեկից:

$G$ գրաֆի $\alpha : V(G) \to \{1, \dots, t\}$ արտապատկերումը կոչվում է ճիշտ գագաթային $t$-ներկում, եթե ցանկացած $uv \in E(G)$-ի համար ստույգ է $\alpha(u) \neq \alpha(v)$ պայմանը: Այն նվազագույն $t$-ն, որի դեպքում $G$-ն ունի ճիշտ գագաթային $t$-ներկում, կոչվում է $G$ գրաֆի քրոմատիկ թիվ, և այն նշանակվում է $\chi(G)$-ով: Եթե $\alpha$-ն $G$ գրաֆի ճիշտ գագաթային $t$-ներկում է, ապա $\sum(G, \alpha)$-ով նշանակվում է այդ գրաֆի գագաթների գույների գումարը: Յուրաքանչյուր $G$ գրաֆի համար սահմանենք գագաթային քրոմատիկ գումար $\sum(G)$-ն հետևյալ կերպ. $\sum(G) = \min\limits_{\alpha} \sum(G, \alpha)$, որտեղ $\sum(G, \alpha)$ պարամետրի մինիմումը վերցվում է ըստ $G$ գրաֆի բոլոր ճիշտ գագաթային ներկումների: $G$ գրաֆի ճիշտ գագաթային $t$-ներկումը կոչվում է գումարային գագաթային $t$-ներկում, եթե $\sum(G, \alpha) = \sum(G)$: $G$ գրաֆի ամրություն $s(G)$-ն այն նվազագույն $t$-ն է, որի դեպքում $G$-ն ունի գումարային գագաթային $t$-ներկում:

Գրաֆների գումարային գագաթային ներկումները, ամրությունը և գագաթային քրոմատիկ գումարները ներմուծվել են Կուբիկայի [8] և Սուպովիտի [9] կողմից 80-ական թվականներին: Կուբիկան և Շվենքը [10]-ում ցույց են տվել, որ ընդհանուր դեպքում գրաֆի գագաթային քրոմատիկ գումարի որոշումը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր և բազմանդամային ժամանակում լուծելի է ծառերի դեպքում: [11]-ում Յանսենը առաջարկել է մասնակի $k$-ծառերի համար դինամիկ ծրագրավորման ալգորիթմ: [12]-ում առաջարկվել է բազմանդամային լուծում արտաքին հարթ գրաֆների համար: [13,14,15] աշխատանքներում առաջարկվել են տարբեր գրաֆների դասերի համար մոտավոր ալգորիթմներ: [16]-ում գրաֆների գագաթային ամրության համար ապացուցվել է Բրուքսի թեորեմի համանման արդյունք: Մյուս կողմից, հայտնի է, որ գոյություն ունեն $G$ գրաֆներ, որոնց համար $s(G) > \chi(G)$ [17]: Ընդ որում, գրաֆի գագաթային ամրությունը որոշելու խնդիրն NP-դժվար է [18]:

Գրաֆների գագաթային քրոմատիկ գումարների որոշ գնահատականներ ստացվել են

[8] E. Kubicka. “The Chromatic Sum and Efficient Tree Algorithms”. PhD thesis. Western Michigan University, 1989.

[9] K. J. Supowit. Finding a Maximum Planar Subset of a Set of Nets in a Channel. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems 6(1), 1987, pp. 93–94.

[10] E. Kubicka, A. J. Schwenk. An Introduction to Chromatic Sums. Proceedings of the 17th Annual ACM Computer Science Conference. CSC ’89. Louisville, Kentucky: Association for Computing Machinery, 1989, pp. 39–45.

[11] K. Jansen. The optimum cost chromatic partition problem. Proceedings of the 3rd Italian Conference on Algorithms and Complexity (CIAC’97). Ed. by G. Bongiovanni, D. P. Bovet, G. Di Battista. 1203. Lecture Notes in Computer Science. ”Springer Berlin Heidelberg”, 1997, pp. 25–36.

[12] E. Kubicka. Polynomial Algorithm for Finding Chromatic Sum for Unicyclic and Outerplanar Graphs. Ars Comb. 76, July 2005, pp. 193–201.

[13] K. Giaro, R. Janczewski, M. Kubale, M. Małafiejski. A 27/26-approximation algorithm for the chromatic sum coloring of bipartite graphs. Lecture Notes in Computer Science. 2462. Oct. 2002, pp. 135-145.

[14] K. Jansen. Approximation results for the optimum cost chromatic partition problem. Journal of Algorithms 34(1), 2000, pp. 54–89.

[15] E. Kubicka, G. Kubicki, D. Kountanis. Approximation algorithms for the chromatic sum. Proceedings of the First Great Lakes Computer Science Conference. 507. Lecture Notes in Computer Science. 1989, pp. 15–21.

[16] H. Hajiabolhassan, M. L. Mehrabadi, R. Tusserkani. Minimal coloring and strength of graphs. Discrete Mathematics 215(1), 2000, pp. 265–270.

[17] P. Erdős, E. Kubicka, A. Schwenk. Graphs that require many colors to achieve their chromatic sum. Congressus Numerantium 71, 1990, pp. 17–28.

[18] M. R. Salavatipour. On sum coloring of graphs. Discrete Applied Mathematics 127, 2003, pp. 477–488.

[19,20]-ում:

$G$ գրաֆի $\alpha : E(G) \to \{1,\ldots,t\}$ արտապատկերումը կոչվում է ճիշտ կողային $t$-ներկում, եթե ցանկացած $e,e' \in E(G)$ հարևան կողերի համար ստույգ է $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ պայմանը: Այն նվազագույն $t$-ն, որի դեպքում $G$-ն ունի ճիշտ կողային $t$-ներկում, կոչվում է $G$ գրաֆի քրոմատիկ ինդեքս և նշանակվում է $\chi'(G)$-ով: Եթե $\alpha$-ն $G$ գրաֆի ճիշտ կողային $t$-ներկում է, ապա $\sum'(G,\alpha)$-ով նշանակվում է այդ գրաֆի կողերի գույների գումարը: Յուրաքանչյուր $G$ գրաֆի համար սահմանենք կողային քրոմատիկ գումար $\sum'(G)$-ն հետևյալ կերպ. $\sum'(G) = \min\limits_{\alpha} \sum'(G,\alpha)$, որտեղ $\sum'(G,\alpha)$ պարամետրի մինիմումը վերցվում է ըստ $G$ գրաֆի բոլոր ճիշտ կողային ներկումների: $G$ գրաֆի ճիշտ կողային $t$-ներկումը կոչվում է գումարային կողային $t$-ներկում, եթե $\sum'(G,\alpha) = \sum'(G)$: $G$ գրաֆի կողային ամրություն $s'(G)$-ն այն նվազագույն $t$-ն է, որի դեպքում $G$-ն ունի գումարային կողային $t$-ներկում: Գրաֆների գումարային կողային ներկումները, կողային ամրությունը և կողային քրոմատիկ գումարները ներմուծվել են [21,22,16]-ում: [21]-ում ցույց է տրվել, որ խնդիրը NP-լրիվ է, հետագայում խնդրի NP-լրիվ լինելն ապացուցվել է ավելի նեղ դասերի համար, ինչպիսիք են $\Delta(G) \leq 3$ առավելագույն աստիճանով երկկողմանի գրաֆները [22,23,24], համասեռ գրաֆները [18], հարթ 3-համասեռ գրաֆները, մասնակի 2-ծառերը [24]: Այդուհանդերձ, բազմանդամային ժամանակում խնդրի լուծելի լինելը ապացուցվել է ծառերի, սահմանափակ ցիկլոմատիկ թվով գրաֆների համար [22,18]: [23]-ում ստացվել են կողային քրոմատիկ գումարի գնահատականներ տրոհվող և համարյա համասեռ գրաֆների համար, համասեռ գրաֆների համար ստացվել է մոտարկող ալգորիթմ: [25,16] աշխատանքներում ցույց է տրվել կողային ամրության Վիզինգի թեորեմի նման արդյունք, ընդ որում կան գրաֆներ, որոնց համար $s'(G) > \chi'(G)$ [25,16,22]: Կողային ամրության ճշգրիտ արժեքները ստացվել են երկկողմանի մուլտիգրաֆների, մուլտիցիկլերի համար [26,22]:

Գումարային ներկումներին և քրոմատիկ գումարներին նվիրված հետազոտությունների մեծ մասը հիմնականում վերաբերում է այդպիսի գագաթային ներկումների կառուցման և բարդության խնդիրներին, սակայն քիչ է անդրադարձ կատարվել գումարային կողային ներկումների կառուցման և կողային քրոմատիկ գումարների գնահատման հարցերին: Մյուս կողմից, գումարային կողային ներկումներին նվիրված քիչ աշխատանքներում հիմնականում դիտարկվում են այդ ներկումների քրոմատիկ գումարների և ամրության որոշման խնդիրների բարդության հարցերը: Ընդհանուր առմամբ, քիչ են հետազոտված գրաֆների գումարային կողային ներկումների

[19] M. Alishahi, A. Taherkhani. A Note on Chromatic Sum. Ars Combinatoria 116, 2014, pp. 49–54.

[20] Z. Kokosiński, K. Kwarciany. On Sum Coloring of Graphs with Parallel Genetic Algorithms. Adaptive and Natural Computing Algorithms. Ed. by B. Beliczynski, A. Dzielinski, M. Iwanowski, B. Ribeiro. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, pp. 211–219.

[21] A. Bar-Noy, M. Bellare, M. M. Halldórsson, H. Shachnai, T. Tamir. On chromatic sums and distributed resource allocation. Information and Computation 140(2), 1998, pp. 183–202.

[22] K. Giaro, M. Kubale. Edge-chromatic sum of trees and bounded cyclicity graphs. Information Processing Letters 75(1), 2000, pp. 65–69.

[23] P. Petrosyan, R. Kamalian. On sum edge-coloring of regular, bipartite and split graphs. Discrete Applied Mathematics 165, 2014, pp. 263-269.

[24] D. Marx. Complexity results for minimum sum edge coloring. Discrete Applied Mathematics 157, 2009, pp. 1034–1045.

[25] J. Mitchem, P. Morriss, E. F. Schmeichel. On the cost chromatic number of outerplanar, planar, and line graphs. Discuss. Math. Graph Theory 17(2), 1997, pp. 229–241.

[26] J. Cardinal, V. Ravelomanana, M. Valencia-Pabon. Minimum sum edge colorings of multicycles. Discrete Applied Mathematics 158, 2010, pp. 1216–1223.

կառուցման և կողային քրոմատիկ գումարների գնահատման խնդիրները գրաֆների հատուկ դասերի համար, ինչպիսիք են, օրինակ, երկկողմանի գրաֆները, արտաքին հարթ գրաֆները, լրիվ բազմակողմանի գրաֆները և այլն: Գումարային կողային ներկումներին նվիրված աշխատանքներում ընդհանրապես չեն դիտարկվել տարբեր գրաֆային գործողությունների կողային քրոմատիկ գումարների և կողային ամրության գնահատման խնդիրները:

## Աշխատանքի հիմնական նպատակը և նրանում դիտարկված խնդիրները

Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարների գնահատման, ինչպես նաև գումարային կողային ներկումների կառուցման և կողային ամրության գնահատման խնդիրներ: Աշխատանքում նաև դիտարկվել են գրաֆների տարբեր արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարների գնահատման և գումարային կողային ներկումների կառուցման խնդիրներ: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է վերոհիշյալ խնդիրների հետազոտումը գրաֆների տարբեր դասերի համար, ինչպես նաև արդյունավետ ալգորիթմների մշակումը, որոնք կառուցում են նվազագույն գումարներով ճիշտ կողային ներկումներ:

## Հետազոտության օբյեկտները

Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում ինչպես ընդհանուր գրաֆները, այնպես էլ գրաֆների տարբեր դասեր, գրաֆների գումարային կողային ներկումներ, այդպիսի ներկումներում մասնակցող գույների քանակներ, ինչպես նաև այդ ներկումներում մասնակցող գույների գումարներ: Հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում նաև գրաֆների տարբեր արտադրյալներ:

## Հետազոտության մեթոդները

Հետազոտությունն իրականացվել է դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և դիսկրետ օպտիմիզացիայի մեթոդների օգնությամբ:

## Գիտական նորույթը

Աշխատանքում առաջին անգամ տրվում են ընդհանուր հասանելի ստորին և վերին գնահատականներ գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարների համար, հետազոտվում են գրաֆների տարբեր արտադրյալների գումարային կողային ներկումները, այդպիսի ներկումներում մասնակցող գույների քանակները, ինչպես նաև կողային քրոմատիկ գումարները: Գրաֆների տարբեր դասերի համար տրվում են կողային քրոմատիկ գումարի և կողային ամրության ինչպես գնահատականներ, այնպես էլ ճշգրիտ արժեքներ:

## Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը

Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները և նրանում ստացված արդյունքներն ունեն ոչ միայն տեսական նշանակություն գրաֆների քրոմատիկ հատկությունների հետազոտման համար, այլև կարող են ունենալ գործնական կիրառություններ: Մասնավորապես, գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարները և գումարային կողային ներկումները կիրառվում են գերմեծ ինտեգրալ սխեմաների նախագծման, ռեսուրսների բաշխման և կարգացուցակների տեսության այնպիսի խնդիրներում, որոնցում աշխատանքների կատարման միջին տևողությունը մինիմիզացվում է:

## Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները

Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները.

1) Ընդհանուր ստորին գնահատականներ գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարների համար, և ստացված գնահատականների համեմատություն,

2) Ընդհանուր վերին գնահատականներ գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարների համար, և ստացված գնահատականների համեմատություն,

3) Գրաֆների տարբեր արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարների հասանելի վերին գնահատականներ, իսկ որոշ դեպքերում՝ ճշգրիտ արժեքներ,

4) Գրաֆների տարբեր դասերի համար կողային քրոմատիկ գումարների հասանելի վերին գնահատականներ,

5) Գրաֆների որոշ դասերի համար կողային քրոմատիկ գումարի և կողային ամրության ճշգրիտ արժեքներ:

## Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փորձարկումը

Ստացված արդյունքները պարբերաբար ներկայացվել և քննարկվել են ԵՊՀ-ում և ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում անցկացվող գիտական սեմինարների ժամանակ, ինչպես նաև զեկուցվել են մի շարք գիտաժողովներում Հայաստանում և արտերկրում.

1. 14th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 25-30, 2023,

2. ԵՊՀ «Հաշվետու գիտաժողով-2024», Երևան, Հայաստան, Ապրիլի 10-15, 2024,

3. Международная Восемнадцатая Годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 2-6 декабря, 2024,

4. Համակարգչային գիտության և կիրառական մաթեմատիկայի արդի խնդիրներ «ՀԳԿՄԱԽ 2025», ԵՊՀ, Երևան, Ապրիլի 28-30, 2025,

5. Международная Девятнадцатая Годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 1-5 декабря, 2025,

6. Тридцать Третья Международная Конференция Математика. Компьютер. Образование, Дубна, Россия, 26–31 января, 2026.

## Հրապարակումները

Հետազոտության թեմայի վերաբերյալ տպագրվել են 10 գիտական աշխատանքներ:

## Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը

Աշխատանքի ծավալը կազմում է 110 էջ: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից: Աշխատանքը ներառում է 18 նկար և 1 աղյուսակ:

## Աշխատանքի պարունակությունը

Այս աշխատանքում դիտարկվող բոլոր գրաֆները վերջավոր են, կողմնորոշված չեն և չունեն պատիկ կողեր և օղակներ: $G$ գրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունները նշանակենք, համապատասխանաբար, $V(G)$-ով և $E(G)$-ով: $G=(V,E)$ գրաֆը կոչվում է $(n,m)$-գրաֆ, եթե $|V|=n$ և $|E|=m$: Ցանկացած $v\in V(G)$ գագաթի աստիճանը $G$ գրաֆում կնշանակենք $d_G(v)$-ով: $\Delta(G)$-ով և $\delta(G)$-ով կնշանակենք գագաթների աստիճաններից առավելագույնը և նվազագույնը համապատասխանաբար: Եթե $G$ գրաֆի համար $\Delta(G)=\delta(G)$, ապա $G$-ն կկոչենք համասեռ կամ $\Delta(G)$-համասեռ: $n$ բնական թվի դեպքում $n$-գագաթանի պարզ ճանապարհը կնշանակենք $P_n$-ով, $n$-գագաթանի պարզ ցիկլը $C_n$-ով (երբ $n\geq 3$), $n$-գագաթանի կողեր չպարունակող գրաֆը $\overline{K_n}$-ով, իսկ $n$-գագաթանի լրիվ գրաֆը $K_n$-ով:

$G$ գրաֆը կոչվում է $r$-կողմանի $(r\geq 2)$, եթե գրաֆի գագաթների բազմությունը կարելի է տրոհել $r$ հատ անկախ բազմությունների: $G$ գրաֆը կոչվում է լրիվ $r$-կողմանի $(r\geq 2)$ գրաֆ, եթե գրաֆի գագաթները կարող են բաժանվել $r$ անկախ բազմությունների $V_1,\ldots,V_r$ այնպես, որ կամայական գագաթ $V_i$-ից հարևան է բոլոր գագաթներին $V_j$-ից, որտեղ $1\leq i<j\leq r$: Լրիվ $r$-կողմանի գրաֆը $V_1,\ldots,V_r$ անկախ բազմություններով կոչվում է լրիվ $r$-կողմանի հավասարակշռված գրաֆ, եթե $|V_1|=|V_2|=\ldots=|V_r|$: Լրիվ $r$-կողմանի գրաֆը $V_1,\ldots,V_r$ անկախ բազմություններով, որտեղ $n_i=|V_i|, i=1,2,\ldots,r$ համապատասխանաբար, կնշանակենք $K_{n_1,\ldots,n_r}$-ով:

Գրաֆը կոչվում է *հարթ*, եթե այն հնարավոր է պատկերել հարթության վրա այնպես, որ գրաֆի կողերը հատվեն միայն գագաթներում: Հարթության վրա պատկերված հարթ գրաֆը հարթությունը տրոհում է տիրույթների, որոնք կոչվում են *նիստեր*: Հարթ գրաֆը կոչվում է *արտաքին հարթ*, եթե այն հնարավոր է հարթության վրա պատկերել այնպես, որ նրա բոլոր գագաթները պատկանեն արտաքին (անվերջ) նիստին:

Դիցուք $B_n=\{b_1b_2\ldots b_n|b_i\in\{0,1\},i=1,2,\ldots,n\}$: Նշանակենք $\mathcal{F}_n=\{b_1b_2\ldots b_n\in B_n|\ b_ib_{i+1}=0,i=1,2,\ldots,n-1\}$: $\Gamma_n$ գրաֆը, որտեղ $V(\Gamma_n)=\mathcal{F}_n$, իսկ $E(\Gamma_n)=\{(b_1b_2\ldots b_n)(b_1'b_2'\ldots b_n')|\ b_1b_2\ldots b_n\in V(\Gamma_n),b_1'b_2'\ldots b_n'\in V(\Gamma_n),\sum\limits_{i=1}^{n}|b_i-b_i'|=1\}$ կոչվում է $n$-չափանի Ֆիբոնաչիի խորանարդ:

Կամայական $n$ և $m$ բնական թվերի համար, որտեղ $2m+1\leq n$, $C_n^m$ պարզ ցիկլի աստիճանը գրաֆ է, որում $V(C_n^m)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, $E(C_n^m)=\{v_iv_j|\,1\leq i<j\leq n,(j-i\leq m$ կամ $j-i\geq n-m)\}$:

Դիցուք $G$-ն և $H$-ը կամայական գրաֆներ են: $G$ և $H$ գրաֆների $G\times H$ թենզորական արտադրյալը սահմանվում է որպես գրաֆ, որտեղ $V(G\times H)=V(G)\times V(H),E(G\times H)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)|(u_1u_2\in E(G)$ և $v_1v_2\in E(H)\}$: $G$ և $H$ գրաֆների ուժեղ թենզորական $G\otimes H$ արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ. $V(G\otimes H)=V(G)\times V(H),E(G\otimes H)=E(G\times H)\cup\{(u_1,v)(u_2,v)|\ u_1u_2\in E(G)$ և $v\in V(H)\}$: $G$ և $H$ գրաֆների $G\boxtimes H$ ուժեղ արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ. $V(G\boxtimes H)=V(G)\times V(H),E(G\boxtimes H)=$

$E(G\otimes H)\cup\{(u,v_1)(u,v_2)|\ u\in V(G)$ և $v_1v_2\in E(H)\}$: $G$ և $H$ գրաֆների $G\square H$ դեկարտյան արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ. $V(G\square H)=V(G)\times V(H), E(G\square H)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)|(u_1=u_2$ և $v_1v_2\in E(H))$ կամ $(v_1=v_2$ և $u_1u_2\in E(G)\}$: Կամայական $n$ և $m$ բնական թվերի դեպքում $P_n\square P_m$ գրաֆը կոչվում է ցանց: Եթե $m\geq 3$, ապա $P_n\square C_m$ գրաֆը կոչվում է գլան, իսկ $m\geq 3$ և $n\geq 3$ թվերի դեպքում $C_n\square C_m$ գրաֆը կոչվում է տոր: $G$ և $H$ գրաֆների $G[H]$ կոմպոզիցիան սահմանվում է հետևյալ կերպ. $V(G[H])=V(G)\times V(H), E(G[H])=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)|\ u_1u_2\in E(G)$ կամ $(v_1v_2\in E(H)$ և $u_1=u_2\in V(G))\}$: Կամայական $n\geq 3$ և $m\geq 1$ բնական թվերի համար $C_n(m)=C_n[\overline{K_m}]$ գրաֆը կանվանենք ընդհանրացված ցիկլ: Դիցուք $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ և $V(H)=\{u_1,u_2,\ldots,u_p\}$: $G$ և $H$ գրաֆների $G\odot H$ կորոնա արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ. $V(G\odot H)=V(G)\cup\{u_j^i|1\leq i\leq n,1\leq j\leq p\}, E(G\odot H)=E(G)\cup\left\{u_j^iu_l^i|u_ju_l\in E(H),1\leq i\leq n\right\}\cup\{v_iu_j^i|1\leq i\leq n,1\leq j\leq p\}$: $K_1\odot C_n$ գրաֆը ($n\geq 3$) կանվանենք անիվ և կնշանակենք $W_{n+1}$-ով:

$G$ գրաֆի *ճիշտ կողային ներկում* ասելով կհասկանանք այն $\alpha:E(G)\to\mathbb{N}$ արտապատկերումը, որտեղ $\alpha(e)\neq\alpha(e')$ կամայական $e,e'\in E(G)$ հարևան կողերի համար: $\alpha(e)$ թիվը կոչվում է $e$ կողի գույն: Տրված $G$ գրաֆի $\alpha$ ճիշտ կողային ներկման դեպքում $v$ գագաթի սպեկտր կանվանենք $S_G(v,\alpha)=\{\alpha(vu)\mid vu\in E(G)\}$ բազմությունը: Տրված $G$ գրաֆի ճիշտ կողային ներկումներում անհրաժեշտ գույների նվազագույն քանակը կոչվում է *քրոմատիկ ինդեքս* և նշանակվում է $\chi'(G)$-ով: Ըստ Վիզինգի հայտնի թեորեմի [27,28]՝

$$\Delta(G)\leq\chi'(G)\leq\Delta(G)+1:$$

Հայտնի է, որ $\chi'(G)$-ի որոշման խնդիրը NP-լրիվ է [29]: Գրաֆները, որոնց համար $\chi'(G)=\Delta(G)$, կոչվում են առաջին դասի գրաֆներ, իսկ նրանք, որոնց համար $\chi'(G)=\Delta(G)+1$՝ երկրորդ դասի:

Եթե գրաֆի որևէ ճիշտ կողային ներկման դեպքում յուրաքանչյուր $v$ գագաթի սպեկտրը $\{1,2,\ldots,d_G(v)\}$ բազմությունն է, ապա այդ ներկումն անվանում են հաջորդական:

Կատարենք հետևյալ նշանակումը՝ $\sum'(G,\alpha)=\sum\limits_{e\in E(G)}\alpha(e)$: Այս դեպքում $G$ գրաֆի կողային քրոմատիկ գումար կանվանենք $\sum'(G)=\min\limits_{\alpha}\sum'(G,\alpha)$ թիվը, որտեղ $\alpha$-ն փոփոխվում է $G$ գրաֆի բոլոր հնարավոր ճիշտ կողային ներկումներով: Եթե $\alpha$-ն $G$ գրաֆի ճիշտ կողային ներկում է և $\sum'(G)=\sum'(G,\alpha)$, ապա $\alpha$-ն կոչվում է $G$ գրաֆի գումարային կողային ներկում: Գումարային կողային ներկում կառուցելու համար անհրաժեշտ գույների նվազագույն քանակը նշանակվում է $s'(G)$-ով և կոչվում է գրաֆի կողային ամրություն [30]:

Աշխատանքի առաջին գլուխը նվիրված է գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարների ընդհանուր գնահատականներին, ինչպես նաև գումարային կողային ներկումների կառուցման և կողային քրոմատիկ գումարների գնահատման խնդիրներին ընդհանուր գրաֆների, երկկողմանի գրաֆների, արտաքին հարթ գրաֆների, պարզ ցիկլերի աստիճանների և Ֆիբոնաչիի խորանարդների համար:

[27] В.Г. Визинг, Об оценке хроматического класса p-графа, Дискретный анализ 3, 1964, стр. 25–30.

[28] В.Г. Визинг, Хроматический класс мультиграфов, Кибернетика 3, 1965, стр. 29-39.

[29] I. Holyer, The NP-completeness of edge coloring, SIAM Journal of Computing 10, 1981, pp. 718-720.

[30] Չսահմանված հասկացությունների և նշանակումների համար տես D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

Առաջին գլխի 1.1 պարագրաֆը նվիրված է $\sum'(G)$ պարամետրի ընդհանուր ստորին գնահատականներին կամայական $G$ գրաֆի համար՝ արտահայտված գրաֆի կողերի քանակով, առավելագույն զուգակցման հզորությամբ և աստիճանային հավաքածուով:

1.1 պարագրաֆում ապացուցվում են Լեմմա 1.1.1-ը և 1.1.4-ը, որոնց հիման վրա տրվում են վերին գնահատականներ՝ արտահայտված գրաֆի կողերի քանակով, քրոմատիկ ինդեքսով և աստիճանային հավաքածուով.

**Թեորեմ 1.1.6.** *Կամայական $G$ գրաֆի համար*

$$\sum{}'(G) \geq \left\lceil \frac{1}{4}\sum_{v\in V(G)} d_G(v)^2 + \frac{1}{2}|E(G)| \right\rceil,$$

$$\sum{}'(G) \geq k\left(|E(G)| - \frac{\alpha'(G)(k-1)}{2}\right) + \frac{(s'(G)-k)(s'(G)-k+1)}{2}\ (0 \leq k \leq s'(G)+1):$$

Նշենք, որ երկու գնահատականներն էլ որոշ դեպքերում հասանելի են: Օրինակ, առաջին գնահատականը տալիս է կողային քրոմատիկ գումարի ճշգրիտ արժեքը առաջին դասի համասեռ գրաֆների համար: Լրիվ երկկողմանի գրաֆների համար էլ երկրորդ գնահատականն է հանդիսանում ճշգրիտ արժեք:

1.1 պարագրաֆում նաև կատարվել է համեմատական վերլուծություն ստացված ստորին գնահատականների և հայտնի Թոմասսենի, Էրդոշի, Ալավեի, Մալդեի, Շվենքի [31], ինչպես նաև Կոկոսինսկու և Կվարցիանիի [32] կողմից ապացուցված գագաթային քրոմատիկ գումարի ստորին գնահատականների հետ:

Աշխատանքի 1.2 պարագրաֆում ապացուցվել են Լեմմա 1.2.1-ը և 1.2.2-ը, որոնց հիման վրա ձևակերպվում է հետևյալ թեորեմը.

**Թեորեմ 1.2.4.** *Կամայական $G$ գրաֆի համար*

$$\sum{}'(G) \leq \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d_G(v)^2,$$

$$\sum{}'(G) \leq \frac{1}{2}|E(G)|(\chi'(G)+1):$$

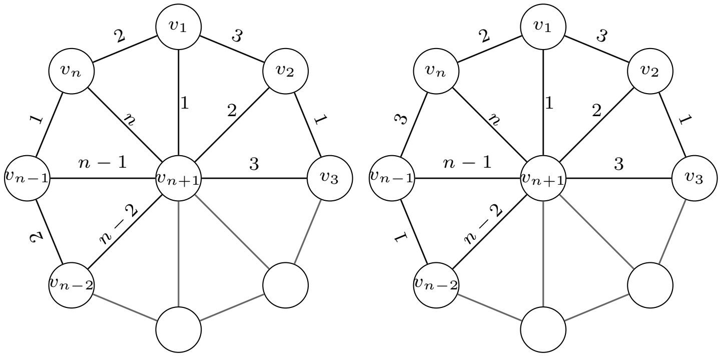
Ինչպես նախորդ դեպքում, այս դեպքում նույնպես երկու գնահատականներն էլ որոշ դեպքերում հասանելի են: Օրինակ, առաջին գնահատականը տալիս է կողային քրոմատիկ գումարի ճշգրիտ աստղ գրաֆների դեպքում, իսկ առաջին դասի համասեռ գրաֆների համար էլ երկրորդ գնահատականն է հանդիսանում ճշգրիտ արժեք:

Պետք է նշել, որ առաջին գնահատականը որոշ դեպերում առավել արդյունավետ է, քան երկրորդը: Օրինակ, անիվ գրաֆների համար (Նկ. 1.1) առաջինի դեպքում ստանում ենք $\dfrac{n^2+9n}{2}$, իսկ երկրորդի դեպքում՝ $n(\chi'(W_{n+1})+1) \geq n(n+1)$: Պարզ է, որ բավականաչափ մեծ $n$-երի դեպքում առաջին գնահատականն ավելի արդյունավետ է:

1.2 պարագրաֆում ստացվել է նաև հասանելի վերին գնահատական երկկողմանի գրաֆների համար: Մասնավորապես, ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը.

[31] C. Thomassen, P. Erdös, Y. Alavi, P. J. Malde, A. J. Schwenk. Tight bounds on the chromatic sum of a connected graph. Journal of Graph Theory 13(3), 1989, pp. 353–357.

[32] Z. Kokosiński, K. Kwarciany. On Sum Coloring of Graphs with Parallel Genetic Algo- rithms. Adaptive and Natural Computing Algorithms. Ed. by B. Beliczynski, A. Dzielinski, M. Iwanowski, B. Ribeiro. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, pp. 211–219.




Նկ. 1.1: Անիվների գումարային կողային ներկումներ:

**Թեորեմ 1.2.5.** *Կամայական երկկողմանի գրաֆի համար*

$$\sum{}'(G) \leq \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d_G(v)^2 - |E(G)| + |V(G)| - 1:$$

1.3 պարագրաֆում հետազոտվել են արտաքին հարթ գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարները և ստացվել են վերին գնահատականներ ինչպես ընդհանուր արտաքին հարթ գրաֆների, այնպես էլ երկկողմանի երկկապակցված արտաքին հարթ գրաֆների համար.

**Թեորեմ 1.3.4.** *Կամայական արտաքին հարթ $G$ գրաֆի համար, ունենք՝*

$$\sum{}'(G) \leq \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d_G(v)^2 - |E(G)| + |V(G)|:$$

**Թեորեմ 1.3.2.** *Կամայական երկկողմանի երկկապակցված արտաքին հարթ $G$ գրաֆի համար*

$$\sum{}'(G) \leq \frac{\sum\limits_{v\in V(G)} d_G(v)^2 + 3|V(G)| - 4|E(G)|}{2}:$$

1.4 պարագրաֆում հետազոտվել են Ֆիբոնաչիի խորանարդների կողային քրոմատիկ գումարները, մասնավորապես, ստացվել է այդ պարամետրի վերին հասանելի գնահատական.

**Թեորեմ 1.4.1.** *Կամայական $n$ բնական թվի համար*

$$\sum{}'(\Gamma_n) \leq \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{100}n^2 + \frac{11+9\sqrt{5}}{100}n + \frac{6\sqrt{5}}{125}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n +$$

$$+\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{100}n^2 + \frac{11-9\sqrt{5}}{100}n - \frac{6\sqrt{5}}{125}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n:$$

Առաջին գլխի վերջին պարագրաֆում հետազոտվել են պարզ ցիկլերի աստիճանների կողային քրոմատիկ գումարները և գումարային կողային ներկումները, ստացվել են այդ գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարների և կողային ամրությունների ճշգրիտ արժեքները.

**Թեորեմ 1.5.2.** *Կամայական $n \geq 3, m \geq 1, 2m+1 \leq n$ թվերի համար՝*

$$\sum{}'(C_n^m) = \begin{cases} \dfrac{nm(2m+1)}{2}, & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է,} \\ \dfrac{m(n+1)(2m+1)}{2}, & \text{հակառակ դեպքում,} \end{cases}$$

*և*

$$s'(C_n^m) = \begin{cases} 2m, & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է,} \\ 2m+1, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է գրաֆների տարբեր արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարների գնահատման և գումարային կողային ներկումների կառուցման խնդիրներին: Մասնավորապես, հետազոտվել են թենզորական, ուժեղ թենզորական, ուժեղ, դեկարտյան, կորոնա արտադրյալների, ինչպես նաև գրաֆների կոմպոզիցիայի կողային քրոմատիկ գումարների՝ բաղադրիչների պարամետրերի միջոցով գնահատման հարցեր:

2-րդ գլխի առաջին պարագրաֆում հետազոտվել են գրաֆների թենզորական և ուժեղ թենզորական արտադրյալները և ստացվել են կողային քրոմատիկ գումարների հետևյալ հասանելի գնահատականները.

**Թեորեմ 2.1.1.** *Կամայական $G$ $(n,m)$-գրաֆի և $p$-գագաթանի $r$-համասեռ $H$ գրաֆի համար $(r \in \mathbb{N})$՝*

$$\sum{}'(G \times H) \leq rp\left(\sum{}'(G)r - \frac{(r-1)m}{2}\right):$$

**Թեորեմ 2.1.5.** *Կամայական $G$ $(n,m)$-գրաֆի համար և կամայական $p$-գագաթանի $r$-համասեռ $H$ գրաֆի համար $(r \in \mathbb{N})$՝*

$$\sum{}'(G \otimes H) \leq (r+1)p\left(\sum{}'(G)(r+1) - \frac{rm}{2}\right):$$

2.2 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են գրաֆների ուժեղ արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարները և տրվել է հետևյալ հասանելի վերին գնահատականը.

**Թեորեմ 2.2.1.** *Կամայական $G$ $(n,m)$-գրաֆի և $p$-գագաթանի $r$-համասեռ $H$ գրաֆի համար $(r \in \mathbb{N})$՝*

$$\sum{}'(G \boxtimes H) \leq (r+1)p\left(\sum{}'(G)(r+1) - \frac{rm}{2}\right) + \frac{nrps'(G \otimes H)}{2} + n\sum{}'(H):$$

2.3 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարները և կողային ամրությունները, և տրվել են վերին գնահատականներ ինչպես ընդհանուր գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների, այնպես էլ համասեռ գրաֆներով որոշ դեկարտյան արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարների համար: Վերջիններիս համար ստացվել են կողային քրոմատիկ գումարների և կողային ամրությունների ճշգրիտ արժեքները:

**Թեորեմ 2.3.1.** *Կամայական $G$ $(n,m)$-գրաֆի և $H$ $(p,q)$-գրաֆի համար, ունենք՝*

$$\sum{}'(G\Box H) \leq p\sum{}'(G) + n\sum{}'(H) + \min\{nqs'(G), pms'(H)\}:$$

**Թեորեմ 2.3.3.** **(1)** *Կամայական $G$ $r$-համասեռ գրաֆի և $n$ $(n,r\in\mathbb{N})$ թվի համար $G\Box P_{2n}$ գրաֆի կողային քրոմատիկ գումարը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.*

$$\sum{}'(G\Box P_{2n}) = \frac{1}{2}|V(G)|(r+2)(nr+3n-2),$$

*իսկ $G\Box P_{2n}$-ի կողային ամրությունը՝ հետևյալ բանաձևով.*

$$s'(G\Box P_{2n}) = \begin{cases} r+1,\ n=1, \\ r+2,\ n>1: \end{cases}$$

**(2)** *Կամայական $G$ $r$-համասեռ գրաֆի և $n>1$ $(n,r\in\mathbb{N})$ թվի համար $G\Box C_{2n}$ գրաֆի կողային քրոմատիկ գումարը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.*

$$\sum{}'(G\Box C_{2n}) = \frac{1}{2}|V(G)|n(r+2)(r+3),$$

*իսկ $G\Box C_{2n}$-ի կողային ամրությունը՝ հետևյալ բանաձևով.*

$$s'(G\Box C_{2n}) = r+2:$$

2.3 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են նաև ցանցային տիպի գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարներն ու գումարային կողային ներկումները, ինչպես նաև կողային ամրությունները: Ստացվել են այդ տիպի գրաֆների գումարային կողային ներկումների թվային պարամետրերի ճշգրիտ արժեքները.

**Թեորեմ 2.3.5.** *Կամայական $m,n\geq 2$ $(n,m\in\mathbb{N})$ թվերի համար՝*

$$\sum{}'(P_n\Box P_m) = \begin{cases} 5nm-4n-4m+2, & \text{եթե } n\text{-ը կամ } m \text{ ը զույգ է}, \\ 5nm-4n-4m+4, & \text{հակառակ դեպքում}, \end{cases}$$

*իսկ $s'(P_n\Box P_m) = \Delta(P_n\Box P_m)$:*

**Թեորեմ 2.3.6.** *Կամայական $n\geq 3, m\geq 2$ $(n,m\in\mathbb{N})$ թվերի համար*

$$\sum{}'(C_n\Box P_m) = \begin{cases} 5nm-4n, & \text{եթե } n\text{-ը կամ } m\text{-ը զույգ է}, \\ 5nm-4n+3, & \text{հակառակ դեպքում}, \end{cases}$$

*իսկ $s'(C_n\Box P_m) = \Delta(C_n\Box P_m)$:*

**Թեորեմ 2.3.8.** *Կամայական $n,m\geq 3$ $(n,m\in\mathbb{N})$ թվերի համար*

$$\sum{}'(C_n\Box C_m) = \begin{cases} 5nm, & \text{եթե } n\text{-ը կամ } m\text{-ը զույգ է}, \\ 5nm+5, & \text{հակառակ դեպքում}, \end{cases}$$

*իսկ*

$$s'(C_n\Box C_m) = \begin{cases} 4, & \text{եթե } n\text{-ը կամ } m\text{-ը զույգ է}, \\ 5, & \text{հակառակ դեպքում}: \end{cases}$$

2.4 պարագրաֆում դիտարկվել են գրաֆների կոմպոզիցիաների կողային քրոմատիկ գումարները, կողային ամրությունները և գումարային կողային ներկումները: Ապացուցվել են վերին հասանելի գնահատականներ $G$ և $H$ գրաֆների $G[H]$ կոմպոզիցիայի կողային քրոմատիկ գումարների համար, երբ $H$-ը կողեր չպարունակող գրաֆ է կամ համասեռ գրաֆ:

**Թեորեմ 2.4.1.** *Կամայական $G$ գրաֆի և կամայական $n \in \mathbb{N}$ թվի համար՝*

$$\sum{}'\left(G[\overline{K_n}]\right) \leq n^3 \sum{}'(G) - \frac{n^2(n-1)|E(G)|}{2}:$$

*Ավելին, այս վերին գնահատականը հասանելի է:*

**Թեորեմ 2.4.2.** *Կամայական $G$ $(n,m)$-գրաֆի և $p$-գագաթանի $r$-համասեռ $H$ գրաֆի համար*

$$\sum{}'(G[H]) \leq n\sum{}'(H) + \frac{nrp^2 s'(G)}{2} + p^3\sum{}'(G) - \frac{p^2(p-1)m}{2}:$$

*Ավելին, այս վերին գնահատականը հասանելի է:*

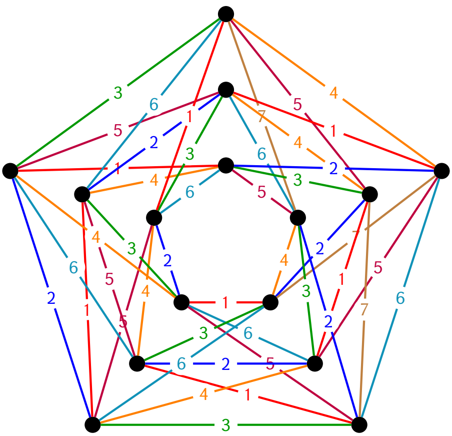
Նշենք նաև, որ 2.4 պարագրաֆում տրվել են կողային քրոմատիկ գումարի և կողային ամրության ճշգրիտ արժեքները ընդհանրացված ցիկլերի համար (Նկ. 2.1).

**Թեորեմ 2.4.4.** *Կամայական $n \geq 3,\ m \geq 1$ թվերի համար, ունենք.*

$$\sum{}'(C_n(m)) = \begin{cases} \dfrac{nm^2(2m+1)}{2}, & \text{երբ } nm\text{-ը զույգ է,} \\ \dfrac{m(nm+1)(2m+1)}{2}, & \text{հակառակ դեպքում,} \end{cases}$$

*և*

$$s'(C_n(m)) = \begin{cases} 2m, & \text{երբ } nm\text{-ը զույգ է,} \\ 2m+1, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$



Նկ. 2.1: $C_5(3)$ ընդհանրացված ցիկլի գումարային կողային ներկում

2-րդ գլխի վերջին պարագրաֆում հետազոտվում են կորոնա արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարները, կողային ամրությունները և գումարային կողային ներկումները: Մասնավորապես, տրվել է ընդհանուր վերին գնահատական կորոնա արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարների համար.

**Թեորեմ 2.5.2.** *Կամայական $G$ $(n,m)$-գրաֆի և $H$ $(p,q)$-գրաֆի համար՝*

$$\sum{}'(G\odot H)\leq \sum{}'(G)+n\sum{}'(H)+\frac{np(p+1)}{2}+\min\{npt,pm+npq\},$$

*որտեղ* $t=\max\{s'(G),s'(H)\}$*:*

Նույն պարագրաֆում տրվել են գրաֆների կորոնա արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարների և կողային ամրությունների ճշգրիտ արժեքները, որտեղ արտադրյալի առաջին բաղադրիչը երկկողմանի գրաֆ է, իսկ երկրորդը՝ կողեր չպարունակող կամ կենտ գագաթանի համասեռ գրաֆ:

**Թեորեմ 2.5.3.** *Կամայական $G$ երկկողմանի $(n,m)$-գրաֆի և կամայական բնական $p$ թվի համար*

$$\sum{}'(G\odot \overline{K_p})=\sum{}'(G)+\frac{np(p+1)}{2}+pm,$$

*իսկ* $s'(G\odot \overline{K_p})=s'(G)+p$*:*

**Թեորեմ 2.5.5.** *Կամայական $G$ $(n,m)$-գրաֆի և կենտ $p$ կարգի $H$ համասեռ գրաֆի համար*

$$\sum{}'(G\odot H)\leq \sum{}'(G)+n\sum{}'(H)+\frac{np(p+1)}{2}+pm:$$

*Ավելին, գնահատականը հասանելի է, երբ $G$-ն երկկողմանի է:*

Աշխատանքի երրորդ գլուխը նվիրված է լրիվ բազմակողմանի գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարներին, կողային ամրություններին և գումարային կողային ներկումներին: Մասնավորապես, ուսումնասիրվել են հավասարակշռված և ոչ հավասարակշռված լրիվ երեքկողմանի գրաֆների, ինչպես նաև որոշ լրիվ բազմակողմանի (այդ թվում լրիվ տրոհվող) գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարներն ու կողային ամրությունները:

3-րդ գլխի առաջին պարագրաֆում ուսումնասիրվել են որոշ լրիվ բազմակողմանի գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարները, կողային ամրությունները և գումարային կողային ներկումները, այդ թվում այն $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ լրիվ բազմակողմանի գրաֆների համար, որտեղ $n_i\geq \sum\limits_{j=i+1}^{m} n_j$ $(1\leq i<m)$, ինչպես նաև որոշ լրիվ տրոհվող գրաֆների համար: Առաջին դեպքում ստացվել են այդ գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարների և կողային ամրությունների ճշգրիտ արժեքները, իսկ լրիվ տրոհվող գրաֆների համար ստացվել է կողային քրոմատիկ գումարների վերին գնահատական.

**Թեորեմ 3.1.1.** *Կամայական $n_1,n_2,\ldots,n_m\in\mathbb{N}$ $(m\geq 2)$ թվերի համար, որոնք բավարարում են $n_i\geq \sum\limits_{j=i+1}^{m} n_j$ $(1\leq i<m)$ պայմաններին, փեղի ունի հետևյալը.*

$$\sum{}'(K_{n_1,n_2,\ldots,n_m})=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m}\left(n_i\sum_{j=1}^{i-1}n_j\left(\sum_{k=1}^{i-1}n_k+1\right)\right)$$

*և*

$$s'(K_{n_1,n_2,\dots,n_m}) = \sum_{i=1}^{m-1} n_i:$$

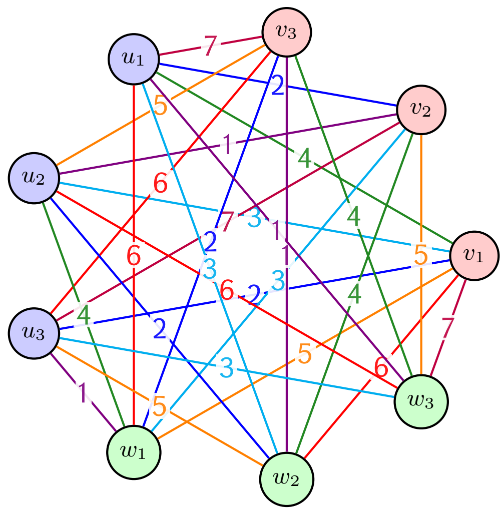
**Թեորեմ 3.1.2.** *Կամայական $G = K_{1,1,\dots,1,n}$ լրիվ $(m+1)$-կողմանի գրաֆի համար, որտեղ $n \le m$, $n$-ը և $m$-ը զույգ թվեր են,*

$$\sum{}'(G) \le \frac{3m^3+9m^2n+3mn^2+n^3-3m^2-4n}{12}:$$

3.2 պարագրաֆում դիտարկվել են հավասարակշռված լրիվ երեքկողմանի գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարները և գումարային կողային ներկումները, ստացվել է կողային քրոմատիկ գումարի ճշգրիտ արժեքը, ինչպես նաև գումարային կողային ներկում կառուցող բազմանդամային ալգորիթմ:

**Թեորեմ 3.2.1.** *Կամայական $n \in \mathbb{N}$ թվի համար՝*

$$\sum{}'(K_{n,n,n}) = \begin{cases} \dfrac{3n^2(2n+1)}{2}, \text{ երբ } n\text{-ը զույգ է}, \\ \dfrac{n(2n+1)(3n+1)}{2}, \text{ երբ } n\text{-ը կենտ է}: \end{cases}$$




Նկ. 3.1: Լրիվ երեքկողմանի $K_{3,3,3}$ գրաֆը՝ իր գումարային կողային ներկումով:

3-րդ գլխի վերջին պարագրաֆում դիտարկվել են ոչ հավասարակշռված լրիվ երեքկողմանի գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարները, որոշ ենթադասի համար ստացվել է կողային քրոմատիկ գումարների հասանելի վերին գնահատական:

**Թեորեմ 3.3.1.** *Կամայական $n, m, l \in \mathbb{N}$ թվերի համար, որտեղ $2n \ge m \ge l$, $m > n > 1$ և եթե $m$-ը բաժանվում է երեքի, ապա նաև $1.5n \ge m$, ունենք՝*

$$\sum{}'(K_{2n,m,l}) \le \frac{l(2n+m)(2n+m+1)}{2} + mn(2m+1):$$

## Հիմնական արդյունքներն ու հետևությունները

Այս աշխատանքում դիտարկվել են ընդհանուր գրաֆների, ինչպես նաև գրաֆների տարբեր դասերի կողային քրոմատիկ գումարների գնահատման խնդիրներ, կողային քրոմատիկ գումարների և կողային ամրությունների գտնելու և գումարային կողային ներկումների կառուցման խնդիրներ, ինչպես նաև գրաֆների տարբեր արտադրյալների կողային քրոմատիկ գումարների՝ բաղադրիչների պարամետրերի միջոցով գնահատման խնդիրներ:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1) Գրաֆների կողային քրոմատիկ գումարների ընդհանուր վերին և ստորին հասանելի գնահատականներ,

2) Արտաքին հարթ գրաֆների և նաև նրանց հատուկ ենթադասերի, երկկողմանի գրաֆների և Ֆիբոնաչիի խորանարդների կողային քրոմատիկ գումարների վերին հասանելի գնահատականներ,

3) Տարբեր համասեռ գրաֆների, այդ թվում պարզ ցիկլերի աստիճանների և ընդհանրացված ցիկլերի կողային քրոմատիկ գումարների և կողային ամրությունների ճշգրիտ արժեքները, և տրվել են համապատասխան գումարային կողային ներկումների կառուցման բազմանդամային ալգորիթմներ,

4) Գրաֆների թենզորական, ուժեղ թենզորական, ուժեղ, դեկարտյան, կորոնա արտադրյալների, ինչպես նաև գրաֆների կոմպոզիցիաների կողային քրոմատիկ գումարների հասանելի վերին գնահատականներ, մասնավորապես կամայական $G$ $(n,m)$-գրաֆի և $p$-գագաթանի $r$-համասեռ $H$ գրաֆի համար $(r \in \mathbb{N})$ ստացվել են հետևյալ հասանելի վերին գնահատականները.

$$\sum{}'(G \times H) \leq rp\left(\sum{}'(G)r - \frac{(r-1)m}{2}\right),$$

$$\sum{}'(G \otimes H) \leq (r+1)p\left(\sum{}'(G)(r+1) - \frac{rm}{2}\right),$$

$$\sum{}'(G \boxtimes H) \leq (r+1)p\left(\sum{}'(G)(r+1) - \frac{rm}{2}\right) + \frac{nrps'(G \otimes H)}{2} + n\sum{}'(H),$$

$$\sum{}'(G[H]) \leq n\sum{}'(H) + \frac{nrp^2 s'(G)}{2} + p^3\sum{}'(G) - \frac{p^2(p-1)m}{2},$$

5) Գրաֆների արտադրյալ հանդիսացող տարբեր գրաֆների, այդ թվում ցանցերի, գլանների և տորերի կողային քրոմատիկ գումարների և կողային ամրությունների ճշգրիտ արժեքները, ինչպես նաև տրվել են համապատասխան գումարային կողային ներկումների կառուցման բազմանդամային ալգորիթմներ,

6) Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների տարբեր ենթադասերի ինչպես կողային քրոմատիկ գումարների հասանելի վերին գնահատականներ, այնպես էլ կողային քրոմատիկ գումարի և կողային ամրության ճշգրիտ արժեքներ: Մասնավորապես, լրիվ բազմակողմանի $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ գրաֆների համար, որտեղ $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 2)$ և $n_i \geq \sum\limits_{j=i+1}^{m} n_j$ $(1 \leq i < m)$, ստացվել են կողային քրոմատիկ գումարի և կողային ամրության ճշգրիտ արժեքները. $\sum{}'(K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=2}^{m}\left(n_i\sum\limits_{j=1}^{i-1} n_j\left(\sum\limits_{k=1}^{i-1} n_k + 1\right)\right)$

և $s'(K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}) = \sum_{i=1}^{m-1} n_i$: Ավելին, տրվել են գումարային կողային ներկումների կառուցման բազմանդամային ալգորիթմներ:

## Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրապարակված աշխատանքների ցանկ


1. H. Mikaelyan, P. Petrosyan, An Upper Bound on the Edge-Chromatic Sum of Fibonacci Cubes, Proceedings of CSIT Conference 2023, 2023, pp. 137-138,

2. H. Mikaelyan, P. Petrosyan, Edge-Chromatic Sums of Tensor and Strong Tensor Products of Graphs, Abstracts of the conference ”Current Issues in Computer Science and Applied Mathematics 2025”, YSU, Yerevan, 2025, pp. 45-47,

3. A. Drambyan, H. Mikaelyan, On semistrong edge-coloring of outerplanar graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 59 (2), 2025, pp. 32-45,

4. H. Mikaelyan, P. Petrosyan, On sum edge-colorings of graph products, Ars Combinatoria 165, 2025, pp. 141-162,

5. H. Mikaelyan, On Sum Edge-Colorings of Complete Tripartite Graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 59 (3), 2025, pp. 69-83,

6. H. Mikaelyan, P. Petrosyan, On sum edge-colorings of some products of graphs, Девятнадцатая Международная Годичная научная конференция (Сборник научных статей: физико-математические и естественные науки), 2025, pp. 18-21,

7. H. Mikaelyan, P. Petrosyan, Sum Edge-colorings of Some Complete Tripartite and Some Regular Graphs, Тридцать вторая международная конференция, МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕР. ОБРАЗОВАНИЕ, Тезисы, Дубна, 2026, 1 стр.,

8. H. Mikaelyan, On Sum Edge-Colorings of Some Regular Graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 60 (1), 2026, pp. 14-22,

9. H. Mikaelyan, General Bounds On Edge-Chromatic Sums of Graphs, Vestnik of Russian-Armenian (Slavonic) University (series: Physical-mathematical and natural sciences), 1, 2026, pp. 19-27,

10. H. Mikaelyan, P. Petrosyan, On Edge-Chromatic Sums of Corona Products of Graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 60 (2), 2026, pp. 83-91.

# Abstract

It is well known that among the many problems of discrete mathematics, graph coloring problems play a special role. The sustained interest in this area is motivated both by its intrinsic theoretical significance and by the wealth of applied problems that can be modeled by graph coloring. In particular, there is a significant mutual connection between the problems of scheduling theory and graph coloring problems. Thus, for example, the edge chromatic sums and sum edge colorings of graphs are applied in the modeling of scheduling theory problems where the average execution time of tasks is minimized. This work is dedicated to the study of edge-chromatic sums and sum edge-colorings.

In this dissertation, we consider finite undirected graphs without loops and multiple edges. The vertex set and edge set of a graph $G$ are denoted by $V(G)$ and $E(G)$, respectively. A graph $G$ with $|V(G)| = n$ and $|E(G)| = m$ is referred to as an $(n, m)$-graph. The maximum degree of $G$ is denoted by $\Delta(G)$. A function $\alpha : E(G) \to \mathbb{N}$ is called a proper edge-coloring of $G$ if $\alpha(e) \neq \alpha(f)$ for every pair of adjacent edges $e, f \in E(G)$; the values assigned to edges are called their colors. For a proper edge-coloring $\alpha$, $\sum'(G, \alpha)$ denotes the total sum of all edge colors. A proper edge-coloring attaining the minimum value of this sum is called a sum edge-coloring; the corresponding minimum is denoted $\sum'(G)$ and is termed the edge-chromatic sum of $G$. The minimum number of colors required for a sum edge-coloring of $G$ is called the edge-strength of $G$ and is denoted $s'(G)$.

A graph $G$ is planar if it can be drawn on the plane without edge crossings. A graph $G$ is outerplanar if it has a planar drawing for which all vertices belong to the unbounded face of the drawing.

Let $G$ and $H$ be arbitrary graphs. The tensor (direct) product $G \times H$ of graphs $G$ and $H$ is defined as a graph, where $V(G \times H) = V(G) \times V(H), E(G \times H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2)|(u_1u_2 \in E(G) \text{ and } v_1v_2 \in E(H)\}$. The strong tensor product $G \otimes H$ of graphs $G$ and $H$ is defined as follows: $V(G \otimes H) = V(G) \times V(H), E(G \otimes H) = E(G \times H) \cup \{(u_1, v)(u_2, v)|\ u_1u_2 \in E(G) \text{ and } v \in V(H)\}$. The strong product $G \boxtimes H$ of graphs $G$ and $H$ is defined as follows: $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H), E(G \boxtimes H) = E(G \otimes H) \cup \{(u, v_1)(u, v_2)|\ u \in V(G) \text{ and } v_1v_2 \in E(H)\}$. The Cartesian product $G\square H$ of graphs $G$ and $H$ is defined as follows: $V(G\square H) = V(G) \times V(H), E(G\square H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2)|(u_1 = u_2 \text{ and } v_1v_2 \in E(H)) \text{ or } (v_1 = v_2 \text{ and } u_1u_2 \in E(G))\}$. The composition $G[H]$ of graphs $G$ and $H$ is defined as follows: $V(G[H]) = V(G) \times V(H), E(G[H]) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2)|\ u_1u_2 \in E(G) \text{ or } (u_1 = u_2 \text{ and } v_1v_2 \in E(H))\}$. For any natural numbers $n$ and $m$, the graph $P_n\square P_m$ is called a grid. If $m \geq 3$, then the graph $P_n\square C_m$ is called a cylinder, and for $m \geq 3$ and $n \geq 3$, the graph $C_n\square C_m$ is called a torus. Let $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ and $V(H) = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$. The corona product $G \odot H$ of graphs $G$ and $H$ is defined as follows: $V(G \odot H) = V(G) \cup \{u_j^i|1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}, E(G \odot H) = E(G) \cup \left\{u_j^iu_l^i|u_ju_l \in E(H), 1 \leq i \leq n\right\} \cup \{v_iu_j^i|1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$.

In this work, problems of bounding edge-chromatic sums of general graphs as well as various classes of graphs were considered, problems of finding edge-chromatic sums and edge-strengths and constructing sum edge-colorings, and problems of bounding edge-chromatic sums of various graph products in terms of the parameters of the factors.

In particular, the following results were obtained:

1) General tight upper and lower bounds for edge-chromatic sums of graphs;

2) Tight upper bounds for edge-chromatic sums of outerplanar graphs and their special subclasses, bipartite graphs, and Fibonacci cubes;

3) Exact values of edge-chromatic sums and edge-strengths of various regular graphs, including powers of cycles and generalized cycles, moreover, polynomial algorithms for constructing corresponding sum edge-colorings were given;

4) Tight upper bounds for edge-chromatic sums of tensor products, strong tensor products, strong products, Cartesian products, corona products of graphs, as well as composition of graphs; in particular, for an arbitrary $G$ $(n,m)$-graph and a $p$-vertex $r$-regular $H$ graph $(r \in \mathbb{N})$, the following tight upper bounds were obtained:

$$\sum{}'(G \times H) \leq rp\left(\sum{}'(G)r - \frac{(r-1)m}{2}\right),$$

$$\sum{}'(G \otimes H) \leq (r+1)p\left(\sum{}'(G)(r+1) - \frac{rm}{2}\right),$$

$$\sum{}'(G \boxtimes H) \leq (r+1)p\left(\sum{}'(G)(r+1) - \frac{rm}{2}\right) + \frac{nrps'(G \otimes H)}{2} + n\sum{}'(H),$$

$$\sum{}'(G[H]) \leq n\sum{}'(H) + \frac{nrp^2 s'(G)}{2} + p^3\sum{}'(G) - \frac{p^2(p-1)m}{2};$$

5) Exact values of edge-chromatic sums and edge-strengths of various products of graphs, including grids, cylinders, and tori, moreover, polynomial algorithms for constructing corresponding sum edge-colorings were given;

6) Both tight upper bounds for edge-chromatic sums and exact values of edge-chromatic sums and edge strengths for various subclasses of complete multipartite graphs. In particular, for complete multipartite graphs $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$, where $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 2)$ and $n_i \geq \sum\limits_{j=i+1}^{m} n_j$ $(1 \leq i < m)$, the exact values of the edge-chromatic sum and edge-strength were obtained:

$$\sum{}'(K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}) = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m}\left(n_i\sum_{j=1}^{i-1}n_j\left(\sum_{k=1}^{i-1}n_k + 1\right)\right)$$

and $s'(K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}) = \sum\limits_{i=1}^{m-1} n_i$. Moreover, polynomial algorithms for constructing sum edge-colorings of these graphs were given.

# Резюме


Известно, что среди многочисленных задач дискретной математики особое место занимают задачи раскрасок графов. Большой интерес к этим задачам обусловлен как теоретической важностью этих задач, так и многочисленными прикладными задачами, которые сводятся к соответствующим задачам раскрасок. В частности, существует значительная взаимосвязь между задачами теории расписаний и задачами раскрасок графов. Так, например, рёберно-хроматические суммы и суммарные рёберные раскраски графов применяются при моделировании таких задач теории расписаний, в которых минимизируется среднее время выполнения работ. Данная работа посвящена рёберно-хроматическим суммам и суммарным рёберным раскраскам графов.

В диссертационной работе рассматриваются конечные неориентированные графы без кратных рёбер и петель. Обозначим множество вершин и рёбер графа $G$ через $V(G)$ и $E(G)$, соответственно. Под $(n,m)$-графом будем понимать граф $G$, в котором $|V(G)|=n$, а $|E(G)|=m$. Обозначим через $\Delta(G)$ максимальную степень графа $G$. Функция $\alpha: E(G)\to\mathbb{N}$ называется правильной рёберной раскраской графа $G$, если значения функции, соответствующие любым смежным рёбрам (которые называются цветами рёбер), попарно различны. Если $\alpha$ — правильная рёберная раскраска, обозначим через $\sum'(G,\alpha)$ сумму цветов всех рёбер, при данной раскраске. Правильные рёберные раскраски, при которых эта сумма минимальна, называются суммарными рёберными раскрасками, а сама эта сумма обозначается $\sum'(G)$ и называется рёберно-хроматической суммой графа $G$. Минимальное количество цветов, необходимое для построения суммарной рёберной раскраски графа $G$, называется рёберной прочностью графа и обозначается $s'(G)$.

Граф $G$ называется планарным, если его можно изобразить на плоскости без пересечений рёбер. Граф $G$ называется внешнепланарным, если он имеет планарное изображение, при котором все вершины принадлежат неограниченной грани этого изображения.

Пусть $G$ и $H$ — произвольные графы. Тензорное (прямое) произведение $G\times H$ графов $G$ и $H$ определяется как граф, в котором $V(G\times H)=V(G)\times V(H), E(G\times H)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)|(u_1u_2\in E(G)$ и $v_1v_2\in E(H)\}$. Сильное тензорное произведение $G\otimes H$ графов $G$ и $H$ определяется следующим образом: $V(G\otimes H)=V(G)\times V(H), E(G\otimes H)=E(G\times H)\cup\{(u_1,v)(u_2,v)|\ u_1u_2\in E(G)$ и $v\in V(H)\}$. Сильное произведение $G\boxtimes H$ графов $G$ и $H$ определяется следующим образом: $V(G\boxtimes H)=V(G)\times V(H), E(G\boxtimes H)=E(G\otimes H)\cup\{(u,v_1)(u,v_2)|\ u\in V(G)$ и $v_1v_2\in E(H)\}$. Декартово произведение $G\square H$ графов $G$ и $H$ определяется следующим образом: $V(G\square H)=V(G)\times V(H), E(G\square H)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)|(u_1=u_2$ и $v_1v_2\in E(H))$ или $(v_1=v_2$ и $u_1u_2\in E(G))\}$. Композиция $G[H]$ графов $G$ и $H$ определяется следующим образом: $V(G[H])=V(G)\times V(H), E(G[H])=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)|\ u_1u_2\in E(G)$ или $(u_1=u_2$ и $v_1v_2\in E(H))\}$. Для любых натуральных чисел $n$ и $m$ граф $P_n\square P_m$ называется сеткой. Если $m\geq 3$, то граф $P_n\square C_m$ называется цилиндром, а при $m\geq 3$ и $n\geq 3$ граф $C_n\square C_m$ называется тором. Пусть $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ и $V(H)=\{u_1,u_2,\ldots,u_p\}$. Корона $G\odot H$ графов $G$ и $H$ определяется следующим образом: $V(G\odot H)=V(G)\cup\{u_j^i|1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p\}, E(G\odot H)=E(G)\cup\left\{u_j^iu_l^i|u_ju_l\in E(H), 1\leq i\leq n\right\}\cup\{v_iu_j^i|1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p\}$.

В данной работе рассматривались задачи оценки рёберно-хроматических сумм как

графов в целом, так и различных классов графов, задачи нахождения рёберно-хроматических сумм и рёберных прочностей и построения суммарных рёберных раскрасок, а также задачи оценки рёберно-хроматических сумм различных произведений графов в терминах параметров компонент произведений.

В работе получены следующие основные результаты:

1) Общие достижимые верхние и нижние оценки рёберно-хроматических сумм графов,

2) Достижимые верхние оценки рёберно-хроматических сумм внешнепланарных графов и их специальных подклассов, а также двудольных графов и кубов Фибоначчи,

3) Достижимые значения рёберно-хроматических сумм и рёберных прочностей различных регулярных графов, в том числе степеней простых циклов и обобщённых циклов, а также приведены полиномиальные алгоритмы построения соответствующих суммарных рёберных раскрасок,

4) Достижимые верхние оценки рёберно-хроматических сумм тензорных, сильных тензорных, сильных и декартовых произведений графов, а также корон и композиций графов; в частности, для произвольного $(n, m)$-графа $G$ и $p$-вершинного $r$-регулярного графа $H$ $(r \in \mathbb{N})$ получены следующие достижимые верхние оценки:

$$\sum{}'(G \times H) \leq rp\left(\sum{}'(G)r - \frac{(r-1)m}{2}\right),$$

$$\sum{}'(G \otimes H) \leq (r+1)p\left(\sum{}'(G)(r+1) - \frac{rm}{2}\right),$$

$$\sum{}'(G \boxtimes H) \leq (r+1)p\left(\sum{}'(G)(r+1) - \frac{rm}{2}\right) + \frac{nrps'(G \otimes H)}{2} + n\sum{}'(H),$$

$$\sum{}'(G[H]) \leq n\sum{}'(H) + \frac{nrp^2 s'(G)}{2} + p^3\sum{}'(G) - \frac{p^2(p-1)m}{2},$$

5) Точные значения рёберных хроматических сумм и рёберных прочностей различных графов, являющихся произведениями графов, в том числе сеток, цилиндров и торов, а также приведены полиномиальные алгоритмы построения соответствующих суммарных рёберных раскрасок,

6) Как достижимые верхние оценки рёберно-хроматических сумм, так и точные значения рёберно-хроматических сумм и рёберных прочностей для различных подклассов полных многодольных графов. В частности, для полных многодольных графов $K_{n_1,n_2,\dots,n_m}$, где $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 2)$ и $n_i \geq \sum\limits_{j=i+1}^{m} n_j$ $(1 \leq i < m)$, получены точные значения рёберно-хроматической суммы и рёберной прочности: $\sum{}'(K_{n_1,n_2,\dots,n_m}) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=2}^{m}\left(n_i\sum\limits_{j=1}^{i-1} n_j\left(\sum\limits_{k=1}^{i-1} n_k + 1\right)\right)$ и $s'(K_{n_1,n_2,\dots,n_m}) = \sum\limits_{i=1}^{m-1} n_i$. Кроме того, приведены полиномиальные алгоритмы построения суммарных рёберных раскрасок этих графов.