ՀՀ ԳԱԱ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՍԱՐԳՍՅԱՆ ՎԱՀԵ ԳՆԵԼԻ

ԳԾԱՅԻՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻՑ ԱԶԱՏ ՀԱՎԱՔԱԾՈՒՆԵՐԸ ԴԻՍԿՐԵՏ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Ե.13.05 “Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ” մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման
ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2026

INSTITUTE FOR INFORMATICS AND AUTOMATION PROBLEMS OF NAS RA

SARGSYAN VAHE GNEL

LINEAR RELATIONSHIP-FREE SETS IN THE DOMAIN OF DISCRETE MODELING

ABSTRACT

For obtaining doctoral degree in physical and mathematical sciences in specialty 05.13.05 “Mathematical modeling, numerical methods and software complexes”

Yerevan – 2026

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում:

Գիտական խորհրդատու՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ասլանյան Լևոն Հակոբի

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ալեքսանյան Արա Անանիկի
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Նահապետյան Բորիս Սերգեյի
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Հակոբյան Յուրի Ռուբենի

Առաջատար կազմակերպություն՝ Ռուս-հայկական համալսարան, Մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի և բարձր տեխնոլոգիաների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2026թ., հուլիսի 14-ին՝ ժամը 14:00-ին ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում գործող 037 «Ինֆորմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 0014, Պ. Սևակի 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ ԻԱՊԻ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրը առաքված է 2026թ. հունիսի 12-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական

Քարտուղար, ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Մ. Ե. Հարությունյան

The subject of the thesis has been approved in the Institute for Informatics and Automation Problems of NAS RA.

Scientific Advisor: Doctor of Phys. Math. Sci. Aslanyan Levon Hakob
Official Opponents: Doctor of Phys. Math. Sci. Aleksanyan Ara Ananik
Doctor of Phys. Math. Sci. Nahapetyan Boris Sergey
Doctor of Phys. Math. Sci. Hakopian Yuri Ruben

Leading organization: Russian-Armenian University, Institute of Mathematics, Physics and High Technologies

The defense of thesis will take place on the 14th of July 2026 at 14:00 in the Institute for Informatics and Automation Problems of NAS RA, during the session of the specialized council 037 “Informatics”, address: 0014, Yerevan, P. Sevak str. 1.

The thesis is available in library of IIAP of NAS RA.
The abstract is sent on June 12, 2026.

Scientific Secretary of the specialized council

Doctor of Phys. Math. Sci., Professor M. E. Haroutunian

Աշխատանքի ընդհանուր բնութագիրը

<u>Թեմայի արդիականությունը</u>

Թվարկման կոմբինատորիկան (enumerative combinatorics), որը լուծում է տվյալ բազմության մեջ որոշակի հատկություններով օժտված համակարգերի գոյության, կառուցման և քանակի գնահատման խնդիրներ, դիսկրետ մաթեմատիկայի կարևոր ճյուղ է: Թվարկման կոմբինատորիկայի խնդիրների թվում են՝ n-գագաթային ոչ իզոմորֆ գրաֆների քանակի որոշումը որոշակի հատկությունների դեպքում, ամբողջաթվի գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծումների քանակի որոշումը, քիմիական տարրերի իզոմերների քանակի որոշումը և այլն: Նման խնդիրները լուծելու ավանդական և լայնորեն օգտագործվող մեթոդ է գեներացնող ֆունկցիաների դասական մեթոդը (Generating Function Methods in Combinatorics, Analytic Combinatorics), որը ներառում է Ջ. Պոլյաի (G. Pólya), Ն. Գ. դե Բրեյնի (N. G. de Bruijn) և Գ. դե Բ. Ռոբինսոնի (G. de B. Robinson) թվարկման թեորեմները: Սակայն գեներացնող ֆունկցիաների մեթոդը պահանջում է լուծելի անդրադարձ հարաբերությունների գոյություն, ինչը միշտ չէ, որ իրագործելի է:

Թվարկման կոմբինատորիկայում հաճախ են հանդիպում խնդիրներ, որոնք վերաբերում են որոշակի սահմանափակումներով օբյեկտների քանակի գնահատմանը: Դրանցից են, օրինակ, ունիմոդալ մասամբ կարգավորված բազմություններում հակաշղթաների քանակի որոշումը, ռեգուլյար գրաֆներում անկախ բազմությունների քանակի որոշումը, խմբերում և բնական թվերում գծային հավասարումների լուծումներից ազատ հավաքածուների (ԳՀԼԱՀ) և բազմությունների (ԳՀԼԱԲ) քանակի որոշումը, ինչպես նաև խմբերում տրված քանակի ենթաբազմությունների գումարի տեսքով ներկայացվող բազմությունների քանակի գնահատումը: Որպես կանոն, նման խնդիրների համար բացակայում են լուծելի ռեկուրենտ հարաբերությունները: Այդ իսկ պատճառով, մասնավորապես, ԳՀԼԱՀ-երի և ԳՀԼԱԲ-երի քանակի որոշման խնդիրները լուծելու համար մշակվել է գրանուլների մեթոդը

Գումարից ազատ բազմությունները առաջին անգամ հիշատակվում են Իսաի Շուրի [1] 1916 թ. աշխատանքի մեջ, որտեղ նա դիտարկում է բնական թվերի կամայական վերջավոր ներկում և փաստում, որ դրանցում գոյություն ունեն մոնոխրոմատիկ եռյակներ՝ գումարման գործողությամբ: Այս գաղափարը նպատակ ուներ նպաստել Ֆերմայի մեծ թեորեմի ապացուցմանը, բայց իրականում հիմնեց Շուրի թվերը և օգնեց ստանալ Ռամսեյի տեսության մի շարք արդյունքներ: Ի. Շուրը օգտագործելով գումարից ազատ բազմությունները ապացուցեց, որ

$$x^n + y^n = z^n \ (mod\ p)$$

հավասարումը միշտ ունի լուծում բավականաչափ մեծ p-երի համար:

1. Schur I. Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \ (\mathrm{mod}\ p)$ // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (European Mathematics Digital Library). 1916. 25. P. 114–117.

A բազմությունը կոչվում է գումարից ազատ, եթե ցանկացած $x, y \in A$ համար $x + y \notin A$, այլ կերպ ասած՝ $x + y = z$ հավասարումը չունի լուծում A բազմությունում:

1985 թվականին Պ. Կամերոնը [2] ուսումնասիրել է բնական թվերի բազմության գումարից ազատ բազմությունների ընտանիքի Հաուսդորֆի չափը, և ենթադրել, որ այն հավասար է 1/2: Այս խնդրի ֆինիտիզացումը դարձել է բնական թվերի սկզբնական հատվածում գումարից ազատ բազմությունների քանակի որոշման հիմքը: Այս թեմատիկայի հետագա ընդլայնումը և ուսումնասիրումը կապված է Կամերոն-Էրդյոշի հիպոթեզի ձևակերպման հետ, 1988, որը ենթադրում էր, որ բնական թերի $[1, n]$ հատվածում գումարից ազատ բազմությունների քանակը $O(2^{n/2})$ է: Հիպոթեզը իրարից անկախ ապացուցել են Ալեքսանդր Սապոժենկոն և Բեն Գրինը [3,4]:

2. Cameron P. J. Cyclic automorphisms of a countable graph and random sum-free sets // Graphs Combin. 1985. 1. P. 129–135.
3. Сапоженко А. А. Гипотеза Камерона-Эрдёша // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 6. С. 749–752.
4. Green B. The Cameron-Erdös conjecture // Bull. London Math. Soc. 2004. 36(6). P. 769–778.

Գումարից ազատ բազմությունների շարքում առավել հետաքրքրություն են ներկայացնում առավելագույն ըստ հզորության, առավելագույն ըստ ներառման բազմությունները, որոնք հաճախ խմբավորվում են յուրահատուկ կառուցվածքային ձևերի՝ գրանուլների մեջ, ինչպես օրինակ կենտ թվերի բազմությունն է, կամ $(n + 1, n + 2, \ldots, 2n)$ «մեծ» թվերի բազմությունը $[1, 2n]$ հատվածում: Գումարից ազատ բազմությունների քանակի գնահատումը սերտորեն կապված է նրանց առավելագույն բազմությունների կառուցվածքի և դրանց տեղաբաշխման հետ, այսինքն գրանուլար կառուցվածքների հետ: Հետազոտական տիրույթը լայն է և ընդգրկում է մաթեմատիկայի տարբեր ուղղություններ, այդ թվում՝ թվերի տեսություն, հանրահաշիվ, էքստրեմալ կոմբինատորիկա, Ֆուրյեի անալիզ և այլն: Այստեղ ձևավորվել են հետազոտական գործիքներ և մեթոդաբանական բազա, որը հնարավորություն է տվել ստանալ հիմնարար արդյունքներ գումարից ազատ հավաքածուների (բազմությունների) համար: Այդ թվում են ռեգուլար հիպերգրաֆների և մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների միջոցով տրվող ներկայացումները, կոմբինատորիկայի հավանականային մոդելները, վերջավոր բազմություններում տրվող Ֆուրյեի ձևափոխությունները և այլ մոտեցումներ:

Այս ամենի տեղափոխումը և ընդլայնումը առավել ընդհանրական (k,l) մոդելների ուսումնասիրման մեջ ((k,l) մոդելները խնդրի թույլ ուսումնասիրված մասն է) պահանջում է նշված մեթոդոլոգիայի լրամշակում և ընդլայնում ինչ և արված է սույն աշխատանքում:

Մասնավորապես, խոսքը գնում է (k,l)-գումարից ազատ հավաքածուների մասին: $(A_1,\dots,A_{k+l})$ հավաքածուն կոչվում է (k,l)-գումարից ազատ, եթե գոյություն չունի հավաքածու $(a_1,\dots,a_{k+l}) \in A_1 \times\dots\times A_{k+l}$, որը հանդիսանում է

$$x_1+\dots+x_k = x_{k+1}+\dots+x_{k+l},$$

հավասարման լուծում:

Հիմնովի ուսումնասիրվել է նաև այն դեպքը երբ հավաքածուի բազմությունները համընկնում են՝ $A_1 =\dots= A_{k+l}$, այսինքն՝ (k,l)-գումարից ազատ բազմության դեպքը:

Նշենք նաև դիտարկվող խնդիրների կիրառական մասը: Կանդրադառնանք մեկ խնդրի՝ ինտերֆերենցիայի խնդրին: Էլեկտրոնային սարքերում, հատկապես ոչ գծային միջավայրներում, ծանրաբռնվածության և արտակարգ իրավիճակներում տարվող աշխատանքների ժամանակ գեներացվում են հավելյալ անցանկալի հարմոնիկներ: Եթե f-ը և g-ն սարքի աշխատանքային հաճախականություններ են, ապա ամենաքիչը առաջանում են $f \pm g$ տիպի ազդանշաններ: Նմանատիպ հաճախականային խառնուրդ առաջանում է ընդունիչ կայաններում, որտեղ պետք է տարբերել ընդունման ենթակա հաղորդագրությունը խառնուրդից:

Այն դեպքում, երբ հաղորդակցման մասնակիցների քանակը մեծ է և պահանջվում է նրանցից յուրաքանչյուրին և բոլորին հատկացնել գումարից ազատ հաճախականություններ, այսինքն, կարևոր է իմանալ նման բազմությունների քանակը և կարողանալ այն տրոհել համապատասխան մասերի:

Աշխատանքում հետազոտությունների այս մասը կապվում է ռադարների ներքին աշխատանքի և ռադարների մասնակցությամբ կազմված ռադիոհաճախականային մշտադիտարկման հետ:

Գումարից ազատ բազմությունների և իրենց տարաբնույթ ընդհանրացումների թեմատիկան մինչ օրս ակտուալ է: Ամեն տարի մեծաթիվ քանակի գիտական աշխատություններ են հրատարակվում այս թեմատիկայով:

<u>Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները</u>

Աշխատանքի նպատակը էքստրեմալ կոմբինատորիկայի և Ֆուրյեի գործակիցների վերլուծության մեթոդների օգնությամբ մշակել «գրանուլների ընդհանրացված մեթոդ»: Ցույց տալ, որ յուրաքանչյուր բավական մեծ գումարից ազատ հավաքածու կամ գումարից ազատ բազմություն ունի որոշակի «պարբերական» կառուցվածք: Տալ այդպիսի կառուցվածքների նկարագիրը: Ցույց տալ, որ գումարից ազատ հավաքածուն (բազմությունը) այդ կառուցվածքներից յուրաքանչյուրը կամ «գրեթե» ամբողջությամբ լցնում է, կամ «գրեթե» դատարկ է թողնում այն: Ֆուրյեի գործակիցների վերլուծության մեթոդների օգնությամբ ապացուցել, որ հավասարման լուծումների քանակի վրա ազդում է միայն բազմության կառուցվածքային մասը: Իսկ քանի որ բուն բազմությունը գումարից ազատ է, ապա այդ կառուցվածքային մասն էլ պետք է լինի գումարից ազատ, որը իր հերթին հնարավորություն է տալիս բարդ խնդիրը բերել ավելի պարզ մոդելի:

Աշխատանքի խնդիրներից են՝ մշակված մեթոդի կիրառմամբ ստանալ գումարից ազատ հավաքածուների և գումարից ազատ բազմությունների քանակի ասիմպտոտիկ գնահատականները Աբելյան խմբում և ամբողջ թվերի սկզբնական հատվածում, ինչպես նաև, այդ մեթոդի կիրառմամբ գնահատել տրված թվով ենթաբազմությունների գումարի և տարբերության տեսքով ներկայացվող բազմությունների քանակը Աբելյան խմբում:

Խնդիրների մյուս խումբը - թվերի գումարման տեսության (Additive number theory) և ադիտիվ կոմբինատորիկայի (Additive combinatorics) մեթոդների կիրառմամբ գնահատել առավելագույն գումարից ազատ հավաքածուի և առավելագույն գումարից ազատ բազմության հզորությունը և նկարագրել դրանց կառուցվածքը:

<u>Հետազոտման մեթոդները</u>

Աշխատանքում օգտագործվում են թվերի գումարման տեսության (Additive number theory), ադիտիվ կոմբինատորիկայի (Additive combinatorics) և Ֆուրյեի գործակիցների վերլուծության մեթոդները: Աշխատանքում մշակվել է «գրանուլների ընդհանրացված մեթոդը»:

<u>Գրանուլների մեթոդի էությունը</u> կայանում է նրանում, որ ուսումնասիրվող օբյեկտների քանակը գնահատելու համար կառուցվում է այսպես կոչված «գրանուլների» ընտանիք այնպիսի, որ ուսումնասիրվող յուրաքանչյուր օբյեկտների ամբողջությամբ կամ «գրեթե» ամբողջությամբ ընկած է ընտանիքի որևէ գրանուլի մեջ: Գրանուլների քանակը, իրենց հատուկ կառուցվածքի շնորհիվ, ավելի հեշտ է գնահատել, քան ուսումնասիրվող բազմությունների քանակը:

Այն դեպքում, երբ գործ ունենք <u>ժառանգականության հատկություն ունեցող</u> օբյեկտների քանակը գտնելու խնդիրների հետ, ապա քանակի լոգարիթմի ստորին գնահատականը ստանալու համար հաճախ բավական է ներքևից գնահատել օբյեկտների առավելագույն հզորությունը:

<u>Ֆուրյեի գործակիցների վերլուծություն:</u>

Դիցուք G-ն n կարգի Աբելյան խումբ է, իսկ $\mathbb{R}$-ը և $\mathbb{C}$-ն համապատասխանաբար իրական և կոմպլեքս թվերի բազմություններն են, և $\gamma : G \to \mathbb{C}$ արտապատկերում է այնպիսի, որ կամայական $x, y \in G$ համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$|\gamma(x)| = 1 \text{ և } \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y):$$

Այսպիսի արտապատկերումը կոչվում է G խմբի բնութագրիչ: G խմբի բոլոր բնութագրիչների բազմությունը նշանակենք Γ-ով: Նկատենք, որ Γ-ն կազմում է խումբ՝ $\gamma_1 \star \gamma_2(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$ գործողությամբ: Դժվար չէ տեսնել, որ G-ն և Γ-ն իզոմորֆ են: Այսպիսի բնութագրիչները ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\gamma(x) = e^{2\pi\varphi(x)i},$$

որտեղ $\varphi : G \to \mathbb{R}$, և կամայական $x, y \in G$ համար տեղի ունի հավասարությունը

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y):$$

$f : G \to \mathbb{R}$ ֆունկցիայի <u>Ֆուրյեի ձևափոխություն</u> կոչվում է $\widehat{f} : \Gamma \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\hat{f}(\gamma) = \sum_{x \in G} f(x)\gamma(x):$$

Դիցուք $f, g : G \to \mathbb{R}$: Կոնվոլյուցիան սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(x - y):$$

Դիցուք A-ն և B-ն G Աբելյան խմբի ոչ դատարկ ենթաբազմություններ են: $A(x)$ և $B(x)$ նշանակենք համապատասխանաբար A և B բազմությունների բնութագրիչ ֆունկցիաները:

Համաձայն կոնվոլյուցիայի սահմանման՝ $(A * B)(x)$ հավասար է այն $(a, b) \in A \times B$ հավաքածուների քանակին, որոնց համար տեղի ունի հավասարությունը $x = a + b$, այսինքն x-ի ներկայացումների քանակը a և b տարրերի գումարի տեսքով:

Աղիտիվ կոմբինատորիկայում Ֆուրյեի գործակիցների վերլուծությունը գումարից ազատ հավաքածուների ուսումնասիրության հիմնարար գործիքն է:

Նշանակենք $\delta_{x,y}$-ով Կրոնեկերի դելտա ֆունկցիան՝

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}:$$

<u>Սահմանում:</u> A բազմությունը կոչվում է գումարից ազատ, եթե $x + y = z$ հավասարումը չունի լուծում A բազմության մեջ:

<u>Սահմանում:</u> (A, B, C) հավաքածուն կոչվում է գումարից ազատ, եթե $x + y = z$ հավասարումը չունի լուծում, որտեղ $x \in A,\ y \in B,\ z \in C$:

Դիտարկենք գումարից ազատ բազմությունների և գումարից ազատ հավաքածուների դեպքերը առանձին առանձին:

<u>Դիցուք $A \subseteq G$ գումարից ազատ բազմություն է:</u> $A(x)$-ով նշանակենք A բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան: Քանի որ $x + y = z$ հավասարումը չունի լուծում A բազմության մեջ, ապա տեղի ունի հավասարությունը

$$(A * A)(x) = 0, \qquad x \in A,$$

կամ որ նույն է՝

$$0 = \sum_{x,y,z \in A, x+y=z} A(x)A(y)A(z) = \sum_{x,y,z \in G} A(x)A(y)A(z)\delta_{x+y,z}:$$

Համաձայն Պարսևալի հավասարության ստանում ենք, որ

$$0 = \sum_{x,y,z\in A, x+y=z} A(x)A(y)A(z) =$$

$$= \sum_{x,y,z\in G} A(x)A(y)A(z)\delta_{x+y,z} = \frac{1}{n}\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\hat{A}(\gamma)\right)^3 :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\hat{A}(\gamma)\right)^3 = 0:$$

Նկատենք, որ $\gamma = 0$ դեպքում $\left(\hat{A}(0)\right)^3 = |A|^3$, ինչը բավական մեծ թիվ է: Քանի որ ընդհանուր գումարը 0 է, իսկ $\gamma = 0$ դեպքում գումարելին դրական է, ապա պետք է գոյություն ունենան այնպիսի $\gamma \neq 0$ Ֆուրյեի գործակիցներ, որոնք «մեծ» են և ունեն բացասական արժեքներ, որպեսզի «չեզոքացնեն» $|A|^3$:

Դիտարկենք երկու սցենար.

Սցենար Ա: Եթե A բազմության բնութագրիչ ֆունկցիայի բոլոր $\gamma \neq 0$ Ֆուրյեի գործակիցներ «փոքր» են ($\max_{\gamma\neq 0}|\widehat{A}(\gamma)| < \varepsilon|A|$), ապա A բազմությունը ունի «պատահական» կառուցվածք:

Սցենար Բ: Եթե A բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան ունի գոնե մեկ «մեծ» Ֆուրյեի գործակից ($\gamma \neq 0$), ապա A բազմությունը ունի «պարբերական» կառուցվածք:

Այսպիսով ստանում ենք, որ գումարից ազատ բազմությունը չի կարող լինել «պատահական» բաշխված, այն պարտադիր պետք է ունենա «մեծ» Ֆուրյեի գործակից, ինչը նշանակում է, որ բազմությունը ունի որոշակի «պարբերական» կառուցվածք:

Կոնվոլյուցիան այստեղ ծառայում է որպես «հայտնաբերող»՝ այն ցույց է տալիս արդյոք բազմությունը բաշխված է «պատահական», թե՞ ունի «պարբերական» կառուցվածք:

Ֆուրյեի գործակիցների վերլուծությունը թույլ է տալիս տեսնել բազմության մեջ թաքնված պարբերականությունները: Եթե բազմությունը չունի «մեծ» Ֆուրյեի գործակիցներ, ապա այն իրեն պահում է որպես «պատահական»:

Այժմ դիտարկենք գումարից ազատ հավաքածուի դեպքը:

Դիցուք A-ն, B-ն և C-ն G Աբելյան խմբի ոչ դատարկ ենթաբազմություններ են: $A(x), B(x), C(x)$-ով նշանակենք համապատասխանաբար A, B, C բազմությունների բնութագրիչ ֆունկցիաները:

Դիցուք (A, B, C) հավաքածուն գումարից ազատ է: Քանի որ (A, B, C) հավաքածուն գումարից ազատ է, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$(A * B)(x) = 0, \quad x \in C,$$

կամ որ նույն է՝

$$0 = \sum_{x\in A, y\in B, z\in C, x+y=z} A(x)B(y)C(z) = \sum_{x,y,z\in G} A(x)B(y)C(z)\delta_{x+y,z}:$$

Համաձայն Պարսևալի հավասարության ստանում ենք, որ

$$0 = \sum_{x\in A, y\in B, z\in C, x+y=z} A(x)B(y)C(z) =$$

$$= \sum_{x,y,z\in G} A(x)B(y)C(z)\delta_{x+y,z} = \frac{1}{n}\sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{A}(\gamma)\hat{B}(\gamma)\hat{C}(\gamma):$$

Այստեղից ստանում ենք, որ

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{A}(\gamma)\hat{B}(\gamma)\hat{C}(\gamma) = 0:$$

Նկատենք, որ $\gamma = 0$ դեպքում Ֆուրյեի գործակիցների արտադրյալի համար տեղի ունի հավասարությունը՝ $\hat{A}(0)\hat{B}(0)\hat{C}(0) = |A||B||C|$, ինչը բավական մեծ թիվ է: Քանի որ ընդհանուր գումարը 0 է, իսկ $\gamma = 0$ դեպքում գումարելին դրական է, ապա պետք է գոյություն ունենան այնպիսի $\gamma \neq 0$ Ֆուրյեի գործակիցների արտադրյալներ, որոնք «մեծ» են և ունեն բացասական արժեքներ, որպեսզի «չեզոքացնեն» $|A||B||C|$:

Եթե Ֆուրյեի գործակիցների արտադրյալը «մեծ» է որոշակի $\gamma \neq 0$-երի համար, ապա դա նշանակում է, որ բազմությունները ունեն նմանատիպ ադիտիվ կառուցվածք: Սա նշանակում է նաև, որ բոլոր A, B, C բազմությունները միաժամանակ պետք է ունենան նույն «մեծ» ոչ զրոյական Ֆուրյեի գործակիցներ:

Ֆուրյեի գործակիցների վերլուծությունը թույլ է տալիս գտնել մի ընդհանուր ենթակառուցվածք, որտեղ բոլոր բազմությունները ցուցաբերում են ոչ «պատահական» վարք:

Մաթեմատիկորեն հիմնավորվեց, որ գումարից ազատ բազմությունը չի կարող լինել պատահական: Եթե բազմությունը լիներ պատահական, նրա ոչ զրոյական ($\gamma \neq 0$) Ֆուրյեի գործակիցները կլինեին շատ «փոքր», և նրանք չէին կարողանա «զրոյացնել» հիմնական ($\gamma = 0$) անդամը: Հետևաբար, գումարից ազատ բազմությունը պարտադիր ունի «մեծ» Ֆուրյեի գործակից, ինչը նշանակում է, որ այն ունի խիստ որոշակի «պարբերական» կառուցվածք:

Նույն հիմնավորումով ստանում ենք, որ գումարից ազատ հավաքածուի դեպքում հավաքածուի բազմությունները պետք է ունենան նմանատիպ ադիտիվ կառուցվածք:

<u>Ինչպիսին են այդ «պարբերական» կառուցվածքները.</u>

Բորի բազմությունը (Bohr set) ադիտիվ կոմբինատորիկայի հիմնական հասկացություններից է, որը հանդես է գալիս որպես ենթախմբի «ընդհանրացված» տարբերակ:

Դիցուք G-ն n կարգի Աբելյան խումբ է, իսկ Γ-ն G-ի բնութագրիչների խումբն է:

Բորի բազմություն կոչվում է այն $B(\Gamma_1, \delta) \subseteq G$ ենթաբազմությունը, որը սահմանվում է՝

$$B(\Gamma_1, \delta) = \{x \in G \mid \forall \gamma \in \Gamma_1, |1 - \gamma(x)| < \delta\},$$

որտեղ $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ բնութագրիչների ենթաբազմություն է, և կոչվում է Բորի բազմության չափողականություն, իսկ $\delta \in (0,2]$, և կոչվում է շառավիղ:

Բորի բազմությունը այն «կաղապարն» է, որի մեջ տեղավորվում են գումարից ազատ հավաքածուները (բազմությունները)՝ իրենց ադիտիվ հատկությունները պահպանելու համար:

Բորի բազմության հարակից դասը (Bohr set coset) հասկանալու համար ամենապարզ ձևը զուգահեռ տանելն է սովորական ենթախմբերի հարակից դասերի հետ: Նույն տրամաբանությամբ, եթե ունենք $B(\Gamma_1, \delta)$ Բորի բազմություն, ապա նրա հարակից դասը կլինի

$$x + B(\Gamma_1, \delta) = \{x + b \mid b \in B(\Gamma_1, \delta)\}:$$

<u>Բազմության տրոհումը գրանուլների</u>

Երբ կիրառում ենք «գրանուլների» լեմման (1.3 և 3.2 պարբերություններում ապացուցված լեմմաներ 1.5 և 3.1) գումարից ազատ բազմության կամ գումարից ազատ հավաքածուի վրա, ամբողջ խումբը տրոհում ենք Բորի բազմության հարակից դասերի: Այդ հարակից դասերն էլ հենց մեր գրանուլներն են:

«Գրանուլների» լեմման երաշխավորում է, որ գումարից ազատ հավաքածուն (բազմությունը) Բորի բազմության հարակից դասերից յուրաքանչյուրի ներսում (գրանուլների մեջ) իրեն պահում է շատ պարզ՝ կամ «գրեթե» ամբողջությամբ լցնում է հարակից դասը, կամ «գրեթե» դատարկ է թողնում այն: Այս մոտեցումը թույլ է տալիս խնդիրը տեղափոխել «քվանտացված» մակարդակ, և մենք այլևս չենք նայում առանձին տարրերին, այլ նայում ենք, թե որ հարակից դասերն են «ներառված»:

Առանց Բորի բազմությունների մենք ստիպված կլինեինք աշխատել միայն ենթախմբերի հետ: Բայց, քանի որ ենթախմբեր միշտ չէ որ կան, Բորի բազմությունները փոխարինում են ենթախմբերին: Դրանք թույլ են տալիս ասել՝ «Այս գումարից ազատ բազմությունը նման է թվաբանական պրոգրեսիային», որտեղ այդ պրոգրեսիան հենց պարզագույն Բորի բազմությունն է: Բորի բազմությունները թույլ են տալիս կատարել գրեթե նույն հաշվարկները, ինչ ենթախմբերի դեպքում, բայց ավելի մեծ ճկունությամբ: Բորի բազմությունը ենթախմբի ընդհանրացումն է: Այնտեղ, որտեղ կան ենթախմբեր, այն կարող է համընկնել դրանց հետ, իսկ այնտեղ, որտեղ չկան՝ այն ստեղծում է «ենթախմբանման» կառուցվածք:

Այսպիսով, գրանուլացիան ցույց տվեց, որ ցանկացած «մեծ» գումարից ազատ հավաքածու (բազմություն) կարելի է «մոտարկել» մի շատ պարզ կառուցվածքով՝ Բորի բազմության մոդելով: Սա նշանակում է, որ «մեծ» գումարից ազատ բազմությունները միշտ ունեն կառուցվածքային տեսք և չեն կարող լինել «պատահական»:

Ֆուրյեի գործակիցների վերլուծությունը ցույց տվեց, որ հավասարման լուծումների քանակի վրա ազդում է միայն բազմության կառուցվածքային (գրանուլացված) մասը: Իսկ քանի որ բուն բազմությունը գումարից ազատ է, ապա այդ կառուցվածքային մասն էլ պետք է լինի գումարից ազատ: Սա մեզ թույլ է տալիս բարդ խնդիրը բերել ավելի պարզ, բայց «կոպիտ» մոդելի:

Գիտական նորույթը

Աշխատանքում մշակվել է գրանուլների ընդհանրացված մեթոդը, որը կիրառելի է ոչ միայն գումարից ազատ բազմության համար՝ ընդհանրացված կամայական տրված գծային հավասարումների համար՝ -1 և 1 գործակիցներով, այլ նաև գումարից ազատ հավաքածուների համար:

Գրանուլների ընդհանրացված մեթոդը թույլ է տվել գտնել գումարից ազատ հավաքածուների (բազմությունների) քանակի լոգարիթմական ասիմպտոտիկա Աբելյան խմբում և ամբողջ թվերի սկզբնական հատվածում: Ինչպես նաև, գրանուլների ընդհանրացված մեթոդը հնարավորություն է տվել գնահատել վերևից այնպիսի բազմությունների քանակը, որոնք ներկայացվում են ենթաբազմությունների գումարի և տարբերության տեսքով Աբելյան խմբում:

Հստակ նկարագրվել են առավելագույն ըստ հզորության (ըստ ներառման) գումարից ազատ հավաքածուների և գումարից ազատ բազմությունների կառուցվածքները:

Աշխատանքում տեղ գտած մոտեցումները, մշակված մեթոդները և ստացված արդյունքները ցիտվում են վերջին տարիների հրապարակումներում, մասնավորապես 2025 և 2026 թվականների հետևյալ աշխատանքներում՝

1. Alon N., Zamir O. Sumsets in the Hypercube // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 2025. 39(1). P. 314-326. doi: 10.1137/24M165569X
2. Lee H., Yip C. H., Yoo S. Product representations of polynomials over finite fields // eprint arXiv:2601.16657. 2026. doi: 10.48550/arXiv.2601.16657

Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը

Գումարից ազատ հավաքածուների կիրառությունները բավականին լայն են՝ սկսած տեսական մաթեմատիկայից մինչև տեղեկատվական տեխնոլոգիաներ: Առանցքային ոլորտներն են.

- Ռամսեյի տեսություն. Գումարից ազատ հավաքածուները օգտագործվում են Ռամսեյի թվերի ստորին սահմաններ գտնելու համար (օրինակ՝ Շուրի թվերի միջոցով): Ըստ էության, դրանք օգնում են հասկանալ, թե որքան մեծ կարող է լինել քաոսային տվյալների բազմությունը, նախքան որոշակի կառուցվածքի անխուսափելիորեն առաջանալը:

Եթե ունենք լրիվ գրաֆ և ուզում ենք նրա կողերը ներկել այնպես, որ չառաջանա մոնոխրոմատիկ եռանկյուն, ապա այդ ներկման խնդիրը հանգում է թվերի բազմությունը գումարից ազատ հավաքածուների տրոհելուն: Սա օգնում է հասկանալ բարդ համակարգերում «կարգի» և «քաոսի» սահմանագիծը:

- <u>Հաշվողական երկրաչափություն.</u> Գումարից ազատ կառուցվածքները կիրառվում են բազմությունների գումարման (Minkowski sum) հետ կապված խնդիրներում:
- <u>Թվերի տեսություն և Հարմոնիկ անալիզ.</u> Գումարից ազատ բազմությունները այսօր էլ օգտագործվում են հարմոնիկ անալիզում և կոմբինատոր թվերի տեսության մեջ՝ կառուցվածքային հատկություններն ուսումնասիրելու համար:
- <u>Կոդավորման տեսություն.</u> Գումարից ազատ հավաքածուները օգտագործվում են սխալներ շտկող կոդերի (error-correcting codes) նախագծման մեջ: Եթե մի քանի աղբյուրից տվյալների փոխանցման ժամանակ ազդանշանները կազմում են գումարից ազատ հավաքածու, ապա համակարգը կարող է հեշտությամբ տարբերակել իրական ազդանշանը աղմուկից կամ երկու ազդանշանների պատահական վերադրումից (գումարից), քանի որ այդ գումարը պարզապես գոյություն չունի թույլատրելի կոդերի ցանկում:

  Գումարից ազատ հավաքածուները հատկապես կարևոր են ցիկլիկ ենթատարածքային կոդերի ստեղծման մեջ, որոնք կիրառվում են ցանցային կոդավորման (network coding) համակարգերում տվյալների հուսալի փոխանցումն ապահովելու համար: Optical Code Division Multiple Access (OCDMA) համակարգերում գումարից ազատ հատկությունների օգտագործումը նշանակում է, որ յուրաքանչյուր օգտատիրոջ կոդը օպտիմալ է՝ նվազագույն քանակի «1»-երով ապահովել առավելագույն տարանջատում:
- <u>Գաղտնագրություն.</u> Որոշ հեշ-ֆունկցիաներ և գաղտնագրման սխեմաներ հիմնված են բազմությունների այնպիսի դասավորության վրա, որտեղ տարրերի գումարային համակցությունները կանխատեսելի չեն կամ դուրս են գալիս տրված տիրույթից:

  Դրանք կիրառվում են նաև գաղտնի բանալիների գեներացման գործընթացում, ինչպես նաև օգտագործվում են գաղտնագրային ֆունկցիաների նախագծման մեջ: Օրինակ՝ Almost Perfect Nonlinear (APN) ֆունկցիաներում, որոնք ապահովում են օպտիմալ դիմադրություն դիֆերենցիալ հարձակումների նկատմամբ:

- <u>Դինամիկ համակարգեր.</u> Էրգոդիկ տեսությունում գումարից ազատ սկզբունքը օգնում է նկարագրել հաջորդականությունների հատկությունները և թվային համակարգերի «պատահականության աստիճանը»:

- <u>Հեռահաղորդակցություն.</u> Գումարից ազատ հավաքածուները ունեն լայն կիրառություն ազդանշանների մշակման խնդիրներում: Դրանք օգնում են ստեղծել այնպիսի համակարգեր, որտեղ ազդանշանների միջև միջամտությունը (interference) հասնում է նվազագույնի: Ինտերմոդուլացիան (կամ միջմոդուլացիան, intermodulation) երևույթ է, երբ երկու կամ ավելի տարբեր հաճախականությամբ ազդանշաններ անցնում են ոչ գծային միջավայրով, ինչի հետևանքով առաջանում են նոր, անցանկալի հաճախականությամբ լրացուցիչ ազդանշաններ: Երբ մեկից ավելի ազդանշաններ հայտնվում են այնպիսի սարքերում, ինչպիսիք են ուժեղարարները կամ խառնիչները (mixers), դրանք կարող են «մոդուլացնել» միմյանց: Արդյունքում ստացվում են նոր կոմբինացիոն հաճախականություններ, որոնք բնօրինակ ազդանշանների գումարն կամ տարբերությունն են: Օրինակ, եթե ունենք երկու հաճախականություն՝ f_1 և f_2, ապա ինտերմոդուլացիայի արդյունքում կարող են առաջանալ f_1+f_2 կամ f_1-f_2, ինչպես նաև ավելի բարդ համակցություններ, օրինակ՝ $2f_1-f_2$ և $2f_2-f_1$: Ընդհանուր առմամբ երկտոն ազդանշանների ինտերմոդուլյացիայի արդյունքում առաջանում են $mf_1 \pm nf_2$ հաճախականությամբ անցանկալի պրոդուկտներ, որտեղ m և n ամբողջ թվեր են: Այս երևույթը հաճախ անվանում են ինտերմոդուլյացիոն աղավաղում, քանի որ այն ստեղծում է «աղմուկ», որը խանգարում է մաքուր կապին:

  Ինտերմոդուլյացիոն աղավաղումները առաջանում են ֆիզիկական սարքերում, և բնականաբար մշակվել են բազմաթիվ ֆիզիկական միջամտություններ խնդիրները համակարգերի ներսում կարգավորելու համար: Նման միջամտություններ նվազեցնում են աղավաղումների մակարդակը բայց դրանք ծախսատար են և ի զորու չեն արմատապես բացառել անցանկալի աղավաղումները: Ինտերմոդուլյացիայի հիմնական լուծումներից մեկը հաճախականությունների պլանավորումն է:

Հաճախականությունների պլանավորում

Երբ տարբեր հաճախականությունների մի քանի ազդանշաններ (f_1,f_2,f_3) փոխանցվում են մեկ ուժեղարարի կամ միջավայրի միջոցով (մասնավորապես ռադարային համակարգերում), առաջանում են $f_1 + f_2$ տեսքի «ուրվական» հաճախականություններ: Եթե այս գումարը համընկնում է օգտակար ազդանշանի f_3 հաճախականության հետ, սա միջամտություն է, որը չի կարող ֆիլտրվել:

Այսպիսով, եթե ազդանշանների աշխատանքային հաճախականությունների բազմությունը իրենից ներկայացնում է գումարից ազատ հավաքածու, ապա ցանկացած երկու հաճախականությունների համադրություն երբեք չի ընկնի երրորդ ազդանշանի վրա:

Գումարից ազատ հավաքածուները կարևոր գործիք են տվյալների հաղորդակցման խնդիրներում, որոնք օգնում են նվազեցնել ոչ գծային աղավաղումները, հատկապես բազմալիքային համակարգերում:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները

- Աբելյան խմբի տրոհում Բորի բազմության հարակից դասերի այնպես, որ որոշ հարակից դասերի միավորումը իրենից ներկայացնի «գրեթե» գումարից ազատ բազմություն,
- Յուրաքանչյուր բավական մեծ գումարից ազատ հավաքածու (բազմություն) «գրեթե» ընկած է Բորի բազմության հարակից դասերի որևէ միավորման մեջ,
- Աբելյան խմբերում և ամբողջ թվերի սկզբնական հատվածում գումարից ազատ հավաքածուների (բազմությունների) քանակի հաշվումը բերել որոշակի Բորի բազմությունների հարակից դասերի միավորումների քանակի հաշման,
- Գնահատել առավելագույն ըստ հզորության (ըստ ներառման) գումարից ազատ հավաքածուների (բազմությունների) չափը և նկարագրել դրանց կառուցվածքը Աբելյան խմբերում,
- Աբելյան խմբերում ենթաբազմությունների գումարի և տարբերության տեսքով ներկայացվող բազմությունների քանակի հաշվումը բերել որոշակի Բորի բազմությունների հարակից դասերի միավորումների քանակի հաշմանը:

Աշխատանքի արդյունքները զեկուցվել են

Ատենախոսությունում ստացված արդյունքները ներկայացվել և քննարկվել են հետևյալ սեմինարներում և գիտաժողովներում.

- «Համակարգչային գիտության և կիրառական մաթեմատիկայի արդիական հարցեր 2025» կոնֆերանս, ԵՊՀ, Երևան, 2025 թ.,
- «Տեսական կիբեռնետիկայի խնդիրներ» XX միջազգային գիտաժողով, Մոսկվա, ՄՊՀ Հաշվողական մաթեմատիկայի և կիբեռնետիկայի ֆակուլտետ, 2024 թթ.,
- Նոր սերնդի արհեստական բանականություն (New Generation AI), Չինաստան, Նանկին, 2024 թ.,
- «Թվերի տեսության ժամանակակից խնդիրներ» սեմինարում՝ Ս.Վ. Կանյագինի, Մ.Ա. Կոռոլյովի և Ի.Դ Շկրեդովի ղեկավարությամբ, Ռուսաստանի Դաշնության Վ.Ա. Ստեկլովկայի անվան Մաթեմատիկական ինստիտուտ, Մոսկվա, 2023 թ.,
- «Դիսկրետ մաթեմատիկա և նրա կիրառությունները» XIV միջազգային գիտական սեմինարում, Մոսկվա, 2022 թ.,
- ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի 50-ամյակին նվիրված գիտաժողով, ԵՊՀ, Երևան, 2022 թ.,
- Համակարգչային գիտություն և տեղեկատվական տեխնոլոգիաներ միջազգային կոնֆորանս, ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման ինստիտուտ, Երևան, 2021,2023 թթ.,
- Կիբեռնետիկայի մաթեմատիկական հարցեր, սեմինարում՝ Վ.Բ. Ալեքսեևի, և Ս.Ա. Լոժկինի ղեկավարությամբ, ՄՊՀ Հաշվողական մաթեմատիկայի և կիբեռնետիկայի ֆակուլտետի մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի ամբիոն, Մոսկվա, 2021 թ.,
- «Դիսկրետ մոդելներ կառավարման համակարգերի տեսության մեջ» X միջազգային կոնֆերանս, Մոսկովյան մարզ, 2018 թ.,
- Մաթեմատիկան ժամանակակից աշխարհում: Միջազգային կոնֆերանս՝ նվիրված Ս.Լ. Սոբոլևի անվան մաթեմատիկայի ինստիտուտի 60-ամյակին, Նովոսիբիրսկ, 2017,
- Միջազգային կոնֆերանս «KROMSH-2014», XXV Ղրիմի աշնանային մաթեմատիկական դպրոց-սիմպոզիում սպեկտրալ և էվոլյուցիոն խնդիրների վերաբերյալ, Ղրիմ, 2014,

- «Թվերի տեսության ժամանակակից խնդիրներ» սեմինարում՝ Ս.Վ. Կոնյագինի, Մ.Ա. Կորոլյովի և Ի.Դ Շկրեդովի ղեկավարությամբ, Ռուսաստանի Դաշնության Վ.Ա. Ստեկլովկայի անվան Մաթեմատիկական ինստիտուտ, Մոսկվա, 2012 թ.,
- «Դիսկրետ մաթեմատիկա և մաթեմատիկական կիբեռնետիկա» սեմինարում՝ Վ.Բ. Ալեքսեևի, Ա.Ա. Սապոժենկոյի և Ս.Ա. Լոժկինի ղեկավարությամբ, ՄՊՀ Հաշվողական մաթեմատիկայի և կիբեռնետիկայի ֆակուլտետի մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի ամբիոն, Մոսկվա, 2012 թ.,
- «Դիսկրետ մաթեմատիկա և մաթեմատիկական կիբեռնետիկա» սեմինարում՝ Վ.Բ. Ալեքսեևի, Ա.Ա. Սապոժենկոյի և Ս.Ա. Լոժկինի ղեկավարությամբ, ՄՊՀ ՄՊՀ Հաշվողական մաթեմատիկայի և կիբեռնետիկայի ֆակուլտետի ֆակուլտետի մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի ամբիոն, Մոսկվա, 2012 թ.,
- ուսանողների, ասպիրանտների և երիտասարդ գիտնականների «Լոմոնոսով-2011», «Լոմոնոսով-2012» ամենամյա միջազգային գիտաժողովներում, Մոսկվա, 2011, 2012 թթ.,
- «Դիսկրետ մաթեմատիկա և նրա կիրառությունները» XI միջազգային գիտական սեմինարում, Մոսկվա, ՄՊՀ ՄՊՀ Հաշվողական մաթեմատիկայի և կիբեռնետիկայի ֆակուլտետ, 2012 թ.,
- «Դիսկրետ վերլուծություն» սեմինարում՝ Ա.Ա. Սապոժենկոյի, Տ.Վ. Անդրեևայի և Ա.Բ. Դայնյակի ղեկավարությամբ, ՄՊՀ ՄՊՀ Հաշվողական մաթեմատիկայի և կիբեռնետիկայի ֆակուլտետի ֆակուլտետի մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի ամբիոն, Մոսկվա, 2009–2012 թթ.

Հրապարակումներ

Ատենախոսության թեմայով հրատարակված է 33 գիտական աշխատանք, որից 16-ը Scopus և Web of Science շտեմարաններում ընդգրկված գիտական հրատարակություններում: Աշխատանքները թվարկված են սեղմագրի վերջում:

Աշխատանքի կառուցվածք և ծավալ

Ատենախոսությունը կազմված է ներածությունից, մեթոդաբանությունից, հինգ գլուխներից, կիրառությունից, եզրակացությունից, հավելվածից, օգտագործված գրականության ցանկից: Ատենախոսությունը շարադրված է 205 էջում, ներառյալ 109 անուն օգտագործված գրականության ցանկը:

Աշխատանքի բովանդակությունը

Ներածությունը սկսվում է թեմայի արդիականության մեկնաբանմամբ, ներկայացվում են աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները, բնութագրվում է հետազոտման առարկան և ստացված արդյունքների նորությունը: Մեթոդաբանությունում նկարագրվում է մշակված մեթոդները:

Դիցուք G բազմություն է, որի վրա սահմանված է գումարման գործողություն, իսկ k և l ոչ բացասական ամբողջ թվեր, որոնք բավարարում են $k+l \geq 3$ պայմանին: Դիցուք $A_1, \ldots, A_{k+l}$-ը G-ի ենթաբազմություններ են: $(A_1, \ldots, A_{k+l})$ հավաքածուն կոչվում է (k,l)-գումարից ազատ ((k,l)-ԳԱՀ), եթե գոյություն չունի հավաքածու

$$(a_1, \ldots, a_{k+l}) \in A_1 \times \ldots \times A_{k+l},$$

որը հանդիսանում է $x_1 + \ldots + x_k = x_{k+1} + \ldots + x_{k+l}$, հավասարման լուծում: Բոլոր (k,l)-ԳԱՀ-երի ընտանիքը G-ում նշանակենք $SFC_{k,l}(G)$: Սահմանենք

$$\varrho_{k,l}(G) = \max_{(A_1, \ldots, A_{k+l}) \in SFC_{k,l}(G)} |A_1| + \ldots + |A_{k+l}|.$$

Աշխատանքի առաջին գլուխը նվիրված է $(k,0)$-ԳԱՀ-երի քանակի որոշմանը, Աբելյան խմբերում, և (k,l)-ԳԱՀ-երի քանակի որոշմանը, բնական թվերի $[1,n]$ հատվածում: 1.1 և 1.2 պարբերություններում տրվում են սահմանումներ և ապացուցվում են որոշակի օժանդակ պնդումներ: 1.3 պարբերությունում ապացուցվում է լեմմա 1.5, որը հանդիսանում է գրանուլների ընդհանրացված մեթոդը և հիմնական գործիքը լոգարիթմի ասիմպտոտիկան ստանալու համար:

Առաջին գլխի հիմնական արդյունքներն են հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ (պար. 1.4, թեորեմ 1.5): *Դիցուք G-ն n կարգի Աբելյան խումբ է, իսկ $k \geq 3$ բնական թիվ: Ապա $n \to \infty$ դեպքում տեղի ունի հավասարությունը*

$$\log|SFC_{k,0}(G)| = \varrho_{k,0}(G) + \bar{o}(n):$$

Թեորեմ (պար. 1.5, թեորեմ 1.7): *Դիցուք k և l ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, որոնք բավարարում են $k+l \geq 3$ պայմանին: Ապա $n \to \infty$ դեպքում տեղի ունի հավասարությունը*

$$\log|SFC_{k,l}([1,n])| = \varrho_{k,l}([1,n]) + \bar{o}(n):$$

$(A_1, \ldots, A_k) \in SFC_{k,0}(G)$ հավաքածուն անվանենք առավելագույն ըստ հզորության, եթե այն առավելագույն է ըստ $\varrho_{k,0}(G)$ գումարի, և առավելագույն ըստ ներառման, եթե կամայական $i \in \{1, \ldots, k\}$ և $x \in G \setminus A_i$ համար

$$(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i \cup \{x\}, A_{i+1}, \ldots, A_k) \notin SFC_{k,0}(G):$$

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է $\varrho_{k,0}(G)$ առավելագույն արժեքի գնահատմանը, և առավելագույն ըստ հզորության (ըստ ներառման) k-գումարից ազատ բազմության կառուցվածքի նկարագրմանը կամայական ցիկլիկ խմբում: 2.1 պարբերությունում տրվում են սահմանումներ և ապացուցվում են որոշակի օժանդակ պնդումներ: Որոշվել է $\varrho_{k,0}(\mathbb{Z}_d)$-ի առավելագույն արժեքը ցիկլիկ $\mathbb{Z}_d$ խմբի համար:

Թեորեմ (պար. 2.2, թեորեմ 2.2): *Կամայական p պարզ թվի համար տեղի ունի հավասարությունը*

$$\varrho_{k,0}(\mathbb{Z}_p) = p + k - 2:$$

Թեորեմ (պար. 2.3, թեորեմ 2.5): *Կամայական n համար տեղի ունի*

$$\varrho_{k,0}(\mathbb{Z}_n) = n + \frac{n}{p}(k-2),$$

որտեղ p-ն n-ի ամենափոքր բաժանարարն է:

Ստացվել են վերին և ստորին գնահատականներ $\varrho_{k,0}(G)$-ի համար, որտեղ G կամայական Աբելյան խումբ է:

Թեորեմ (պար. 2.3, թեորեմ 2.4): *Դիցուք G-ն n կարգի և ν էքսպոնենտով Աբելյան խումբ է: Ապա*

$$n + \frac{n}{p_1}(k-2) = \max_{d|\nu}\left(\frac{n}{d}(d+k-2)\right) \le \varrho_{k,0}(G) \le$$

$$\le \max_{d|n}\left(\frac{n}{d}(d+k-2)\right) = n + \frac{n}{p_2}(k-2),$$

որտեղ p_1-ը ν-ի ամենափոքր պարզ բաժանարարն է, իսկ p_2-ը n-ի ամենափոքր պարզ բաժանարարն է:

Նկարագրվել է առավելագույն ըստ հզորության k-գումարից ազատ հավաքածուի կառուցվածքը կամայական ցիկլիկ խմբում:

Թեորեմ (պար. 2.4, թեորեմ 10): *Դիցուք* $k \geq 2$, *և* $\mathbb{Z}_p$ *պարզ կարգի ցիկլիկ խումբ է, իսկ* $(A_1, \ldots, A_k)$ *առավելագույն ըստ հզորության* k-*գումարից ազատ հավաքածու է* $\mathbb{Z}_p$ *խմբում: Ապա հավաքածուի յուրաքանչյուր բազմություն, իզոմորֆիզմի ճշգրտությամբ, հանդիսանում է հետևյալներից մեկը՝*

i. $|A_i| = 1$;

ii. $A_i = \overline{-(A_1 + \ldots + A_{i-1} + A_{i+1} + \ldots + A_k)}$;

iii. A_i-*ին* 1 *տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է;*

որտեղ $i = 1, \ldots, k$:

Թեորեմ (պար. 2.4, թեորեմ 11): *Դիցուք* $k \geq 2$, *իսկ* p-*ն* n *բնական թվի ամենափոքր պարզ բաժանարարն է, և* H-*ը* n/p *կարգի* $\mathbb{Z}_n$ *խմբի ենթախումբ է, և* $(A_1, \ldots, A_k)$ *առավելագույն ըստ հզորության* k-*գումարից ազատ հավաքածու է* $\mathbb{Z}_n$ *խմբում: Ապա հավաքածուի յուրաքանչյուր բազմություն, իզոմորֆիզմի ճշգրտությամբ, հանդիսանում է հետևյալներից մեկը՝*

i. $|A_i| = n/p$, *այսինքն,* A_i-*ն* H *ենթախմբի հարակից դաս է;*

ii. A_i-*ն* H *ենթախմբի հարակից դասերի միավորում է այնպիսի, որ հարակից դասերի ներկայացուցիչների բազմության (որպես* $\mathbb{Z}_p$ *ցիկլիկ խմբի ենթախումբ) համար տեղի ունի*

$$A_i/H = \overline{-(A_1/H + \ldots + A_{i-1}/H + A_{i+1}/H + \ldots + A_k/H)};$$

iii. A_i-*ն* H *ենթախմբի հարակից դասերի միավորում է այնպիսի, որ հարակից դասերի ներկայացուցիչների բազմությունը, որպես* $\mathbb{Z}_p$ *ցիկլիկ խմբի ենթախումբ, հանդիսանում է* 1 *տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա;*

որտեղ $i = 1, \ldots, k$:

Դիցուք $A_1, \ldots, A_k$-ն G Աբելյան խմբի ոչ դատարկ ենթաբազմություններ են: $\mathbb{Z}_n$ խմբում k-գումարից ազատ հավաքածուների այն ընտանիքը, որը կազմված է նույն տարբերությունը ունեցող թվաբանական պրոգրեսիաներից, նշանակենք $P_k(\mathbb{Z}_n)$: Վերցնենք

$$\alpha_k(\mathbb{Z}_n) = \max_{(A_1, \ldots, A_k) \in P_k(\mathbb{Z}_n)} (|A_1| + \ldots + |A_k|):$$

Ստացվել է $\alpha_k(\mathbb{Z}_d)$-ի հետևյալ գնահատականը:

Լեմմա (պար. 2.4, լեմմա 2.13): *Դիցուք $k \geq 2$ բնական թիվ է: Ապա կամայական n համար տեղի ունի*

$$\max_{d|n}\left(\frac{n}{d}\alpha_k(\mathbb{Z}_d)\right) = n + \frac{n}{p}(k-2),$$

որտեղ p-ն n-ի ամենափոքր պարզ բաժանարարն է:

Նկարագրվել է նաև առավելագույն ըստ ներառման k-գումարից ազատ հավաքածուի կառուցվածքը Աբելյան խմբում:

Լեմմա (պար. 2.6, լեմմա 2.16): *Եթե G Աբելյան խմբում գոյություն ունի առավելագույն ըստ ներառման k-գումարից ազատ հավաքածու k հզորությամբ, ապա G խումբը ցիկլիկ է:*

Դիցուք H-ը G խմբի ենթախումբ է, իսկ $\psi_{G,G/H}: G \to G/H$ կանոնական հոմոմորֆիզմ է: Այդ դեպքում $A \subseteq G$ ցանկացած ենթաբազմության համար A/H-ով նշանակենք G/H ֆակտոր–խմբի $\psi_{G,G/H}(A)$ ենթաբազմությունը: Առավելագույն ըստ ներառման k-ԳԱՀ-երի ընտանիքը G-ում նշանակենք $SFCM_k(G)$:

Լեմմա (պար. 2.6, լեմմա 2.17): *Դիցուք $(A_1, \dots, A_k)$-ն առավելագույն ըստ ներառման k-գումարից ազատ հավաքածու է G Աբելյան խմբում, իսկ $H = H(A_1 + \dots + A_k)$-ը $A_1 + \dots + A_k$ բազմության ստաբիլիզատորն է: Ապա տեղ ունեն հետևյալ պնդումները*

i. $(A_1 + H) + \dots + (A_k + H) = A_1 + \dots + A_k$;

ii. $(A_1 + H, \dots, A_k + H) \in SFCM_k(G)$;

iii. $(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i + H, A_{i+1}, \dots, A_k) \in SFCM_k(G)$, *բոլոր* $i = 1, \dots, k$ *համար;*

iv. $A_i + H = A_i$, *որտեղ* $i = 1, \dots, k$;

v. $H(A_i) = H$, *որտեղ* $H(A_i)$*-ը* A_i *բազմության ստաբիլիզատորն է,* $i = 1, \dots, k$;

vi. A_i*-ն հանդիսանում է* H *ենթախմբի որոշակի հարակից դասերի միավորում;*

vii. $(A_1/H, \dots, A_k/H) \in SFCM_k(G/H)$:

Թեորեմ (պար. 2.6, Թեորեմ 2.14)*: Դիցուք G-ն n կարգի Աբելյան խումբ է, իսկ $(A_1,\ldots,A_k)$ առավելագույն ըստ ներառման k-գումարից ազատ հավաքածու է G խմբում: Դիցուք գոյություն չունի $(a_1,\ldots,a_k) \in A_1 \times\ldots\times A_k$ հավաքածու այնպիսի, որ*

$$(A_1-a_1)+\ldots+(A_k-a_k)$$

բազմությունը ծնում է G խումբը, և դիցուք տեղի ունի անհավասարությունը

$$|A_1|+\ldots+|A_k| > n/2+(k-2)n/p,$$

որտեղ p-ն n-ի ամենափոքր պարզ բաժանարարն է: Ապա գոյություն ունի G խմբի այնպիսի H ենթախումբ, որ

i. $A_i+H=A_i$, *որտեղ* $i=1,\ldots,k$;

ii. G/H-*ը ցիկլիկ խումբ է;*

iii. $(A_1/H,\ldots,A_k/H)$-*ը առավելագույն ըստ ներառման* k-*գումարից ազատ հավաքածու է* G/H *ֆակտոր-խմբում:*

Դիցուք G-ն բազմություն է, որի վրա սահմանված է գումարման գործողություն, իսկ k և l ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, որոնք բավարարում են $k+l \geq 3$ պայմանին:

$A \subseteq G$ ենթաբազմությունը կոչվում է (k,l)-գումարից ազատ ((k,l)-ԳԱԲ), եթե հավասարումը

$$x_1+\ldots+x_k = x_{k+1}+\ldots+x_{k+l} \tag{1}$$

չունի լուծում A բազմությունում: Բոլոր (k,l)-ԳԱԲ-երի ընտանիքը G-ում նշանակենք $SFS_{k,l}(G)$: Սահմանենք

$$\lambda_{k,l}(G) = \max_{A\in SFS_{k,l}(G)} |A|:$$

Աշխատանքի երրորդ գլուխը նվիրված է (k,l)-ԳԱԲ-երի քանակի գնահատմանը, ինչպես նաև վերջավոր Աբելյան խմբերում (k,l)-ԳԱԲ-երի առավելագույն հզորության որոշմանը, և առավելագույն (k,l)-ԳԱԲ-երի կառուցվածքի նկարագրմանը: 3.2 պարբերությունում ապացուցվում է լեմման 3.1, որը հանդիսանում է հիմնական գործիքը լոգարիթմի ասիմպտոտիկան ստանալու համար: 3.3 և 3.4 պարբերություններում ստացվել են (k,l)-ԳԱԲ-երի քանակի լոգարիթմի ասիմպտոտիկան համապատասխանաբար Աբելյան խմբում և բնական թվերի սկզբնական հատվածում: Մասնավորապես, ապացուցվել են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ (պար. 3.3, թեորեմ 3.2): *Դիցուք G-ն n կարգի Աբելյան խումբ է, իսկ k և l ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, որոնք բավարարում են $k+l\geq 3$ պայմանին: Ապա $n\to\infty$ դեպքում տեղի ունի հավասարությունը*

$$\log\left|SFS_{k,l}(G)\right| = \lambda_{k,l}(G) + \bar{o}(n):$$

Թեորեմ (պար. 3.4, թեորեմ 3.4): *Դիցուք k և l ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, որոնք բավարարում են $k+l\geq 3$ պայմանին: Ապա $n\to\infty$ դեպքում տեղի ունի հավասարությունը*

$$\log\left|SFS_{k,l}([1,n])\right| = \lambda_{k,l}([1,n]) + \bar{o}(n):$$

Այս արդյունքը (թեորեմ 3.4), իրարից անկախ, ստացել է նաև Բ. Գրինը [54] աշխատանքում: 3.5–3.8 պարբերություններում ուսումնասիրվել են Աբելյան խմբերում (k,l)-ԳԱԲ-երի առավելագույն հզորության և առավելագույն (k,l)-ԳԱԲ-երի կառուցվածքի խնդիրները: $\mu_{k,l}(d)$-ով նշանակենք $[1,\gcd(d,k-l)]$ միջակայքի ամենափոքր ամբողջ թիվը, որի համար գոյություն ունի $h\in\mathbb{Z}_d\backslash\{0\}$ թիվ այնպիսի, որ տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները

$$1+l\left\lceil\frac{d-1-\mu_{k,l}(d)}{k+l}\right\rceil \leq (k-l)h \leq d-1-k\left\lceil\frac{d-1-\mu_{k,l}(d)}{k+l}\right\rceil:$$

Թեորեմ (պար. 3.5.2, թեորեմ 3.9): *Դիցուք k և l դրական ամբողջ թվեր են: Ապա կամայական n համար տեղի ունի*

$$\lambda_{k,l}(\mathbb{Z}_n) = \max_{d|n}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-\mu_{k,l}(d)}{k+l}\right\rfloor+1\right)\frac{n}{d}\right\}:$$

Թեորեմ (պար. 3.5.3, թեորեմ 3.12, պար. 3.7.3, թեորեմ 3.25): *Դիցուք G-ն n կարգի և ν էքսպոնենտով Աբելյան խումբ է, իսկ k և l ոչ բացասական ամբողջ թվեր այնպիսի, որ $k+l\geq 3$, և հավասար չեն ըստ մոդուլ ν: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները*

$$\max_{d|\nu}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-\mu_{k,l}(d)}{k+l}\right\rfloor+1\right)\frac{n}{d}\right\} \leq \lambda_{k,l}(G) \leq \max_{d|n}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-2}{k+l}\right\rfloor+1\right)\frac{n}{d}\right\}:$$

$A \in SFS_{k,l}(G)$ բազմությունը կանվանենք *առավելագույն*, եթե կամայական $x \in G \setminus A$ համար $A \cup \{x\} \notin SFS_{k,l}(G)$: $SFS_{k,l}(G)$-ի բոլոր առավելագույն բազմությունների ընտանիքը նշանակենք $SFM_{k,l}(G)$: 3.6 և 3.8 բաժիններում ստացվել է $A \in SFM_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$ բազմության կառուցվածքի ճշգրիտ նկարագրությունը՝ թվաբանական պրոգրեսիաների և հարակից դասերի տերմիններով, ունենալով սահմանափակում $A \in SFM_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$ բազմության հզորության վրա՝

$$|A| \geq \frac{n+1-\varepsilon(n)}{k+l}$$

և $\gcd(n, k-l) = 1$, որտեղ

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 0, \text{եթե } n \text{ զույգ է;} \\ 1, \text{եթե } n \text{ կենտ է:} \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_n$ ցիկլիկ խմբում (k,l)-գումարից ազատ թվաբանական պրոգրեսիաների ընտանիքը նշանակենք $PF_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$: $A \in PF_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$ թվաբանական պրոգրեսիան կոչվում է առավելագույն, եթե կամայական $x \in \mathbb{Z}_n \setminus A$ համար $A \cup \{x\} \notin PF_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$: $PF_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$-ի բոլոր առավելագույն թվաբանական պրոգրեսիաների ընտանիքը նշանակենք $PFM_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$: $PF_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$-ի բոլոր թվաբանական պրոգրեսիաների ընտանիքը $\mathbb{Z}_n$-ում, որոնք ընկած են $\mathbb{Z}_n$-ի կամայական ոչ տրիվիալ ենթախմբի որևէ հարակից դասում, կնշանակենք $PFN_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$: Վերցնենք $PFP_{k,l}(\mathbb{Z}_n) = PF_{k,l}(\mathbb{Z}_n) \setminus PFN_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$, և

$$\gamma_{k,l}(\mathbb{Z}_n) = \max_{A \in PFP_{k,l}(\mathbb{Z}_n)} |A|,$$

և $PFPE_{k,l}(\mathbb{Z}_n) = \{A \in PFP_{k,l}(\mathbb{Z}_n) \mid |A| = \gamma_{k,l}(\mathbb{Z}_n)\}$: 3.6 և 3.8 բաժինների հիմնական արդյունքն է հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ (պար. 3.6, թեորեմ 3.20, պար. 3.8, թեորեմ 3.28): *Դիցուք k և l ոչ բացասական ամբողջ թվեր են այնպիսի, որ $k+l \geq 3$, իսկ $\gcd(n, k-l) = 1$: Ապա յուրաքանչյուր $A \in SFM_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$ բազմություն, որի համար տեղի ունի անհավասարությունը*

$$(k+l)|A| \geq n+1-\varepsilon(n),$$

հանդիսանում է հետևյալ բազմություններից մեկը՝

եթե n-ը զույգ է, ապա

i. *H ենթախմբի $d-1$ ոչ տրիվիալ հարակից դասերից մեկը, որտեղ H-ը $\mathbb{Z}_n$ խմբի կամայական ենթախումբ է և $|H|=n/d$, որտեղ d-ն n-ի բաժանարար է և $2 \leq d \leq k+l-1$;*

ii. *$\Phi^{-1}{}_{\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_n/H}(C)$ բազմությունն է, որտեղ H-ը $\mathbb{Z}_n$ խմբի կամայական ենթախումբ է այնպիսի, որ $|\mathbb{Z}_n/H| \equiv r \left(mod\ (k+l)\right)$, $r \in \{2, \ldots, k+l-1\}$, $|\mathbb{Z}_n/H| \geq k+l+2$, և C-ն $PFPE_{k,l}(\mathbb{Z}_n/H)$ բազմության կամայական տարր է;*

եթե n-ը կենտ է, ապա

iii. *H ենթախմբի $d-1$ ոչ տրիվիալ հարակից դասերից մեկը, որտեղ H-ը $\mathbb{Z}_n$ խմբի կամայական ենթախումբ է և $|H|=n/d$, որտեղ d-ն n-ի բաժանարար է և $3 \leq d \leq k+l$;*

iv. *$\Phi^{-1}{}_{\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_n/H}(C)$ բազմությունն է, որտեղ H-ը $\mathbb{Z}_n$ խմբի կամայական ենթախումբ է այնպիսի, որ $|\mathbb{Z}_n/H| \neq 1 \left(mod\ (k+l)\right)$, $|\mathbb{Z}_n/H| \geq k+l+2$, և C-ն $PFPE_{k,l}(\mathbb{Z}_n/H)$ բազմության կամայական տարր է;*

որտեղ $\Phi_{\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_n/H}: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n/H$ կանոնավոր հոմոմորֆիզմ է:

$l=0$ դեպքում գոյություն ունեն միայն երկու դեպք՝ (i) և (ii):

Այժմ առանձին դիտարկենք $l=0$ դեպքը: Դիցուք G-ն Աբելյան խումբ է, իսկ $k \geq 3$ ամբողջ թիվ: $A \in SFS_{k,0}(G)$ ենթաբազմությունը կանվանենք k-զրոյից ազատ: k-զրոյից ազատ բոլոր բազմությունների ընտանիքը G խմբում կնշանակենք $ZFS_k(G)$-ով: $A \in ZFS_k(G)$ բազմությունը կոչվում է առավելագույն (ըստ ներառման), եթե յուրաքանչյուր $x \in G \backslash A$ տարրի համար $A \cup \{x\} \notin ZFS_k(G)$: Սահմանենք

$$\lambda_k(G) = \max_{A \in ZFS_k(G)} |A|:$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները. $ZFS_k(G)$-ի բոլոր առավելագույն բազմությունների ընտանիքը կնշանակենք $ZFM_k(G)$-ով, իսկ $ZFS_k(G)$-ի այն բոլոր բազմությունների ընտանիքը, որոնց համար $A \in ZFS_k(G)$, $|A| = \lambda_k(G)$, կնշանակենք $ZFE_k(G)$-ով:

3.7 պարբերության հիմնական արդյունքներն են՝

Լեմմա (պար. 3.7.1, լեմմա 3.10): *Լեմմա 3.10: Դիցուք $k \geq 3$ բնական թիվ է, G Աբելյան խումբ է, և $A \in ZFM_k(G)$: Ապա տեղ ունեն հետևյալ պնդումները* *i.* $k(A+H(kA))=kA;$

ii. $A+H(kA)\in ZFM_k(G);$

iii. $A+H(kA)=A;$

iv. $H(A)=H(kA);$

v. A*-ն հանդիսանում է* $H(kA)$ *ենթախմբի որոշակի հարակից դասերի միավորում;*

vi. $A/H(kA)\in ZFM_k(G/H(kA))$:

Լեմմա (պար. 3.7.1, լեմմա 3.11): *Դիցուք* $k\geq 3$ *բնական թիվ է, իսկ* G*-ն Աբելյան խումբ է: Եթե գոյություն ունի* $A\in ZFM_k(G)$ *և* $|A|=1$, *ապա* G*-ն ցիկլիկ խումբ է:*

Թեորեմ (պար. 3.7.1, Թեորեմ 3.21): *Դիցուք* $k\geq 3$ *բնական թիվ է,* G*-ն Աբելյան խումբ է, և* $A\in ZFM_k(G)$*: Եթե* $k|A|\geq|G|+1$, *ապա գոյություն ունի* G *խմբի* H *ենթախումբ, որ*

i. $A+H=A;$

ii. $A/H\in ZFM_k(G/H);$

iii. A/H*-ն թվաբանական պրոգրեսիա է;*

iv. G/H*-ը ցիկլիկ խումբ է:*

Նշանակենք $\mathbb{Z}_n$ խմբում k-զրոյից ազատ թվաբանական պրոգրեսիաների ընտանիքը $P_k(\mathbb{Z}_n)$-ով: Սահմանենք

$$\alpha_k(\mathbb{Z}_n)=\max_{A\in P_k(\mathbb{Z}_n)}|A|:$$

Թեորեմ (պար. 3.7.2, Թեորեմ 3.22): *Դիցուք* $k\geq 3$ *բնական թիվ է: Կամայական* n *համար տեղի ունի*

$$\alpha_k(\mathbb{Z}_n)=max\left(\frac{n}{r},\left\lfloor\frac{n-1-x}{k}\right\rfloor+1\right),$$

որտեղ r*-ը* n*-ի այնպիսի բաժանարար է, որ* k*-ն չի բաժանվում* r*-ի, իսկ* x*-ը* $[1,\delta(n)]$ *միջակայքի ամենափոքր թիվն է, որի համար գոյություն ունի այնպիսի* $a(x)\in\mathbb{Z}_n\backslash\{0\}$ *թիվ, որ տեղի ունեն անհավասարությունները*

$$1\leq ka(x)\leq n-1-k\left\lfloor\frac{n-1-x}{k}\right\rfloor:$$

Թեորեմ (պար. 3.7.2, Թեորեմ 3.24): *Դիցուք $k \geq 3$ բնական թիվ է, G-ն n կարգի և v էքսպոնենտով Աբելյան խումբ է: Ապա տեղի ունեն անհավասարությունները*

$$\max_{d|v}\left\{\alpha_k(\mathbb{Z}_d)\frac{n}{d}\right\} \leq \lambda_k(G) \leq max\left(\frac{n}{k}, \max_{d|v}\left\{\alpha_k(\mathbb{Z}_d)\frac{n}{d}\right\}\right):$$

Հետևանք (պար. 3.7.2, Հետևանք 3.1): *Դիցուք $k \geq 3$ բնական թիվ է, և $\delta(n) = 1$: Ապա տեղի ունի հավասարությունը*

$$\lambda_k(\mathbb{Z}_n) = \max_{d|n}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-2}{k}\right\rfloor + 1\right)\frac{n}{d}\right\}:$$

Թեորեմ (պար. 3.7.2, Թեորեմ 3.26): *Դիցուք $k \geq 3$ բնական թիվ է, G-ն n կարգի և v էքսպոնենտով Աբելյան խումբ է: Եթե v էքսպոնենտը ունի d_0 բաժանարար այնպիսին, որ $d_0 \notin \{1, \ldots, x(d_0)\}\ (mod\ k)$, ապա տեղի ունի հավասարությունը*

$$\lambda_k(G) = \max_{d|v}\left\{\alpha_k(\mathbb{Z}_d)\frac{n}{d}\right\} = \max_{d|v}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-x(d)}{k}\right\rfloor + 1\right)\frac{n}{d}\right\},$$

որտեղ $x(d)$-ը $[1, \delta(d)]$ միջակայքի ամենափոքր թիվն է, որի համար գոյություն ունի այնպիսի $a(x) \in \mathbb{Z}_d \backslash \{0\}$ թիվ, որ տեղի ունեն անհավասարությունները

$$1 \leq ka(x) \leq d - 1 - k\left\lfloor\frac{d-1-x(d)}{k}\right\rfloor:$$

Դիցուք k և l ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, որոնց գումարը գերազանցում է 1: G Աբելյան խմբի A ենթաբազմությունը կոչվում է (k,l)-գումար, եթե գոյություն ունի $B \subseteq G$ ենթաբազմություն այնպիսի, որ

$$A = \underbrace{B + \ldots + B}_{k} - \underbrace{B - \ldots - B}_{l}:$$

(k,l)-գումարների ընտանիքը G-ում նշանակենք $SSS_{k,l}(G)$:

Աշխատանքի չորրորդ գլուխը նվիրված է (k,k)-գումարների և $(2k,0)$-գումարների քանակի վերին և ստորին գնահատականների ստացմանը Աբելյան խմբերում: 4.2 պարբերությունում ապացուցվում են (k,k)-գումարների և $(k,0)$-գումարների քանակի ստորին գնահատականները Աբելյան խմբերում: 4.3 պարբերությունում բարելավվում է (2,0)-գումարների քանակի ստորին գնահատականը Աբելյան խմբերում: 4.4 պարբերությունում ապացուցվում է լեմման 4.6 և 4.7, որոնք հանդիսանում են հիմնական գործիքը վերին գնահատականները ստանալու համար: 4.5

պարբերությունում ապացուցվում են (k,k)-գումարների և $(2k,0)$-գումարների քանակի վերին գնահատականները Աբելյան խմբերում: Մասնավորապես, ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները: Նշանակենք $D(G)$-ով G խմբի ամենամեծ սեփական ենթախմբի կարգը:

Թեորեմ (պար. 4.1, թեորեմ 4.1): *Դիցուք k դրական ամբողջ թիվ է, G-ն n կարգի և ν էքսպոնենտով Աբելյան խումբ է, և $\nu > 24k-7$: Ապա գոյություն ունի դրական հաստատուն $c = c(k)$ այնպիսի, որ կամայական $\nu > 24k-7$ և $n \to \infty$ դեպքում տեղի ունեն անհավասարությունները՝*

$$c2^{\nu/(6k-2)} \leq \left|SSS_{k,k}(G)\right| \leq 2^{n/3+D(G)/3+\bar{o}(n)}:$$

Թեորեմ (պար. 4.1, թեորեմ 4.2): *Դիցուք $k \geq 2$ դրական ամբողջ թիվ է, իսկ G-ն n կարգի և ν էքսպոնենտով Աբելյան խումբ է, և $\nu > 4k-3$: Ապա գոյություն ունի դրական հաստատուն $c = c(k)$ այնպիսի, որ կամայական $\nu > 4k-3$ և $n \to \infty$ դեպքում տեղի ունի անհավասարությունները*

$$\left|SSS_{2k,0}(G)\right| \leq 2^{n/3+D(G)/3+\bar{o}(n)},$$

և

$$c2^{\nu/(2k-1)} \leq \left|SSS_{k,0}(G)\right|:$$

Նշանակենք $\varphi(n)$-ով Էյլերի ֆունկցիան:

Թեորեմ (պար. 4.1, թեորեմ 4.3): *Դիցուք G-ն n կարգի և ν էքսպոնենտով Աբելյան խումբ է: Ապա $n,\nu \to \infty$ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ գնահատականները՝*

$$\nu\varphi(\nu)2^{\nu/3} \leq \left|SSS_{2,0}(G)\right| \leq 2^{n/3+D(G)/3+\bar{o}(n)}:$$

Դիցուք G-ն n կարգի Աբելյան խումբ է, իսկ $k \geq 2$ բնական թիվ է:

G Աբելյան խմբի $A_1,\ldots,A_k$ ենթաբազմությունների գումարը կսահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$A_1+\ldots+A_k = \{\, a_1+\ldots+a_k \mid a_1 \in A_1,\ldots,a_k \in A_k \,\}:$$

Բազմությունը, որը ներկայացվում է G Աբելյան խմբի k ենթաբազմությունների գումար տեսքով, կանվանենք k-գումար:

Սահմանում: *Դիցուք G-ն n կարգի և ν էքսպոնենտով Աբելյան խումբ է, իսկ $k \geq 2$ բնական թիվ, $A_1,\ldots,A_k$-ը G խմբի ոչ դատարկ ենթաբազմություններ են: Կասենք, որ*

$(A_1,\ldots,A_k)$ հավաքածուն բավարարում է α պայմանին, եթե գոյություն ունի A_i այնպիսի, որ $|A_i| \geq \alpha$, և

$$|A_1 + \ldots + A_{i-1} + A_{i+1} + \ldots + A_k| \geq \alpha,$$

որտեղ $i \in \{1,\ldots,k\}$:

Տարբեր $A_1 + \ldots + A_k$ ենթաբազմությունների ընտանիքը, ծնված $(A_1,\ldots,A_k)$ հավաքածուներից, որոնք բավարարում են α պայմանին, նշանակենք $SSD_k(G,\alpha)$: Վերցնենք

$$\alpha(n) = ((\log n)^{-1/16} + (\log n)^{-1/8})n:$$

Աշխատանքի հինգերորդ գլուխը նվիրված է k-գումարների քանակի վերին և ստորին գնահատականների որոշմանը Աբելյան խմբերում: 5.2 պարբերությունում ստացվել է $|SSD_k(G,\bar{o}(v))|$ արժեքի ստորին գնահատականը: 5.3 պարբերությունում ապացուցվում է լեմմա 5.2, որը հանդիսանում է հիմնական գործիքը վերին գնահատականը ստանալու համար: 5.4 պարբերությունում ստացվում է $|SSD_k(G,\alpha(n))|$ արժեքի վերին գնահատականը: Հիմնական արդյունքը ներկայացված է հետևյալ թեորեմում՝

Թեորեմ (պար. 5.1, թեորեմ 5.2): *Դիցուք G-ն n կարգի և v էքսպոնենտով Աբելյան խումբ է, իսկ $k \geq 2$ բնական թիվ է: Եթե $n, v \to \infty$, ապա տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$2^{v/2+\bar{o}(v)} \leq |SSD_k(G,\bar{o}(v))|,$$

և

$$|SSD_k(G,\alpha(n))| \leq 2^{n/2+D(G)/2+\bar{o}(n)}:$$

Թեորեմ 5.2 հանդիսանում է Ն. Ալոնի, Ա. Գրանվիլի և Ա. Ուբիսի [37] կողմից 2010 թվականին ստացված արդյունքի լավացումը, և ընդհանրացումը՝ k-ի կամայական արժեքի համար:

Աշխատանքի վեցերորդ գլուխը նվիրված է գումարից ազատ հավաքածուների կիրառություններին՝ տեսական մաթեմատիկայում և տեղեկատվական տեխնոլոգիաներում:

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները

- Մշակվել է գրանուլների ընդհանրացված մեթոդ, որը կիրառելի է գումարից ազատ բազմությունների և գումարից ազատ հավաքածուների համար՝ ընդհանրացված կամայական գծային հավասարումների համար՝ -1 և 1 գործակիցներով: Այդ մեթոդը կիրառելի է նաև ենթաբազմությունների գումարի և տարբերության տեսքով ներկայացվող բազմությունների քանակի գնահատման խնդիրներում [3-8,12,13,15,17,21-27]:
- Ստացվել են $(k,0)$-ԳԱՀ-երի և (k,l)-ԳԱՀ-երի քանակի լոգարիթմի ասիմպտոտիկան Աբելյան խմբերում և բնական թվերի սկզբնական հատվածում համապատասխանաբար: Որոշվել են (k,l)-ԳԱՀ-երի առավելագույն հզորության ճշգրիտ արժեքը ցիկլիկ խմբերում, իսկ Աբելյան խմբերի համար ստացվել են ստորին և վերևի գնահատականներ: Նկարագրվել է առավելագույն ըստ հզորության և ըստ ներառման $(k,0)$-ԳԱՀ-երի կառուցվածքը Աբելյան խմբում [22,24-29]:
- Ստացվել է (k,l)-ԳԱԲ-երի քանակի լոգարիթմի ասիմպտոտիկան Աբելյան խմբերում և բնական թվերի սկզբնական հատվածում: Որոշվել են (k,l)-ԳԱԲ-երի առավելագույն հզորության ճշգրիտ արժեքը ցիկլիկ խմբերում և Աբելյան խմբերում՝ որոշակի սահմանափակումների դեպքում: Նկարագրվել է առավելագույն ըստ հզորության և առավելագույն ըստ նեևառման (k,l)-ԳԱՀ-երի կառուցվածքը Աբելյան խմբում՝ որոշակի սահմանափակումների դեպքում [1-5,9,10,12-15]:
- Ստացվել են (k,k)-գումարների, $(2k,0)$-գումարների և $(k,0)$-գումարների քանակի վերին և ստորին գնահատականները Աբելյան խմբերում, ինչպես նաև ստացվել են k-գումարների քանակի վերին և ստորին գնահատականները Աբելյան խմբերում՝ որոշակի սահմանափակումների դեպքում [6-8,11,16-20, 21,23]:
- Գումարից ազատ սկզբունքի կիրառմամբ լուծվել է իմպուլսա-դոպլերային ռադարներում թիրախի տիպորոշման խնդիրը [31-33]:

Շնորհակալություն

Հեղինակը օգտվելով առիթից՝ իր խորին երախտագիտությունն է հայտնում իր գիտական խորհրդատուին՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ, ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր Լևոն Հակոբի Ասլանյանին և ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր Ալեքսանդր Անտոնովիչ Սապոժենկոյին (А. А. Сапоженко) աշխատանքի նկատմամբ մշտական ուշադրության, արժեքավոր դիտողությունների և օգտակար քննարկումների համար:

Ատենախոսության թեմայով հրատարակված աշխատանքները

1. Саргсян В. Г. Максимальная мощность множества, (k,l)-свободного от сумм, в циклической группе // Сборник статей молодых учёных факультета ВМК МГУ. 2011. 8. С. 123–128.
2. Саргсян В. Г. Максимальная мощность множества, (k,l)-свободного от сумм, в циклической группе // Материалы XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». 20–25 июня, Нижний Новгород. Н.Н.: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. С. 422–426.
3. Саргсян В. Г. Асимптотика логарифма числа множеств, (k,l)-свободных от сумм, в группах простого порядка // Вестник Московского Университета, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2012. 2. С. 44–51.
4. Саргсян В. Г. О числе множеств, k-свободных от нуля, в группах простого порядка // Сборник статей молодых учёных факультета ВМК МГУ. 2012. 9. С. 154–172.
5. Саргсян В. Г. О числе множеств, свободных от нуля, в группах простого порядка // Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и её приложения». Секция «Комбинаторный анализ». 18–23 июня, Москва, МГУ М. В. Ломоносова. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 266–269.
6. Саргсян В. Г. О числе k-сумм в группах простого порядка // Дискретная математика. 2012. 24(3). С. 25–38.
7. Sargsyan V. G. Counting (k,l)-sumsets in groups of a prime order // Acta Universitatis Sapientiae, Informatica. 2012. 4(1). P. 33–47.
8. Саргсян В. Г. Количество (k,l)-сумм в группах простого порядка // Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов – 2012». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». 9–13 апреля, Москва, МГУ М. В. Ломоносова. М.: МАКСПресс, 2012. С. 105.
9. Саргсян В. Г. О максимальной мощности множества, (k,l)-свободного от сумм, в абелевой группе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. 53(1). С. 154–162.
10. Саргсян В. Г. О максимальной мощности множества, k-свободного от нуля, в абелевой группе // Дискретный анализ и исследование операций. 2013. 20(3). С. 45–64.
11. Саргсян В. Г. Число разностей в группах простого порядка // Дискретная математика. 2013. 25(1). С. 152–158.

12. Саргсян В. Г. Асимптотика логарифма числа множеств, свободных от решений линейных уравнений, в абелевой группе // Материалы XVII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». 16–20 июня, Казань. Казань: Изд-во «Отечество», 2014. С. 250–252.
13. Саргсян В. Г. Асимптотика логарифма числа множеств, (k,l)-свободных от сумм, в абелевой группе // Дискретная математика. 2014. 26(4). С. 91–99.
14. Sargsyan V. G. Zero-free sets in Abelian groups // Mathematical Problems of Computer Science. 2014. 42. P. 5–16.
15. Саргсян В. Г. Асимптотика логарифма числа множеств, свободных от решений линейных уравнений, в абелевой группе // Международная конференция «КРОМШ-2014». XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Тезисы докладов. 21–30 сентября, г. Судак, Российская Федерация.– Симферополь: ТНУ, 123с. 2014. С. 109–110.
16. Саргсян В. Г. Число сумм и разностей в абелевой группе // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. 22(2). С. 73–85.
17. Саргсян В. Г. Оценки числа (k,l)-сумм в конечной абелевой группе // Дискретная математика. 2016. 28(2). С. 71–80.
18. Саргсян В. Г. Число сумм и разностей в Абелевых группах // Материалы XVIII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». 19–23 июня, Пенза. Материалы: Под редакцией Ю.И. Журавлева. – М. : МАКС Пресс, 2017. С. 220–223.
19. Саргсян В. Г. Число сумм и разностей в Абелевых группах // "Математика в современном мире". Тезисы докладов Международной конференции посвященной 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева. Новосибирск, Россия, 14–19 августа 2017. – 453с. Изд-во Института математики, пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.
20. Сапоженко А. А., Саргсян В. Г. Число сумм в Абелевых группах // Труды X Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». 23–25 мая, Москва и Подмосковье, МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: МАКСПресс, 2018. С. 237–240.
21. Сапоженко А. А., Саргсян В. Г. Число сумм в абелевой группе // Дискретная математика. 2018. 30(4). С. 96–105.
22. Сапоженко А. А., Саргсян В. Г. Асимптотика логарифма числа наборов, k-свободных от решений, в абелевых группах // Дискретная математика. 2018. 30(3). С. 117–126.
23. Сапоженко А. А., Саргсян В. Г. Число k-сумм в абелевой группе // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. 25(4). С. 97–111.

24. Сапоженко А. А., Саргсян В. Г. Асимптотика логарифма числа наборов, (k,l)-свободных от решений, в отрезке натуральных чисел // Дискретный анализ и исследование операций. 2019. 26(2). С. 129–144.
25. Sargsyan V. Asymptotics for the Logarithm of the Number of k-Solution-Free Collections in Abelian Groups // Computer Science and Information Technologies. Armenia, Yerevan, September 27 – October 1, 2021, P. 75–77.
26. Саргсян В.Г. Асимптотика логарифма числа наборов, (k,l)-свободных от решений, в отрезке натуральных чисел // Материалы XIV Международного семинара «Дискретная математика и её приложения». Секция «Комбинаторный анализ». 20–25 июня, Москва, МГУ М.В. Ломоносова. М.: ИПМ им. Келдыша, 2022. С. 166–168.
27. Sargsyan V. Asymptotics for the logarithm of the number of k-solution-free collections in Abelian groups // AIP Conference Proceedings 2757, 040006 (2023).
28. Sargsyan V. Maximal k-Sum-Free Collections in an Abelian Group // Pattern Recognition and Image Analysis, 2024. 34(1). P. 40–48.
29. Саргсян В. Г. Максимальные наборы, k-свободные от сумм, в абелевой группе // Материалы XX Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». 5-8 декабря 2024, Москва. Коллектив авторов, 2024, 2025. МАКС Пресс, 2025. С. 117-119.
30. Sargsyan V., Mkrtchyan G., Saroyan E. and Aslanyan L. Analysis of deformable and classic convolution in the classification of radio-frequency images // International Conference on Advanced Sensing and Intelligent Systems (ICASIS 2025). 2025. 13808. P. 40-57. doi: 10.1117/12.3077021
31. Sargsyan V., Mkrtchyan G., Saroyan E., Aslanyan L. Analysis of Convolutional Networks in The Classification of Radio-Frequency Images // Pattern Recognition and Image Analysis. 2025. 35(4). P. 917-928. doi: 10.1134/S1054661825700737
32. Sargsyan V., Mkrtchyan G., Saroyan E., Aslanyan L. Analysis of Deformable Convolutional Networks in the Classification of Radio-Frequency Images // Pattern Recognition and Image Analysis. 2025. 35(4). P. 929-939. doi: 10.1134/S1054661825700749
33. Sargsyan V., Mkrtchyan G., Saroyan E., Aslanyan L. Perturbation-Based Analysis of the R(2+1)D Network and a Deformable Extension for Radar-Frequency Image Classification // Pattern Recognition and Image Analysis. 2026. 36(1). P. 90-109. doi: 10.1134/S1054661825701330

Ваге Г. Саргсян

Наборы, свободные от линейных соотношений, в области дискретного моделирования

РЕЗЮМЕ

Диссертация посвящена изучению алгебраических структур с определенными ограничениями. В частности, были исследованы множества и наборы множеств, не содержащие решений линейных уравнений с коэффициентами 1 и -1. Такие множества и наборы мы будем называть **свободные от сумм**. В работе математически обосновывается, что множество, свободное от сумм, не может быть случайным (все последующие утверждения верны также для наборов, свободных от сумм). Показано, что старший член преобразования Фурье характеристической функции множества, свободного от сумм, представляет собой достаточно большое число. А если бы множество, свободное от сумм, было случайным, то ненулевые коэффициенты Фурье его характеристической функции были бы очень малы и не смогли бы «обнулить» старший член. Следовательно, множество, свободное от сумм, обязательно имеет ненулевые большие коэффициенты Фурье, что означает, что оно обладает строго определенной периодической структурой. Что это за структуры: Множество Бора — одно из основных понятий аддитивной комбинаторики, которое выступает в качестве «обобщенной» версии подгруппы. Без множеств Бора нам пришлось бы работать только с подгруппами. Но поскольку подгруппы существуют не всегда, множества Бора заменяют подгруппы. Они позволяют нам сказать: «Это множество, свободное от сумм, подобно арифметической прогрессии», где эта прогрессия — простейшее множество Бора. Множества Бора позволяют нам выполнять почти те же вычисления, что и с подгруппами, но с большей гибкостью. Там, где есть подгруппы, оно может совпадать с ними, а там, где их нет, оно создает «подобную подгруппе» структуру. Применяя «грануляцию» к множеству, свободному от сумм, мы делим всю группу на смежные классы определенных множеств Бора. Эти смежные классы — наши гранулы. Грануляция гарантирует, что любое достаточно большое множество, свободное от сумм, каждый из смежных классов множества Бора либо «почти» полностью заполняет его, либо оставляет его «почти» пустым. Такой подход позволяет нам перевести проблему на «квантованный» уровень, то есть мы больше не рассматриваем отдельные элементы, а то, какие смежные классы «включены». Анализируя коэффициенты Фурье, мы получаем, что число решений уравнения зависит только от структурной (гранулированной) части

множества. Грануляция доказывает, что достаточно большие множества, свободные от сумм, не могут быть рассеянными или хаотическими — они всегда должны сочетаться с определенными множествами Бора, что придает им периодическую структуру. Благодаря этому разложению мы показали, что любое большое множество, свободное от сумм, может быть «аппроксимировано» очень простой структурой — моделью множества Бора. Описанный выше метод будет называться обобщенным методом гранул.

Обобщенный метод гранул позволил получить асимптотические оценки числа множеств, свободных от сумм, в абелевой группе и в начальном интервале натуральных чисел. Были получены верхние и нижние оценки мощности множества, свободного от сумм, максимальной по мощности (по включению) для произвольной абелевой группы, а также точная оценка для циклических групп. Эти оценки были получены в результате применения различных методов аддитивной комбинаторики. Описана структура множеств, свободных от сумм, максимальной по мощности (по включению) в произвольной абелевой группе. Также изучены множества, свободного от сумм, состоящие из арифметических прогрессий с одинаковой разностью. Для таких множеств получена точная оценка максимальной мощности в циклических группах. Вторая часть работы посвящена изучению множеств, представимых в виде суммы и разности подмножеств в абелевой группе. Верхние оценки числа таких множеств были получены с помощью обобщенного метода гранул, разработанного для наборов множеств. А нижние оценки числа таких множеств были получены путем построения большого числа множеств.

Отметим одно из применений множеств, свободных от сумм — проблему интерференции. В электронных устройствах, особенно при больших нагрузках и во время работы в аварийных ситуациях, генерируются дополнительные нежелательные частоты. Если f и g — рабочие частоты устройства, то при работе в нелинейных системах возникают сигналы типа $f \pm g$. Аналогичное смешение частот происходит на приемных станциях, где необходимо отличать принимаемое сообщение от смеси. В случаях, когда количество участников связи велико и необходимо выделить каждому из них частоты, свободные от сумм, важно знать количество таких множеств и уметь разделить их на соответствующие части. Эта часть исследования в данной работе связана с внутренним устройством радаров и радиочастотным мониторингом с участием радаров.

Vahe G. Sargsyan

Linear Relationship-Free Sets in the Domain Discrete Modeling

ABSTRACT

The thesis is devoted to the study of algebraic structures with certain limitations. In particular, sets and collections of sets that do not contain solutions of linear equations with coefficients 1 and -1 were investigated. Such sets and collections are referred to as sum-free. This work provides a mathematical justification that a sum-free set cannot be random (all subsequent statements are also true for sum-free collections). It is shown that the leading term of the Fourier transform of the characteristic function of a sum-free set is significantly large. If a sum-free set were random, then the nonzero Fourier coefficients of its characteristic function would be very small and would not be sufficient to cancel out the leading term. Consequently, a sum-free set must necessarily possess nonzero large Fourier coefficients, which implies that it possesses a well-defined periodic structure.

We now describe these structures. A Bohr set is one of the fundamental concepts in additive combinatorics, serving as a "generalized" version of a subgroup. Without Bohr sets, we would be restricted to working only with subgroups. However, since subgroups do not always exist, Bohr sets serve as their substitutes. They allow us to say: "This sum-free set resembles an arithmetic progression," where such a progression represents the simplest example of a Bohr set. Bohr sets enable us to perform almost the same computations as with subgroups, but with greater flexibility. Where subgroups exist, a Bohr set may coincide with them; where they do not, it provides a "subgroup-like" structure.

By applying granulation to a sum-free set, we partition the entire group into cosets of certain Bohr sets. These cosets constitute our "granules." Granulation ensures that, for any sufficiently large sum-free set, each coset of the Bohr set either "almost" completely fills the set or remains "almost" empty. This approach allows us to transfer the problem to the "quantized" level: that is, instead of considering individual elements, we analyze which cosets are "included".

By analyzing the Fourier coefficients, we conclude that the number of solutions to the equation depends solely on the structural (granulated) component of the set. Granulation for sum-free sets demonstrates that such sets cannot be scattered or random: rather, they must necessarily align with certain Bohr sets, which endows them with a periodic structure.

Using this decomposition, we demonstrate that any large sum-free set can be approximated by a very simple structure — namely, a Bohr set model.

The method described above we refer to this as the generalized granulation method. The generalized granulation method allows us to obtain asymptotic estimates for the number of sum-free sets in abelian groups and in initial interval of the natural numbers. Upper and lower estimates have been established for the maximal by cardinality (by inclusion) of sum-free sets in arbitrary abelian groups, as well as exact estimate in the case of cyclic groups. These results were obtained through the application of various methods from additive combinatorics.

The structure of sum-free sets of maximal by cardinality (by inclusion) in an arbitrary abelian group is also described. In addition, sum-free sets consisting of arithmetic progressions with a common difference have been studied. For such sets, an exact estimates on the maximum cardinality has been obtained in cyclic groups.

The second part of this thesis is devoted to the study of sets representable as sums and differences of subsets in an abelian group. Upper estimates on the number of such sets were derived using the generalized granulation method developed for collections of sets, while lower estimates obtained via explicit constructions of a large number of such sets.

We also highlight an application of sum-free collections to the problem of interference. In electronic devices, particularly under heavy load or during fault conditions, additional unwanted frequencies are generated. If f and g are operating frequencies of a device, then in nonlinear systems signals of the form $f \pm g$ arise when the frequencies are appropriately chosen. In situations where the number of communication participants is large and it is necessary to assign to each of them frequencies that are sum-free, it becomes important to determine the number of such sets and to be able to partition them appropriately. This part of the study is related to the internal functioning of radar systems and to radio-frequency monitoring involving radar technologies.