

ՀԱՍՏԱՏՈՒՄ ԵՄ՝

ՌՀՀ գիտության գծով պրոռեկտոր,

Վ.Գ.Գ. Ֆ.Ա.Գ.Ք., պրոֆեսոր Պ.Ս. Ավետիսյան



30.06.2026թ.

ԱՌԱՋԱՏԱՐ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԾԻՔ

*Վահե Գնելի Սարգսյանի «Գծային առնչություններից ազատ
հավաքածուները դիսկրետ մոդելավորման տիրույթում» թեմայով
դոկտորական ատենախոսական աշխատանքի վերաբերյալ Ե.13.05
«Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի
համալիրներ» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական
գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման համար*

Գիտական խորհրդատու՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ, ֆիզ.-մաթ.
գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր Լ. Հ. Ասլանյան:

Թեմայի արդիականությունը

Ատենախոսությունը նվիրված է թվարկման կոմբինատորիկայի,
թվերի գումարման տեսության և ադիտիվ կոմբինատորիկայի խաչմերուկում
գտնվող մի շարք հիմնարար խնդիրների՝ Աբելյան խմբերում և բնական
թվերի սկզբնական հատվածներում գծային հավասարումների լուծումներից
ազատ բազմությունների ու հավաքածուների (ԳՀԼԱԲ, ԳՀԼԱՀ) քանակական

և կառուցվածքային ուսումնասիրությանը:

Քննարկվող խնդիրները բխում են Ի. Շուրի (1916), Պ. Էրդյոշի, Պ. Կամերոնի, Ն. Ալոնի, Բ. Գրինի, Ի. Ռուժայի, Տ. Շոյենի, Ա. Ա. Սապոժենկոյի դասական աշխատանքներից և մինչ օրս հանդիսանում են ժամանակակից դիսկրետ մաթեմատիկայի ակտիվ զարգացող ուղղություններից մեկը: Կամերոն-Էրդյոշի հիպոթեզը, որը դարձավ ամբողջ ուղղության հիմքը, լուծվել է համեմատաբար վերջերս (2003–2009), իսկ նրա ընդհանրացումները՝ կամայական Աբելյան խմբերի և կամայական (k, l) զույգերի համար մինչև հայցորդի աշխատանքները փաստացի մնում էին բաց: Արդիականությունը կարևորվում է նաև նրանով, որ ստացված տեսական արդյունքներն ուղղակի կիրառություններ ունեն կոդավորման տեսությունում, ռադարային համակարգերի նախագծման, MIMO-տեխնոլոգիաների, ինքնավար մեքենաների ռադարային ազդանշանների մշակման և Արհեստական բանականության կիրառություններում, ինչը մանրամասն բացահայտվում է Գլուխ 6-ում և Հավելվածում:

Աշխատանքի գիտական նորույթը

Ատենախոսության գիտական նորույթը էական է և բազմակողմանի:

Մեթոդաբանական նորույթ: Աշխատանքում մշակվել է «Գրանուլների ընդհանրացված մեթոդը», որը հանդիսանում է Բ. Գրինի, Ի. Ռուժայի և Ա. Ա. Սապոժենկոյի դասական գրանուլների մեթոդի ոչ տրիվիալ ընդհանրացումը: Մեթոդը հնարավորություն է տալիս դիտարկել ոչ թե մեկ բազմությունից, այլ բազմությունների **հավաքածուներից** կազմված կառուցվածքների քանակական խնդիրները: Սա մաթեմատիկական ապարատի էական զարգացում է, որը բացում է նոր հնարավորություններ թվարկման կոմբինատորիկայում:

Բացի այդ, հայցորդի կողմից մշակվել է ինքնուրույն մեթոդաբանություն, որը հիմնված է Աբելյան խմբի և համապատասխան ֆակտոր-խմբի միջև կանոնական հոմոմորֆիզմի կողմից ուսումնասիրվող օբյեկտների առանցքային հատկությունների (գումարից ազատ լինելու, գծային հավասարումների լուծումներից ազատ լինելու) պահպանման

փաստի վրա: Այս մոտեցումը հնարավորություն է տվել ստանալ ստորին գնահատականներ և նկարագրել կառուցվածքներ այն դեպքերում, որտեղ դասական մեթոդները չեն աշխատում:

Արդյունքների նորույթ: Հայցորդը ստացել է հետևյալ սկզբունքորեն նոր արդյունքները՝

- (k, l) -ԳԱԲ-երի և (k, l) -ԳԱՀ-երի քանակի խնդիրները Աբելյան խմբերում k և l կամայական արժեքների համար առաջին անգամ ուսումնասիրվել են հենց հայցորդի կողմից — մինչ այդ արդյունքները հայտնի էին միայն մասնավոր դեպքերի համար: Ստացվել են ինչպես Աբելյան խմբերում, այնպես էլ բնական թվերի սկզբնական հատվածում ԳՀԼԱՀ-երի և ԳՀԼԱԲ-երի քանակի լոգարիթմի ասիմպտոտիկաները:
- Ցիկլիկ խմբերում որոշվել են ԳՀԼԱՀ-երի և ԳՀԼԱԲ-երի առավելագույն հզորության ճշգրիտ արժեքները, ստացվել են համապատասխան վերին գնահատականները կամայական Աբելյան խմբերում, իսկ էքսպոնենտի որոշակի սահմանափակումների դեպքում՝ ճշգրիտ արժեքները:
- Նկարագրվել են առավելագույն ըստ հզորության և առավելագույն ըստ ներառման ԳՀԼԱՀ-ի և ԳՀԼԱԲ-ի կառուցվածքները, ինչը կառուցվածքային ադիտիվ կոմբինատորիկայի ոլորտում նոր արդյունք է:
- Աբելյան խմբերում ստացվել են տրված թվով ենթաբազմությունների գումարի և տարբերության տեսքով ներկայացվող բազմությունների քանակի ինչպես վերին (գրանուլների ընդհանրացված մեթոդով), այնպես էլ ստորին գնահատականները (բազմությունների բացահայտ կառուցման միջոցով):
- Գլուխ 6-ում ուսումնասիրվել են բինար խորանարդներում

գումարից ազատ եռյակները, որը կապ է հաստատում աշխատանքի և Բուլյան ֆունկցիաների տեսության, դիսկրետ տոմոգրաֆիայի ու Սիդոնի բազմությունների տեսության միջև:

Աշխատանքի կառուցվածքը և բովանդակային ամբողջականությունը

Վահե Սարգսյանի ատենախոսական աշխատանքը գրված է հայերեն լեզվով, շարադրված է համակարգչային շարվածքով 205 էջի վրա և կազմված է ներածությունից, խնդրի մանրնկրկիտ պատմագիտական ակնարկից, մեթոդաբանության նկարագրությունից, վեց գլխից, եզրակացությունից, հավելվածից և օգտագործված գրականությունից (109 անուն գրականության ցանկից):

Ատենախոսությունը նվիրված է բավականին մեծ չափի Արեւյան խմբերում գումարից ազատ հավաքածուների և բազմությունների կառուցվածքներին, այդ կառուցվածքների նկարագրությանը, հզորությանը, ինչպես նաև հզորության ասիմպտոտիկ վարքի ուսումնասիրությանը էքստրեմալ կոմբինատորիկայի և Ֆուրյեի գործակիցների վերլուծությունների օգնությամբ:

Ատենախոսության կառուցվածքը տրամաբանորեն ճիշտ է կազմված. յուրաքանչյուր գլուխ սկսվում է հիմնական հասկացությունների ճշգրիտ սահմանումից, ուղեկցվում օժանդակ պնդումներով և լեմմաներով, ապա անցնում է գլխավոր թեորեմների ձևակերպման ու ապացույցի: Հասկապես ուշագրավ է, որ հայցորդը հետևողականորեն տարբերակում է բազմություն (set) և հավաքածու (collection) հասկացությունները՝ բացահայտելով դրանց միջև փոխկապակցվածությունն ու սկզբունքային տարբերությունները, ինչը հնարավորություն է տալիս ընթերցողին հստակ հետևել մաթեմատիկական զարգացման տրամաբանությանը:

Առաջին գլխում ներկայացվում է գծային հավասարումների լուծումներից ազատ հավաքածուների տեսության հիմքերը, ուսումնասիրվում է n -րդ կարգի G Արեւյան խմբում և $[1, n]$ բնական թվերի հատվածում $(k, l)(k + l \geq 3)$ - գումարից ազատ հավաքածուների հզորության $(SFC_{k,l}(G), SFC_{k,l}([1, n]))$ լոգարիթմի վարքը, երբ $n \rightarrow \infty$:

Ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

$$\log|SFC_{k,l}(G)| = \sigma_{k,0}(G) + o(n) \quad (\text{թեորեմ 1.1}), \text{ որտեղ}$$

$$\sigma_{k,l}(G) := \max_{(A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_{k+l})} (|A_1| + \dots + |A_k| + |A_{k+1}| + \dots + |A_{k+l}|),$$

$$\text{և } \log|SFC_{k,l}([1, n])| = \sigma_{k,l}(G) + o(n) \quad (\text{թեորեմ 1.2}).$$

Երկրորդ գլխում ուսումնասիրված են առավելագույն հզորության (k, o) - գումարից ազատ հավաքածուները՝

ա) պարզ Z_p ցիկլիկ խմբերում ստացված է հետևյալ արդյունքը՝

$$\sigma_{k,o}(Z_p) = p + k - 2 \quad (\text{թեորեմ 2.2}),$$

բ) ϑ էքսպոնենտով n -րդ կարգի G Աբելյան խմբում ստացված է հետևյալ երկկողմանի գնահատականը՝

$$n + \frac{n}{p_1}(k-2) \leq \sigma_{k,o}(G) \leq n + \frac{n}{p_2}(k-2) \quad (\text{թեորեմ 2.4}),$$

որտեղ p_1 -ը ϑ -ի, իսկ p_2 -ը n -ի ամենափոքր պարզ բաժանարարներն են,

գ) թվաբանական պրոգրեսիայի նույն տարբերությունը ունեցող հավաքածուների համար n -ցիկլիկ խմբերում ստացված է հզորության բանաձև (թեորեմ 2.7),

դ) նկարագրված է ըստ հզորության և ըստ ներառման առավելագույն հզորության հավաքածուների կառուցվածքը (թեորեմներ 2.10, 2.11 և 2.14):

Երրորդ գլխում ուսումնասիրված է ± 1 գործակիցներով գծային հավասարումների լուծումների բազմության հզորությունը:

Երրորդ գլխի հիմնական արդյունքներն են՝

ա) ուսումնասիրված է $(k, l)(k + l \geq 3)$ գումարից ազատ լուծումների բազմության հզորության վարքը n -րդ կարգի G Աբելյան խմբում, երբ $n \rightarrow \infty$ (թեորեմ 3.2), ինչպես նաև $[1, n]$ հատվածում (թեորեմ 3.4),

բ) առավելագույն հզորության (k, l) - գումարից ազատ լուծումների բազմության հզորության համար ստացված է երկկողմանի գնահատական n -րդ կարգի ցիկլիկ խմբերում և ϑ էքսպոնենտով n -րդ կարգի G Աբելյան խմբերում (թեորեմներ 3.6 և 3.11), որոշ դեպքերում ստացված է բանաձև (թեորեմ 3.14):

Գլուխ 4-ն ու Գլուխ 5-ը նվիրված են ենթաբազմությունների գումարի և տարբերության տեսքով ներկայացվող բազմությունների քանակի

խնդիրներին:

Չորրորդ գլխում ուսումնասիրվում է (k, k) և $(2k, o)$, գումարի և տարբերության տիպի բազմությունների ընտանիքի հզորությունը ϑ էքսպոնենտով n -րդ կարգի G Աբելյան խմբերում:

Որոշակի լրացուցիչ պայմանների դեպքում ստացված են թե՛ երկկողմանի, և թե՛ գնահատական վերնից (թեորեմներ 4.1 և 4.2):

Հինգերորդ գլխում ուսումնասիրվում են չորրորդ գլխում ուսումնասիրված խնդիրները (k, o) տիպի բազմությունների ընտանիքի համար:

Վեցերորդ գլխում բերված են կարևոր կիրառություններ առաջինից հինգերորդ գլուխներում ստացված արդյունքների հիման վրա: Այս վերջին գլուխը հատկապես արժեքավոր է, որովհետև ցույց է տալիս տեսական արդյունքների կիրառելիության ուղիները այնպիսի ժամանակակից ոլորտներում, ինչպիսիք են ռադարային համակարգերը, MIMO-կոնֆիգուրացիաները, ինքնավար տրանսպորտը և ԱԲ համակարգերը, ինչը լիովին համապատասխանում է Ե.13.05 մասնագիտությանը:

Արդյունքների արժանահավատությունը և մաթեմատիկական խստությունը

Ատենախոսության մեջ ստացված բոլոր արդյունքները ապացուցված են խիստ մաթեմատիկորեն: Հայցորդը գործածում է ադիտիվ կոմբինատորիկայի (Կնեգերի, Կոշի–Դևենայորտի, Վոսպերի, Կեմպերմանի թեորեմներ), Ֆուրյեի վերլուծության, պրոբաբիլիստական մեթոդների, գրանուլների մեթոդի և Սեմերեդիի տիպի կանոնականության լեմմայի հարուստ ապարատը: Ապացույցները տրված են մանրամասն, քայլերի տրամաբանական անցումները հիմնավորված են, օժանդակ լեմմաները ճշգրիտ ձևակերպված են:

Արդյունքների արժանահավատությունը հաստատվում է նաև նրանով, որ դրանք համահունչ են այս ոլորտում առկա դասական արդյունքների հետ՝ որպես ընդհանրացումներ կամ ճշգրտումներ: Մասնավորապես, ստացված ասիմպտոտիկաները հատուկ դեպքերում վերածվում են Գրին–Ռուժայի, Սապոժենկոյի և Շոյենի դասական արդյունքներին:

Արդյունքների հրապարակումը և ապրոքացիան

Հայցորդի աշխատանքների հրապարակումների ցանկը տպավորիչ է թե՛ քանակական, թե՛ որակական առումով: Ատենախոսության արդյունքները հրատարակվել են առաջատար գիտական ամսագրերում, որոնց թվում՝

- Дискретная математика (РАН)՝ բազմակի հրապարակումներ (2012, 2014, 2016, 2018),
- Дискретный анализ и исследование операций (2013, 2015, 2018, 2019),
- Журнал вычислительной математики и математической физики (2013),
- Вестник МГУ, сер. 15 (2012),
- Acta Universitatis Sapientiae, Informatica (2012),
- Pattern Recognition and Image Analysis (2024, 2025, 2026),
- AIP Conference Proceedings (2023),
- Mathematical Problems of Computer Science (2014):

Մի շարք հրապարակումներ կատարված են համատեղ Ա. Ա. Սապոժենկոյի հետ — այս ոլորտի աշխարհահռչակ մասնագետի հետ, ինչը ինքնին վկայում է հայցորդի աշխատանքների բարձր որակի մասին: Արդյունքները ապրոքացվել են բազմաթիվ միջազգային գիտաժողովներում («Проблемы теоретической кибернетики» XVI–XX, «Дискретная математика и её приложения» XI և XIV, «Ломоносов» համալսարանական գիտաժողովներ, CSIT, KROMSH և այլն): Հրապարակումները ընդգրկում են 2011–2026 թվականների ժամանակահատվածը, ինչը վկայում է հայցորդի շարունակական ու հետևողական գիտական աշխատանքի մասին:

Աշխատանքի վերջին մասում (2024–2026 թթ.) արդյունքները տարածվել են նաև ռադիոհաճախականային պատկերների դասակարգման խնդիրների վրա՝ խորը ուսուցման ցանցերի (deformable convolution, R(2+1)D) կիրառմամբ, ինչը ցույց է տալիս հայցորդի գիտական հետաքրքրությունների բնական զարգացումը տեսականից դեպի կիրառական ուղղություն:

Դիտողություններ

1. Ատենախոսության մեջ և սերդմագրում նկատվել են լեզվական և տպագրական թերություններ: Ատենախոսությունը կարդալիս զգացվում է, որ այն բառացի թարգմանված է օտար լեզվից: Որոշ տերմիններ, որոնք ունեն հայերեն ավելի գեղեցիկ հանգունակ, գրված են օտարահունչ լեզվով (օրինակ՝ կոնվոլուցիայի հանգունակն է փաթեթ):
2. Աշխատանքում օգտագործվում են բազմաթիվ նշանակումներ (SFS, SFC, զ, λ , ԳՀԼԱՀ, ԳՀԼԱԲ, ԳԱԲ, ԳԱՀ, ԶԱԲ և այլն), և թեև դրանք յուրաքանչյուր գլխում սահմանվում են, օգտակար կլինեին սիմվոլների միասնական ցանկ (List of Symbols) ավելացնել ատենախոսության սկզբում:
3. Նույն պնդումը տարբեր տեղերում համարակալված է տարբեր համարներով (օրինակ, թեորեմ 1.1 և թեորեմ 1.5):
4. Նույն նշանակումը տարբեր գլուխներում նշանակված է տարբեր կերպ (օրինակ, առաջին գլխում $\sigma_{k,l}(G)$ և երկրորդ գլխում $\sigma_k(G)$):
5. Որոշ տեղերում արգումենտը բաց է թողնված (օրինակ, էջ 22 7-րդ տող ներքևից): 142-րդ էջի 12-րդ տողում պետք է լինեին $|SSS_{2k,\rho}(G)|$:

Սակայն նկատված բոլոր թերությունները կրում են տեխնիկական բնույթ և չեն կարող անդրադառնալ ատենախոսությունում ստացած արդյունքների վրա:

Եզրակացություն

Վահե Գնելի Սարգսյանի ատենախոսությունն իրենից ներկայացնում է գիտականորեն ինքնուրույն, բարձր գիտական մակարդակի, ավարտված մաթեմատիկական հետազոտություն, որում լուծված է թվարկման կոմբինատորիկայի, ադիտիվ կոմբինատորիկայի և թվերի գումարման տեսության ոլորտի կարևոր և մինչ այդ բաց մնացած խնդիրների մի համալիր:

Աշխատանքում՝

- մշակվել է նոր մաթեմատիկական ապարատ՝ գրանուլների ընդհանրացված մեթոդը,
- ստացվել են Աբելյան խմբերում և բնական թվերի սկզբնական հատվածում (k, l) -ԳՀԼԱՀ-երի և (k, l) -ԳՀԼԱԲ-երի քանակի լոգարիթմի ասիմպտոտիկաները կամայական k և l արժեքների համար,
- որոշվել են ցիկլիկ խմբերում առավելագույն հզորության ճշգրիտ արժեքները,
- նկարագրվել են առավելագույն կառուցվածքները,
- ստացվել են ենթաբազմությունների գումարի տեսքով ներկայացվող բազմությունների քանակի վերին և ստորին գնահատականները,
- ցույց է տրվել ստացված արդյունքների ուղղակի կիրառելիությունը ռադարային համակարգերում, MIMO տեխնոլոգիաներում, ինքնավար տրանսպորտում և ԱԲ համակարգերում:

Ատենախոսության արդյունքները հրապարակվել են առաջատար գիտական ամսագրերում և զեկուցվել են միջազգային գիտաժողովներում, ինչը հաստատում է դրանց արժանահավատությունը և կարևորությունը գիտական հանրության կողմից:

Ատենախոսությունը և սեղմագիրը համապատասխանում են ներկայացվող պահանջերին, ատենախոսությունը բովանդակությամբ համապատասխանում է Ե.13.05 «Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ» մասնագիտությանը, իսկ հեղինակի կողմից հրատարակված հոդվածները լիովին արտացոլում են աշխատանքի հիմնական դրույթները:

Սեղմագիրը համապատասխանում է ատենախոսությանը:

Այսպիսով՝ Վահե Գնելի Սարգսյանի «Գծային առնչություններից ազատ հավաքածուները դիսկրետ մոդելավորման տիրույթում» թեմայով դոկտորական ատենախոսական աշխատանքը լիովին համապատասխանում է Ե.13.05 «Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ» մասնագիտությամբ ֆիզիկա-

մաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի համար ներկայացվող ատենախոսություններին վերաբերող պահանջներին, իսկ նրա հեղինակ Վահե Գնելի Սարգսյանը, անկասկած, արժանի է հայցվող ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի շնորհմանը:

Կարծիքը քննարկվել և հաստատվել է Ռուս-Հայկական համալսարանի Մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի և բարձր տեխնոլոգիաների ինստիտուտի Մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի նիստում (արձանագրություն №8, առ 23.06.2026թ.), որին մասնակցել են ՌՀՀ Մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի վարիչ, դոցենտ, ֆիզ.-մաթ. գիտ. թ. Գ.Գ. Տոնոյանը (նիստի նախագահ), ՌՀՀ Համակարգային ծրագրավորման ամբիոնի վարիչ, դոցենտ, տեխ. գիտ. դ. Ս.Ս. Սարգսյանը, Մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի պրոֆեսորներ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դ. Հ.Գ. Ղազարյանը, ֆիզ.-մաթ. գիտ. դ. Վ.Ն. Մարգարյանը, ՌՀՀ Մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի դոցենտ (ամբիոնի պրոֆեսոր), ֆիզ.-մաթ. գիտ. դ. Ս.Լ. Բերբերյանը, դոցենտ, ֆիզ.-մաթ. գիտ. թ. Ա.Ա. Դարբինյանը:

ՌՀՀ, ՄՖԲՏԻ Մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական

մոդելավորման ամբիոնի վարիչ,

ֆիզ.-մաթ. գիտ. թ., դոցենտ

Գ.Գ. Տոնոյան

ՌՀՀ, ՄՖԲՏԻ Մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական

մոդելավորման ամբիոնի պրոֆեսոր,

ֆիզ.-մաթ. գիտ. դ.



Վ.Ն. Մարգարյան

Գ.Գ. Տոնոյանի և Վ. Ն. Մարգարյանի տնօրենական կնիքով հաստատում եմ,

ՌՀՀ գիտ. քարտուղար, Բ.Գ.Թ.

Ռ.Ս. Կասաբաբովա