

Պաշտոնական ընդդիմախոսի

Կ Ա Ր Ծ Ի Ք

Վահե Գնելի Սարգսյանի «Գծային առնչություններից ազատ հավաքածուները դիսկրետ մոդելավորման տիրույթում» թեմայով Ե.13.05 «Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ եւ ծրագրերի համալիրներ» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի աստիճանի հայցման ատենախոսության վերաբերյալ

Ատենախոսության հետազոտության հիմնական օբյեկտը (k, l) -գումարից ազատ հավաքածուներն են:

G արելյան խմբի $G_1, G_2, \dots, G_m$ ենթաբազմությունների գումարը սահմանվում է որպես $G_1 + G_2 + \dots + G_m = \{g_1 + g_2 + \dots + g_m \mid g_i \in G_i, i = 1, 2, \dots, m\}$:

Դիցուք k -ն և l -ը բնական թվեր են (զրոն ներառյալ) և $k + l \geq 3$: $A_1, A_2, \dots, A_k$ և $B_1, B_2, \dots, B_l$ G վերջավոր արելյան խմբի (կամ անվերջ արելյան խմբի վերջավոր ենթաբազմության) ենթաբազմությունները կոչվում են (k, l) -գումարից ազատ, եթե $(A_1 + A_2 + \dots + A_k) \cap (B_1 + B_2 + \dots + B_l) = \emptyset$: Դրանց հզորությունը սահմանվում է որպես $\sum_{i=1}^k |A_i| + \sum_{j=1}^l |B_j|$:

Այն դեպքում, երբ $l = 0$ համարվում է, որ $B_1 + B_2 + \dots + B_l = \{0\}$ և $A_1, A_2, \dots, A_k$ -ն կոչվում է k -զրոյից ազատ (այս դեպքում կարելի է ընդունել, որ $k \geq 2$): Նկատենք, որ ենթաբազմությունների հավաքածուների վրա չկրկնվելու որևէ պայման չի դրվում:

G -ի (կամ անվերջ արելյան խմբի վերջավոր ենթաբազմության) A ենթաբազմությունը կոչվում է (k, l) -գումարից ազատ, եթե (k, l) -գումարից ազատ է $A_1 = A, A_2 = A, \dots, A_k = A$ և $B_1 = A, B_2 = A, \dots, B_l = A$ հավաքածուն:

G վերջավոր արելյան խմբում (կամ անվերջ արելյան խմբի վերջավոր G ենթաբազմության) (k, l) -գումարից ազատ ենթաբազմությունների հավաքածուների առավելագույն հզորությանը սահմանվում է որպես $\rho_{k,l}(G)$:

Ատենախոսության հիմնական նպատակներն են (k, l) -գումարից ազատ ենթաբազմությունների քանակների գնահատումը տարբեր G -րի համար, դրանց առավելագույն հզորության գնահատումը, ըստ ներդրման առավելագույն հզորության ենթաբազմությունների հավաքածուների կառուցվածքի ուսումնասիրումը:

Ատենախոսության **առաջին գլխի** հիմնական արդյունքներն են Թեորեմ 1.5-ը և Թեորեմ 1.7-ը:

Թեորեմ 1.5-ը վերաբերվում է n կարգի արելյան G խմբում k –զրոյից ազատ բազմությունների հավաքածուների քանակին: Դրա համար ակնհայտ ստորին գնահատական է առավելագույն հզորության հավաքածուի ենթահավաքածուների քանակը՝ $2^{\rho_{k,0}(G)}$: Հեղինակն առաջուցել է, որ իսկապես հետազոտվող քանակը $2^{\rho_{k,0}(G)+o(n)}$ կարգի մեծություն է, ստանալով k –զրոյից ազատ բազմությունների հավաքածուների քանակի լոգարիթմի ասիմտոտիկ արժեքը:

Թեորեմ 1.7-ում ստացվել է համանման արդյունք՝ $[1, n]$ բնական թվերի հատվածում (k, l) –գումարից ազատ բազմությունների հավաքածուների քանակի լոգարիթմի ասիմտոտիկ արժեքը հավասար է $\rho_{k,l}([1, n]) + o(n)$:

Երկրորդ գլխում ուսումնասիրվել է $\rho_{k,0}(G)$ -ն տարբեր արելյան խմբերի համար: Նաև նկարագրվել են առավելագույն հզորության հավաքածուները:

Թեորեմ 2.4.-ում ստացվել են $\rho_{k,0}(G)$ -ի համար հետևյալ գնահատականները
$$n + \frac{n}{p_1}(k - 2) \leq \rho_{k,0}(G) \leq n + \frac{n}{p_2}(k - 2),$$
 որտեղ n -ը խմբի կարգն է, p_1 -ը 1-ից տարբեր խմբի էքսպոնենտի փոքրագույն բաժանարարն է իսկ p_2 -ը 1-ից տարբեր խմբի կարգի փոքրագույն բաժանարարն է:

Քանի որ ցիկլիկ խմբի էքսպոնենտը և կարգը համընկնում են ապա ստացվում է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 2.5. n կարգի ցիկլիկ խմբի համար $\rho_{k,0}(\mathbb{Z}_n) = n + \frac{n}{p}(k - 2)$, որտեղ p -ն 1-ից տարբեր n -ի փոքրագույն բաժանարարն է:

Թեորեմ 2.11-ում նկարագրված են ցիկլիկ խմբում առավելագույն հզորության հաջաքածուները:

Լեմմա 2.16, 2.17-ը և Թեորեմ 2.14-ը բացահայտում են ըստ ներդրվածության առավելագույն հավաքածուների կառուցվածքային հատկությունները:

Երրորդ գլխում ուսումնասիրվում են արելյան խմբի կամ $[1, n]$ բնական թվերի հատվածի գումարից ազատ բազմությունները:

Առաջին երկու արդյունքները վերաբերվում են (k, l) –գումարից ազատ բազմությունների քանակներին:

Թեորեմ 3.2.-ը և 3.4.-ը թեորեմներ 1.5. և 1.7. անալոգներն են՝ ապացուցվում է, որ թե վերջավոր արելյան խմբերում, թե կամ $[1, n]$ բնական թվերի հատվածում գումարից ազատ բազմությունների քանակի լոգարիթմի ասիմտոտիկ արժեքը հավասար է գումարից ազատ բազմությունների առավելագույն հզորությանը:

Այնուհետ ուսումնասիրվում է գումարից ազատ բազմությունների առավելագույն հզորությանը:

Թեորեմ 3.9.-ում տրվել է վերջավոր ցիկլիկ խմբի (k, l) –գումարից ազատ բազմությունների առավելագույն հզորության ճշգրիտ բանաձևը, իսկ Թեորեմ 3.13.-ում տրվել են վերջավոր արելյան խմբում (k, l) –գումարից ազատ բազմությունների առավելագույն հզորության ստորին և վերին գնահատականներ:

Թեորեմ 3.20-ում որոշակի պայմանների դեպքում նկարագրվել են բոլոր ըստ ներդրվածության առավելագույն (k, l) –գումարից ազատ բազմությունները վերջավոր ցիկլիկ խմբում:

Թեորեմ 3.22.-ում ստացվել է ցիկլիկ խմբում k -գրոյից ազատ թվաբանական պրոգրեսիայի առավելագույն հզորության ճշգրիտ բանաձևը:

Թեորեմ 3.25-ում ստացված են k -գրոյից ազատ $(k \geq 3)$ առավելագույն բազմության հզորության ստորին և վերին գնահատականներ:

Վերջապես Թեորեմ 3.28-ում, որոշակի պայմանների դեպքում նկարագրվել են բոլոր առավելագույն են k -գրոյից ազատ բազմությունները վերջավոր ցիկլիկ խմբում:

Չորրորդ գլխում որոշակի պայմանների դեպքում (k, k) և $(2k, 0)$ գումար հանդիսացող բազմությունների քանակների համար (Թեորեմներ 4.1., 4.2., 4.3):

Հինգերորդ գլխում ստացվել են ստորին և վերին գնահատականներ որոշ պայմաններին բավարարող $(k, 0)$ -գումարների քանակների համար (Թեորեմներ 5.1., 5.2.):

Վերջին գլխում նկարագրված են ազատ հավաքածուների և բազմությունների կիրառությունները տարատեսակ խնդիրներում:

Ստորև կշարադրենք որոշ մտքեր աշխատանքում դիտարկված խնդիրների վերաբերյալ:

Հետաքրքրի կլինեն ունենալ գումարից ազատ բազմությունների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ: Զրոյից ազատ բազմությունների օրինակով՝ դիտարկենք p պարզ բնութագրիչով p^n կարգի վերջավոր դաշտն որպես արելյան խումբ ադիտիվ գործողության համար և վերցնենք k -ն պատիկ p -ին: Պարզ է, որ այս դաշտում կամայական ոչ դատարկ բազմություն k -զրոյից ազատ է: Դիտարկենք Թեորեմ 3.5.-ում ստացված գնահատականները այս դեպքի համար: Վերցնենք $k = p = 3$, խմբի կարգը կլինի հավասար 3^n , իսկ էքսպոնենտը՝ 3-ի:

Ստորին գնահատականը հավասար կլինի 0, ինչը հանդիսանում է ստույգ արժեք, քանի որ առավելագույն հզորությունը գոյություն չունեցող բազմության համար 0 է: Վերին գնահատականը ստացվում է հավասար 3^{n-1} : Ինչպես տեսնում ենք գնահատականների տարբերությունը կարող է շատ մեծ լինել: Թեորեմ 3.26-ում նշված է մեկ բավարար պայման որի դեպքում ստորին գնահատականը տալիս է ճշգրիտ արժեքը, սակայն վերը նշված վերջավոր դաշտերի դեպքում, երբ դաշտի բնութագրիչը փոքր է k -ից այդ բավարար պայմանը չի կատարվում:

Ընդհանրապես, փոքր էքսպոնենտով (երբ էքսպոնենտը շատ ավելի փոքր է խմբի կարգից, ինչը տեղի ունի վերջավոր դաշտերի դեպքում) խմբերի համար արժեք շարունակել հետազոտությունները ավելի ճշգրիտ գնահատականներ ունենալու համար:

Աշխատանքում k -զրոյից ազատ A բազմությունում $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0$ հավասարումը պետք է չունենա որևէ լուծում, և, երբ k -ն պատիկ է էքսպոնենտին, ինչպես նշել են նախորդիվ, վերցնելով $x_1 = x_2 = \dots = x_k$ ստանում ենք՝ $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0$ և ազատ բազմություն գոյություն չունի: Պատկերը փոխվում է, երբ պահաջվում է որ գումարում մասնակցող A -ի տարրերը լինեն տարբեր: Վերը նշված

$k = p = 3$ օրինակում այս իմաստով 3-գրոյից ազատ բազմություն գոյություն ունի:
Հետաքրքիր կլիներ փորձել ատենախնդրությունում մշակված մեթոդները կիրառել
այս դեպքի համար, քանի որ այս խնդիրները շատ բարդ են և ունեն կարևոր
կիրառություններ:

Վահե Սարգսյանի ատենախնդրությունը համապարփակ գիտական
աշխատություն է, որում ստացված են նոր, օրիգինալ, մաթեմատիկորեն խիստ
ապացուցված և կարևոր տեսական և կիրառական արդյունքներ, որոնք կարող են
գնահատվել իբրև էական նվաճում դիսկրետ մաթեմատիկական մոդելավորման
բնագավառում: Աշխատանքում հմտորեն կիրառվել են հանրահաշվի,
եռանկյունաչափական գումարների, գրանուլացման և դիսկրետ մոդելների
ուսումնասիրման այլ մաթեմատիկական նուրբ մեթոդներ և գործիքներ ոչ տրիվիալ և
խորը արդյունքներ ստանալու համար: Կարծում եմ, որ Սարգսյանի աշխատանքը
տվյալ բնագավառում վերջին տասնամյակի լավագույն արդյունքներից է:
Ատենախոսության արդյունքները ճշգրիտ եւ լրիվ արտացոլվել են հրապարակված
հոդվածներում: Ատենախոսությունը բավարարում է Ե.13.05 «Մաթեմատիկական
մոդելավորում, թվային մեթոդներ եւ ծրագրերի համալիրներ» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսություններին ՀՀ ԲԿԳԿ-ի կողմից սահմանված պահանջներին և
Վահե Սարգսյանը անկասկած արժանի է ֆիզիկամաթեմատիկական
գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի շնորհմանը:

Պաշտոնական ընդդիմախոս



Արա Ալեքսանյան

Ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր

Ա. Ալեքսանյանի ստորագրությունը հաստատում եմ՝

ԵՊՀ գիտական քարտուղար



Մ.Վ. Հովհաննիսյան

29 հունիսի 2026թ.