

ՊԱՇՏՈՆԱԿԱՆ ԸՆԴԴԻՄԱԽՈՍԻ ԿԱՐԾԻՔ

Վահե Գնեղի Սարգսյանի «Գծային առնչություններից ազատ հավաքածուները դիսկրետ մոդելավորման տիրույթում» թեմայով
Ե.13.05 – «Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և
ծրագրերի համալիրներ» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության վերաբերյալ

Ընդհանուր բնութագիրը:

Վահե Գնեղի Սարգսյանի ատենախոսությունը նվիրված է դիսկրետ մաթեմատիկայի, մասնավորապես՝ ադիտիվ կոմբինատորիկայի և թվերի գումարման տեսության մի շարք հիմնարար ու կիրառական խնդիրների ուսումնասիրությանը և լուծմանը: Աշխատանքում դիտարկվում են Աբելյան խմբերում և բնական թվերի սկզբնական հատվածում (k, l) -գումարից ազատ բազմությունների և հավաքածուների քանակական բնութագրերը, դրանց առավելագույն հզորության ճշգրիտ արժեքներն ու կառուցվածքային նկարագրությունները, ինչպես նաև ենթաբազմությունների գումարների և տարբերությունների տեսքով ներկայացվող բազմությունների քանակի գնահատման խնդիրները: Ատենախոսության արդիականությունը պայմանավորված է նրանով, որ, չնայած դասական արդյունքներին՝ սկսած Ի. Շուրի աշխատանքներից, ընդհանուր (k, l) դեպքի համար քանակական ասիմպտոտիկաներ կար ժամանակ մնացել է բաց խնդիր: Հեղինակի կողմից մշակված գրանուլների ընդհանրացված մեթոդը հնարավորություն է տվել ստանալ խնդրի համակարգային և ամբողջական նկարագիր:

Գիտական նորությունը և հիմնական արդյունքները:

Ատենախոսության գիտական նորությը կարելի է ամփոփել մի քանի հիմնական ուղղություններով: Նախ և առաջ, հեղինակը մշակել է գրանուլների ընդհանրացված մեթոդ, որը կիրառելի է գումարից ազատ բազմությունների, հավաքածուների, ինչպես նաև ենթաբազմությունների գումարի և տարբերության տեսքով ներկայացվող բազմությունների ուսումնասիրության համար (լեմմաներ 1.5, 3.1, 4.7, 4.8, 5.2): Այս մեթոդը, հիմնվելով Ֆուրյեի վերլուծության և «կառուցվածք-պատահականություն» դեկոմպոզիցիայի սկզբունքի վրա, հնարավորություն է տվել ստանալ ինչպես վերին, այնպես էլ ստորին գնահատականներ, որոնք ասիմպտոտիկ իմաստով համընկնում են:

Երկրորդ, ստացվել են $(k, 0)$ -ԳԱՀ-երի և (k, l) -ԳԱՀ-երի քանակի լոգարիթմի ասիմպտոտիկաները Աբելյան խմբերում (թեորեմ 1.5) և բնական թվերի սկզբնական

հատվածում (թեորեմ 1.7): Այս արդյունքները Կամերոն–Էրոյնշի հիպոթեզի լուծման բնական ընդհանրացումն են և կարևոր ներդրում են թվարկման կոմբինատորիկայի ու ադիտիվ տեսության մեջ:

Երրորդ, որոշվել են (k, l) -գումարից ազատ հավաքածուների առավելագույն հզորության ճշգրիտ արժեքները ցիկլիկ խմբերի համար, ինչպես նաև ստացվել են վերին և ստորին գնահատականներ կամայական Աբելյան խմբերի համար (թեորեմներ 2.4, 2.5): Բացի այդ, ամբողջությամբ նկարագրվել է առավելագույն թե՛ ըստ հզորության, թե՛ ըստ ներառման, k -ԳԱՀ-երի կառուցվածքը (թեորեմներ 2.10, 2.11, 2.14):

Չորրորդ, ստացվել են (k, l) -գումարից ազատ բազմությունների քանակի լոգարիթմի ասիմպտոտիկաները Աբելյան խմբերում (թեորեմ 3.2) և ամբողջ թվերի $[1, n]$ հատվածում (թեորեմ 3.4): Դրան զուգահեռ որոշվել են (k, l) -ԳԱԲ-երի առավելագույն հզորության ճշգրիտ արժեքները ցիկլիկ խմբերում և որոշակի սահմանափակումների պայմաններում՝ Աբելյան խմբերում, ինչպես նաև նկարագրվել է առավելագույն ըստ ներառման (k, l) -ԳԱԲ-երի կառուցվածքը ցիկլիկ խմբերում (թեորեմներ 3.8, 3.14, 3.20):

Հինգերորդ, ատենախոսությունում ստացվել են (k, k) , $(2k, 0)$, $(k, 0)$ և k -գումարների քանակի վերին և ստորին գնահատականներ Աբելյան խմբերում (թեորեմներ 4.1, 4.2, 4.3, 5.1): Այս արդյունքները էապես ընդհանրացնում են Գրինի, Ռուժայի, Ալոնի, Գրանվիլի և Ուբիսի հայտնի աշխատանքները և բացում են նոր հնարավորություններ նմանատիպ կառուցվածքների հետագա ուսումնասիրության համար:

Վեցերորդ, հեղինակը մշակել է մեթոդաբանություն, որը հիմնված է Աբելյան խմբի և համապատասխան ֆակտոր-խմբի միջև կանոնական հոմոմորֆիզմի կողմից ուսումնասիրվող օբյեկտների առանցքային հատկությունների պահպանման վրա (լեմմա 2.1, լեմմա 3.9, թեորեմներ 4.4–4.6): Այդ մոտեցումը թույլ է տվել ցիկլիկ խմբերում ստացված արդյունքները տարածել ավելի ընդհանուր Աբելյան խմբերի վրա:

Վերջապես, ատենախոսության վեցերորդ գլխում ուսումնասիրվում են գումարից ազատ կառուցվածքների կիրառությունները տեղեկատվական տեխնոլոգիաներում, մասնավորապես՝ ազդանշանների մշակման, ռադարային համակարգերի, ինքնավար մեքենաների արհեստական բանականության համակարգերի ոլորտներում: Միաժամանակ ցույց է տրվում կապը Միդոնի բազմությունների, Գոլոմբի քանոնների և բինար խորանարդ-

ների երրորդ շերտի միջև, ինչը հատկապես կարևորում է աշխատանքի միջոցի սցիայինար նշանակությունը:

Մեթոդաբանության վերլուծություն:

Ատենախոսության մեթոդաբանական առանցքը հեղինակի մշակած «Գրանուլների ընդհանրացված մեթոդ» է: Մեթոդի էությունն այն է, որ ուսումնասիրվող օբյեկտների՝ բազմությունների կամ հավաքածուների համար կառուցվում է «գրանուլների» ընտանիք՝ հարակից դասի կամ պրոգրեսիայի տիպի, որն ունի համեմատաբար պարզ և հաշվարկելի կառուցվածք: Այնուհետև ապացուցվում է, որ յուրաքանչյուր ուսումնասիրվող օբյեկտ «գրեթե» ամբողջությամբ տեղավորվում է որևէ գրանուլի մեջ: Գրանուլների քանակը և դրանց հատկությունները վերլուծվում են Ֆուրյեի վերլուծության, մասնավորապես բնութագրիչ ֆունկցիաների Ֆուրյեի ձևափոխությունների և Պարսևալի հավասարության միջոցով:

«Կառուցվածք-պատահականություն» դեկոմպոզիցիայի սկզբունքի կիրառումը հնարավորություն է տալիս առանձնացնել բազմության պարբերական, այսինքն՝ կառուցվածքային մասը, որը վճռորոշ դեր ունի լուծումների քանակի գնահատման հարցում: Այս մոտեցմամբ հեղինակը կարողացել է ստանալ ոչ միայն վերին, այլև ստորին գնահատականներ, որոնք համընկնում են ասիմպտոտիկ իմաստով: Հատկապես արժե առանձնացնել լեմմա 1.5-ի ապացույցը, որտեղ ցուցադրվում է, որ կառուցվող բազմությունների համակարգում առանցքային դերը խաղում է միայն մեկնարկային բազմությունը, ինչը զգալիորեն պարզեցնում է ամբողջ հաշվարկային սխեման:

Ատենախոսության կառուցվածքը և բովանդակությունը:

Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, խնդրի պատմության ակնարկից, մեթոդաբանության բաժնից, վեց գլուխներից, եզրակացությունից, հավելվածից և գրականության ցանկից: Ներածությունում հիմնավորվում է թեմայի արդիականությունը, ձևակերպվում են աշխատանքի նպատակներն ու խնդիրները և ներկայացվում են պաշտպանության հանձնարարվող դրույթները: Առաջին գլուխը նվիրված է (k, l) -գումարից ազատ հավաքածուների քանակի ասիմպտոտիկային, որտեղ ապացուցված են գրանուլավորման հիմնարար լեմմաները և հիմնական թեորեմները: Երկրորդ գլուխը վերաբերում է առավելագույն k -գումարից ազատ հավաքածուներին, դրանց հզորության գնահատումներին և կառուցվածքային նկարագրությանը: Երրորդ գլուխը նվիրված է (k, l) -

գումարից ազատ բազմություններին՝ ներառյալ քանակի ասիմպտոտիկան, առավելագույն հզորությունը և կառուցվածքը: Չորրորդ և հինգերորդ գլուխներում ուսումնասիրվում են տարբեր տիպի գումարների և ենթաբազմությունների գումարի տեսքով ներկայացվող բազմությունների քանակական բնութագրերը: Վեցերորդ գլուխը ներկայացնում է աշխատանքի կիրառական ասպեկտները: Ատենախոսության կառուցվածքը տրամաբանական է, հետևողական և լավ հավասարակշռված:

Արդյունքների հավաստիությունը:

Ատենախոսության արդյունքների հավաստիությունը հիմնավորվում է մի քանի կարևոր հանգամանքով: Նախ, բոլոր պնդումները ապացուցված են մաթեմատիկական խիստ տրամաբանությամբ և հիմնված են ժամանակակից տեսական գործիքակազմի վրա: Երկրորդ, աշխատանքում կիրառված են ադիտիվ կոմբինատորիկայի և թվերի գումարման տեսության դասական ու վստահելի արդյունքներ՝ Կոշի-Դավենպորտի, Կնեզերի, Վոսպերի, Կեմպերմանի, Օլսոնի և այլոց թեորեմները: Երրորդ, ստացված արդյունքները բնական կերպով համադրվում են այս ոլորտում արդեն հայտնի դասական արդյունքների հետ և ընդհանրացնում են դրանք: Չորրորդ, ատենախոսության հիման վրա հեղինակի կողմից հրապարակված բազմաթիվ գիտական աշխատանքները վկայում են արդյունքների գրախոսվածության և մասնագիտական հանրության կողմից ընդունելիության մասին:

Դրական կողմեր:

- Ատենախոսության կարևորագույն առավելություններից մեկը նորարարական մեթոդի մշակումը և դրա հետևողական կիրառումն է: Գրանուլների ընդհանրացված մեթոդը հեղինակի ինքնուրույն և արժեքավոր ներդրումն է, որը կարող է կիրառվել կոմբինատորիկայի և հարակից բնագավառների խնդիրների լայն շրջանակում: Այն հնարավորություն է տալիս միասնական մոտեցմամբ ուսումնասիրել թվացյալ տարբեր բնույթի խնդիրներ՝ սկսած գումարից ազատ բազմությունների թվարկումից մինչև ենթաբազմությունների գումարների ներկայացումներ:

- Մյուս էական առավելությունը արդյունքների բարձր ընդհանրականությունն է: Հեղինակը չի սահմանափակվել միայն դասական (2,1) դեպքով, այլ աշխատել է (k, l) -ի կամայական արժեքների համար, որտեղ $k + l \geq 3$: Սա զգալիորեն ընդլայնում է ոլորտում հայտնի արդյունքների սահմանները: Բացի այդ, ատենախոսությունում ուսումնասիրվում են խնդրի տարբեր կողմերը՝ քանակի գնահատում, առավելագույն հզորության որոշում,

կառուցվածքի նկարագրություն և կիրառություններ, ինչը աշխատանքին հաղորդում է ամբողջական բնույթ:

- Հատուկ ընդգծման արժանի է նաև աշխատանքի կիրառական նշանակությունը: Վեցերորդ գլուխը համոզիչ կերպով ցույց է տալիս, որ ստացված տեսական արդյունքները կարող են կիրառություն ունենալ ժամանակակից տեխնոլոգիական ոլորտներում՝ ռադարային համակարգերում, ազդանշանների մշակման խնդիրներում, կոդավորման տեսությունում և ինքնավար համակարգերում: Այս հանգամանքը էապես բարձրացնում է աշխատանքի արժեքը և վկայում է թեմայի արդիականության մասին:

Դիտողություններ:

Ներկայացնեմ մի քանի դիտողություններ, որոնք բացառապես խորհրդատվական բնույթ ունեն:

- Աշխատանքում շրջանառվում են բազմաթիվ նշանակումներ՝ տարբեր գլուխներում որոշակիորեն տարբերվող ձևերով (SFS, SFC, զ, λ, և հայերեն հապավումները՝ ԳՀԼԱՀ, ԳՀԼԱԲ, ԳԱԲ, ԳԱՀ, ԶԱԲ): Սկզբում տեղադրված միասնական նշանակումների ցանկը զգալիորեն կրթթևացներ ընթերցումը:

- Գլուխ 6-ի կիրառական շարադրանքի որոշ հատվածներ (հատկապես ինքնավար տրանսպորտի և ԱԲ վերաբերյալ) գրված են ավելի շուտ նկարագրական, քան ֆորմալ մաթեմատիկական ոճով: Կիրառությունների մաթեմատիկական մոդելի առավել խիստ ձևակերպումը (կամ համապատասխան մասի տեղափոխումը Հավելված) կամրապնդեր հիմնական տեքստի մաթեմատիկական միասնականությունը:

- Մի շարք առանցքային թեորեմներում ստորին և վերին գնահատականների միջև պահպանվում է բաց, որ պայմանավորված է խմբի էքսպոնենտի կամ կարգի սահմանափակումներով: Այս բացերի վերացման հնարավոր ուղիների առանձին քննարկումը (թեկուզ եզրակացության շրջանակում, որպես բաց խնդիրների ցանկ) աշխատանքին կհաղորդեր լրացուցիչ հեռանկարային խորություն:

Ընդգծեմ, որ նշված դիտողություններից ոչ մեկը չի վերաբերում աշխատանքի գիտական բովանդակությանը և ոչ մի կերպ չի նվազեցնում դրա արժեքը:

Եզրակացություն: Նշված դիտողությունները չեն նվազեցնում ատենախոսության արժանիքները և աշխատանքում ստացված հիմնարար գիտական արդյունքների նշանակությունը: Որպես ավարտուն հետազոտություն, ատենախոսությունը ունի մեծ տեսական և

գործնական նշանակություն: Վահե Գնելի Սարգսյանի «Գծային առնչություններից ազատ հավաքածուները դիսկրետ մոդելավորման տիրույթում» թեմայով ատենախոսությունը լիովին բավարարում է ՀՀ ԲԿԳԿ-ի կողմից գիտական աստիճանաշնորհման կանոնակարգի դոկտորական ատենախոսություններին ներկայացվող բոլոր պահանջներին:

Ելնելով վերը շարադրվածից գտնում եմ, որ ատենախոսության հեղինակը՝ Վահե Գնելի Սարգսյանը արժանի է ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի շնորհմանը՝ Ե.13.05 «Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ» մասնագիտությամբ:

Պաշտոնական ընդդիմախոս՝
Ֆիզ.-մաթ. գիտությունների դոկտոր,
պրոֆեսոր



Յու.Ռ. Հակոբյան

Յու.Ռ. Հակոբյանի ստորագրությունը հաստատում եմ՝
ԵՊՀ գիտական քարտուղար

Մ.Վ. Հովհաննիսյան

" 29 " հունիսի 2026թ.

